

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-223-233

Рассеяние плоской звуковой волны шаром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоской поверхности¹

Л. А. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача рассеяния плоской звуковой волны абсолютно твердым шаром с непрерывно-неоднородным анизотропным упругим покрытием в присутствии плоской поверхности. Полагается, что тело находится в идеальной жидкости, подстилающая плоскость является абсолютно жесткой или акустически мягкой, законы неоднородности материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты.

Получено приближенное аналитическое решение задачи в случае, когда материал покрытия шара является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным. При этом не учитывается отражение от плоскости волн, рассеянных телом, но учитывается рассеяние шаром волны, образующейся при отражении падающей волны от плоскости.

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля представляется в виде суммы потенциалов падающей плоской волны; волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости; волны, возникающей при рассеянии шаром падающей плоской волны; волны, возникающей при рассеянии шаром отраженной от плоскости волны.

Волновые поля в содержащей среде описываются разложениями по сферическим волновым функциям, а для нахождения поля смещений в неоднородном анизотропном слое построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, абсолютно твердый шар, неоднородное анизотропное покрытие.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников. Рассеяние плоской звуковой волны шаром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоской поверхности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 223–233.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-223-233

Scattering of a plane sound wave by a sphere with an inhomogeneous anisotropic coating near the flat surface

L. A. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

In paper the problem of scattering of a plane sound wave by an absolutely solid sphere with a continuously inhomogeneous anisotropic elastic coating in the presence of a flat surface is considered. It is believed that the body is placed in an ideal fluid, the spreading flat surface is absolutely rigid and absolutely soft, the laws of heterogeneity of the coating material are described by differentiable radial coordinate functions.

The approximate analytical solution to the problem is obtained for the case when the material of the sphere coating is radially inhomogeneous and transversally isotropic. In this case the reflection from the plane of the waves scattered by the body is not taken into account, but scattering by the sphere of the wave arising from the reflection of the incident wave from the plane is taken into account.

By virtue of the linear formulation of the problem, the velocity potential of the total acoustic field is represented as the sum of the potentials of the incident plane wave; wave arising from the reflection of the incident plane waves from the plane; wave arising from the scattering of an incident plane wave by sphere; wave arising from scattering by a sphere reflected from plane of the wave.

Wave fields in a containing medium are described by expansions in spherical wave functions. A boundary value problem is constructed for a system of ordinary differential equations of the second order for finding displacement fields in an inhomogeneous anisotropic coating of sphere.

Keywords: scattering, sound waves, absolutely solid sphere, inhomogeneous anisotropic coating.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2021, "Scattering of a plane sound wave by a sphere with an inhomogeneous anisotropic coating near the flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 223–233.

1. Введение

Изучению влияния упругих покрытий на звукоотражающие свойства тел сферической формы посвящен ряд работ.

Задачи дифракции плоских, сферических и цилиндрических звуковых волн на упругом шаре с радиально-неоднородным упругим покрытием решены в [1-3]. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью изучена в [4]. В работе [5] на основе полученного в [1] решения прямой задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с непрерывно-неоднородным покрытием решена обратная задача. Найдены функциональные зависимости для плотности

и модулей упругости материала покрытия, обеспечивающие наименьшее отражение звука в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. В [6] показана возможность математического моделирования непрерывно-неоднородного по толщине покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев. Прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на термоупругом шаре с непрерывно-неоднородным термоупругим покрытием в теплопроводной жидкости решены в [7].

В указанных выше работах полагалось, что тела находятся в безграничном пространстве. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле оказывается значительным.

В [8] исследовалась дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи абсолютно жесткой или акустически мягкой плоской подстилающей поверхности. Аналитическое решение задачи дифракции сферических звуковых волн на абсолютно жестком шаре с упругим радиально-неоднородным покрытием в плоском волноводе получено в [9]. Представлены результаты расчетов акустического поля в волноводе. Проведено сравнение результатов расчета с результатами моделирования дифракции в волноводе в системе компьютерного моделирования физических процессов на основе метода конечных элементов.

Во всех упомянутых выше работах неоднородное покрытие рассматривалось как изотропное. Анизотропия материала покрытия не учитывалась. Лишь в [10] исследовано влияние анизотропии материала неоднородного упругого покрытия на рассеяние звука однородным изотропным упругим шаром, находящимся в безграничном пространстве.

В настоящей работе рассматривается задача рассеяния плоской звуковой волны абсолютно твердым шаром с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием в присутствии плоской поверхности (абсолютно жесткой или акустически мягкой).

2. Постановка задачи

Рассмотрим абсолютно твердый шар радиуса r_0 . Шар имеет покрытие в виде радиально-неоднородного трансверсально-изотропного упругого слоя радиуса r_1 . Шар находится в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 , скоростью звука c и ограниченном идеальной плоской поверхностью Γ (абсолютно жесткой или акустически мягкой). Расстояние от центра шара до плоскости равно d .

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре шара так, чтобы координатная ось z была перпендикулярна плоскости Γ . В системе координат x, y, z граница полупространства Γ определяется уравнением $z = -d$. С прямоугольной системой координат свяжем сферическую систему координат r, θ, φ .

Материал покрытия характеризуется модулями упругости λ_{ijkl} , которые описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , и плотностью ρ , которая является непрерывной функцией координаты r . Начало системы координат r, θ, φ является центром сферической анизотропии материала покрытия шара.

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время.

Потенциал скорости падающей плоской волны, распространяющейся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$, в имеет вид

$$\Psi_0 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \omega t],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$; $k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$; $k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$; $k_z = k \cos \theta_0$; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы

падения плоской волны; $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор; $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$; $z = r \cos \theta$; . В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Без ограничения общности будем считать, что волновой вектор падающей волны находится в плоскости x, z , то есть $\varphi_0 = 0$.

Определим акустическое поле, рассеянное шаром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоскости. При этом анизотропный материал покрытия будем рассматривать как трансверсально-изотропный.

3. Аналитическое решение задачи

Распространение звуковых волн в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [11]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (3.1)$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в содержащей жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi. \quad (3.2)$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии шара описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \text{ctg } \theta) &= -\rho(r) \omega^2 u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \text{ctg } \theta + 3\sigma_{r\theta}] &= -\rho(r) \omega^2 u_\theta, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \text{ctg } \theta) &= -\rho(r) \omega^2 u_\varphi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где u_r, u_θ, u_φ и σ_{ij} — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ и тензора напряжений в покрытии шара.

В дальнейшем воспользуемся двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik} , где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Для трансверсально-изотропного покрытия число независимых модулей упругости равно пяти ($\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{55}$). При такой анизотропии поверхностями изотропии являются концентрические сферические поверхности.

В этом случае обобщенный закон Гука записывается в виде [12]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_{11} \varepsilon_{rr} + \lambda_{12} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), & \sigma_{r\theta} &= 2\lambda_{55} \varepsilon_{r\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{22} \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{23} \varepsilon_{\varphi\varphi}, & \sigma_{r\varphi} &= 2\lambda_{55} \varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{23} \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi}, & \sigma_{\theta\varphi} &= (\lambda_{22} - \lambda_{23}) \varepsilon_{\theta\varphi}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где ε_{kl} — компонентами тензора деформаций; $\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(r)$.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора смещения $\mathbf{u}$ соотношениями [12]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r + u_\theta \text{ctg } \theta \right),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Так как подстилающая плоская поверхность является идеальной, то поставленная задача может быть решена с использованием метода мнимых источников, как это сделано в [8]. Однако применим другой подход, пренебрегая отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние шаром волны, образующейся при отражении падающей волны от плоскости.

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (3.6)$$

где Ψ_1 — потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости; Ψ_{s1} — потенциал скорости волны, возникающей при рассеянии шаром падающей плоской волны; Ψ_{s2} — потенциал скорости волны, возникающей при рассеянии шаром отраженной от плоскости волны.

Потенциал Ψ_1 описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (3.1) и граничному условию на поверхности Γ , которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 + \Psi_1) \right|_{z=-d} = 0, \quad (3.7)$$

если плоскость Γ является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления

$$(\Psi_0 + \Psi_1)|_{z=-d} = 0, \quad (3.8)$$

если плоскость Γ является акустически мягкой.

Потенциалы Ψ_{s1} и Ψ_{s2} являются решениями уравнения Гельмгольца (3.1). Они должны удовлетворять граничным условиям при $r = r_1$ и условиям излучения на бесконечности [11].

Чтобы найти Ψ_{s1} необходимо определить поле смещений в неоднородном покрытии, возникающее в результате падения на шар плоской волны с потенциалом Ψ_0 . Для нахождения Ψ_{s2} необходимо определить поле смещений, возникающее в покрытии в результате падения на шар плоской волны с потенциалом Ψ_1 .

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной анизотропной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений.

На внутренней поверхности покрытия должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды покрытия $\mathbf{u}$.

Граничные условия имеют вид:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1\omega(\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (3.9)$$

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_1 + \Psi_{s2}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1\omega(\Psi_1 + \Psi_{s2}), \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (3.10)$$

при $r = r_0$

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = 0. \quad (3.11)$$

Потенциал Ψ_1 представим в виде

$$\Psi_1 = A_1 e^{i(k_x x - k_z z)}. \quad (3.12)$$

Из граничных условий (3.7) и (3.8) находим

$$A_1 = \pm A e^{i2kd \cos \theta_0}, \quad (3.13)$$

где знаки «+» и «-» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающей поверхности соответственно.

Теперь определим потенциал Ψ_{s1} .

Представим потенциал скорости падающей волны в сферических координатах в виде разложения [13]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{mn} j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos m \varphi, \quad (3.14)$$

где $\gamma_{mn} = A i^n (2 - \delta_{0m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0)$; $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя порядка n ; $P_n^m(x)$ – присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m ; δ_{0m} – символ Кронекера.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал Ψ_{s1} будем искать в виде

$$\Psi_{s1}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{mn} h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos m \varphi, \quad (3.15)$$

где $h_n(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Введем функции u_2 и u_3 с помощью соотношений

$$u_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta}. \quad (3.16)$$

Используя (3.4), (3.5) и (3.16), запишем систему уравнений (3.3) относительно функций u_r , u_2 и u_3

$$\begin{aligned} & \lambda_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[(r\lambda'_{11} + 2\lambda_{11}) \frac{\partial}{\partial r} + 2\lambda'_{12} + \frac{2}{r}(\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23}) + r\rho\omega^2 \right] u_r + \\ & + \frac{2}{r^2} \lambda_{55} + \frac{1}{r} \left[(\lambda_{12} + 2\lambda_{55}) \frac{\partial}{\partial r} + \lambda'_{12} + \frac{1}{r}(\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23} - 2\lambda_{55}) \right] L(u_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[(\lambda_{12} + 2\lambda_{55}) \frac{\partial}{\partial r} + 2\lambda'_{55} + \frac{1}{r}(\lambda_{22} + \lambda_{23} + 4\lambda_{55}) \right] \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ & + \left[2\lambda_{55} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \left(\lambda'_{55} + \frac{2}{r} \lambda_{55} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \rho\omega^2 \right] \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} [2(\lambda_{22} - \lambda_{23})u_2 + \lambda_{22}L(u_2)] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\lambda_{22} - \lambda_{23}) \frac{\partial}{\partial \varphi} [2u_3 + L(u_3)] = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[(\lambda_{12} + 2\lambda_{55}) \frac{\partial}{\partial r} + 2\lambda'_{55} + \frac{1}{r}(\lambda_{22} + \lambda_{23} + 4\lambda_{55}) \right] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \\ & + \left[2\lambda_{55} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \left(\lambda'_{55} + \frac{2}{r} \lambda_{55} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \rho\omega^2 \right] \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [2(\lambda_{22} - \lambda_{23})u_2 + \lambda_{22}L(u_2)] - \frac{1}{r^2} (\lambda_{22} - \lambda_{23}) \frac{\partial}{\partial \theta} [2u_3 + L(u_3)] = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$L(\) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Штрихами обозначено дифференцирование по радиальной координате r .

Прделаем следующие преобразования. Уравнение (3.18) домножим на $\sin \theta$ и продифференцируем по θ , а уравнение (3.19) продифференцируем по φ . Складывая полученные уравнения, приходим к уравнению, содержащему только функции u_r и u_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[(\lambda_{12} + 2\lambda_{55}) \frac{\partial}{\partial r} + 2\lambda'_{55} + \frac{1}{r} (\lambda_{22} + \lambda_{23} + 4\lambda_{55}) \right] L(u_r) + \\ & + \left[2\lambda_{55} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \left(\lambda'_{55} + \frac{2}{r} \lambda_{55} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{r^2} (\lambda_{22} - \lambda_{23}) + \frac{1}{r^2} \lambda_{23} L(\) + \rho \omega^2 \right] L(u_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Теперь продифференцируем уравнение (3.18) по φ и вычтем уравнение (3.19), предварительно умноженное на $\sin \theta$ и продифференцированное по θ . Получим уравнение, в котором присутствует только функция u_3 :

$$\left[2\lambda_{55} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \left(\lambda'_{55} + \frac{2}{r} \lambda_{55} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{r^2} (\lambda_{22} - \lambda_{23}) + \frac{1}{r^2} (\lambda_{22} - \lambda_{23}) L(\) + \rho \omega^2 \right] L(u_3) = 0. \quad (3.21)$$

В результате приходим к системе, состоящей из уравнений (3.17), (3.20) и (3.21).

Граничные условия (3.9) с учетом (3.4), (3.5) и (3.16) запишутся следующим образом: при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad (3.22)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_{12} \frac{1}{r} \left(2u_r + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} \right) = -i\rho_1 \omega (\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad (3.23)$$

$$\lambda_{55} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r + u_2) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial \varphi} \right] = 0, \quad (3.24)$$

$$\lambda_{55} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r + u_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \varphi} \right] = 0. \quad (3.25)$$

Выполним преобразования граничных условий (3.24) и (3.25), аналогично тому, как это сделано при получении уравнений (3.20) и (3.21). Тогда вместо (3.24) и (3.25) будем иметь

$$\lambda_{55} \left[\frac{1}{r} L(u_r) - \frac{1}{r} L(u_2) + \frac{\partial}{\partial r} L(u_2) \right] = 0, \quad (3.26)$$

$$\lambda_{55} \left[-\frac{1}{r} L(u_3) + \frac{\partial}{\partial r} L(u_3) \right] = 0. \quad (3.27)$$

С учетом (3.16) граничные условия (3.11) принимают вид при $r = r_0$

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta} = 0. \quad (3.28)$$

Из (3.28) следует, что при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$u_r = 0, \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0. \quad (3.29)$$

Функция u_3 не связана с функциями u_r и u_2 не только в уравнениях системы (3.17), (3.20), (3.21), но и в граничных условиях (3.22), (3.23), (3.26), (3.27), (3.29). Так как дифференциальное уравнение и граничные условия, где присутствует функция u_3 , однородны, то можно утверждать, что $u_3(r, \theta, \varphi) \equiv 0$.

Функции u_r и u_2 будем искать в виде

$$u_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{1mn}(r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad (3.30)$$

$$u_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{2mn}(r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi. \quad (3.31)$$

При этом вид зависимостей от φ в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения $\mathbf{u}$ относительно плоскости $\varphi = 0, \pi$.

Подставим разложения (3.30) и (3.31) в уравнения (3.17) и (3.20). Воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра [13]

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0$$

и свойством ортогональности сферических гармоник, получим для каждой пары индексов m, n ($n = 0, 1, \dots; m \leq n$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{jmn}(r)$ ($j = 1, 2$)

$$\hat{A}\hat{\mathbf{U}}'' + \hat{B}\hat{\mathbf{U}}' + \hat{C}\hat{\mathbf{U}} = 0. \quad (3.32)$$

Здесь $\hat{\mathbf{U}} = (U_{1mn}, U_{2mn})^T$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 2\lambda_{55} \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = \lambda'_{11} + 2\lambda_{11}/r, \quad b_{12} = -n(n+1)(\lambda_{12} + 2\lambda_{55})/r,$$

$$b_{21} = (\lambda_{12} + 2\lambda_{55})/r, \quad b_{22} = b_{33} = 2(\lambda'_{55} + 2\lambda_{55}/r),$$

$$c_{11} = \rho\omega^2 + 2[\lambda'_{12}r + \lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23} - n(n+1)\lambda_{55}]/r^2,$$

$$c_{12} = -n(n+1)(\lambda'_{12}r + \lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23} - 2\lambda_{55})/r^2,$$

$$c_{21} = (2\lambda'_{55}r + \lambda_{22} + \lambda_{23} + 4\lambda_{55})/r^2,$$

$$c_{22} = \rho\omega^2 - [2\lambda'_{55}r + 2(\lambda_{22} - \lambda_{23} - 2\lambda_{55}) - n(n+1)\lambda_{22}]/r^2.$$

Анализ системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (3.32) показывает, что все коэффициенты системы не зависят от индекса m .

Подставляя разложения (3.14), (3.15) и (3.30) в граничное условие (3.22) и воспользовавшись условиями ортогональности сферических гармоник, найдем коэффициенты A_{mn} , выраженные через величины $U_{1mn}(r_1)$.

$$A_{mn} = -\frac{\gamma_{mn} k j'_n(kr_1) + i\omega U_{1mn}(r_1)}{k h'_n(kr_1)}. \quad (3.33)$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из оставшихся неиспользованными граничных условий (3.23), (3.26), (3.29) получим четыре краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных

уравнений (3.32). Подставим (3.14), (3.15), (3.30) и (3.31) в (3.23), (3.26), (3.29). Воспользовавшись уравнением для присоединенных полиномов Лежандра и выражением для вронскиана

$$j_n(x)h'_n(x) - j'_n(x)h_n(x) = i/x^2,$$

получаем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{\mathbf{U}}' + \hat{E}\hat{\mathbf{U}})|_{r=r_1} &= \hat{D}, \\ \hat{\mathbf{U}}|_{r=r_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r}\lambda_{12} + \frac{\omega^2\rho_1 h_n(kr)}{kh'_n(kr)} & -n(n+1)\frac{1}{r}\lambda_{12} \\ 2\lambda_{55}/r & -2\lambda_{55}/r \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{mn}\omega\rho_1}{(kr_1)^2 h'_n(kr_1)}, & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Элементы всех матриц, присутствующих в краевых условиях (3.34), за исключением $\hat{D}$, не зависят от индекса m , причем индекс m входит в $\hat{D}$ в виде множителя γ_{mn} .

Введем новые неизвестные функции $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ по формулам

$$U_{1mn}(r) = \gamma_{mn}U_{1n}(r), \quad U_{2mn}(r) = \gamma_{mn}U_{2n}(r). \quad (3.35)$$

Тогда для нахождения функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ следует решить краевую задачу (3.32), (3.34), где под вектором $\hat{\mathbf{U}}$ следует понимать вектор $(U_{1n}, U_{2n})^T$, а в $\hat{D}$ нужно исключить множитель γ_{mn} . Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ краевая задача может быть решена разными методами, например, методом сведения ее к задачам с начальными условиями или методом сплайн-коллокации.

После определения функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ находим функции $U_{1mn}(r)$ и $U_{2mn}(r)$ согласно (3.35) для всех $m = 0, 1, \dots, n$. Затем вычисляем коэффициенты A_{mn} по формуле (3.33).

В результате потенциал Ψ_{s1} описывается выражением (3.15).

Так как волна с потенциалом скорости Ψ_1 является плоской, то для определения потенциала Ψ_{s2} можно воспользоваться полученным решением задачи о нахождении потенциала Ψ_{s1} . Для этого достаточно в качестве падающей на шар плоской волны рассматривать вместо волны с потенциалом Ψ_0 волну с потенциалом Ψ_1 . При этом полярный угол падения волны с потенциалом Ψ_1 равен $\theta_1 = \pi - \theta_0$, а амплитуда этой волны определяется выражением (3.13). Поэтому в выражении для коэффициента γ_{mn} , присутствующим в (3.14), следует сделать замену A на A_1 и θ_0 на $\pi - \theta_1$.

4. Заключение

Полученное приближенное аналитическое решение задачи в виде (3.6) справедливо в случае, когда возможно пренебречь отражением от плоскости волн, рассеянных телом. Аналитическое решение задачи позволяет численно исследовать полное акустическое поле, возникающее при рассеянии плоской звуковой волны шаром с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием в присутствии плоской подстилающей поверхности, оценить влияние неоднородности и анизотропии материала покрытия на рассеяние звука при разных законах неоднородности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2014. Т.78, вып.4. С. 519-526.

2. Толоконников Л. А., Родионова Г. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 131-137.
3. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 663-673.
4. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 181-193.
5. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 11. С. 89-98.
6. Толоконников Л. А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 699-707.
7. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука термоупругим шаром с непрерывно-неоднородным покрытием в теплопроводной жидкости // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 5. С. 20-38.
8. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи плоскости // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 199-216.
9. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Дифракция звука на шаре с неоднородным покрытием в плоском волноводе // Прикладная математика и механика. 2020. Т. 84, вып. 5. С. 625-639.
10. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 423-437.
11. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
13. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

REFERENCES

1. Tolokonnikov, L. A. 2014, "The scattering of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 78, no. 4, pp. 367-373.
2. Tolokonnikov, L. A. & Rodionova, G. A. 2014, "Diffraction of a spherical acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 131-137, [in Russian].
3. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no. 5, pp. 467-474.

4. Tolokonnikov, L. A. 2014, "Diffraction of a plane acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering and arbitrarily situated spherical vacuity", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 181-193, [in Russian].
5. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2018, "Modeling an inhomogeneous coating of an elastic sphere with the required sound reflecting properties", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 10, no. 3, pp. 333-340.
6. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 81, no. 6, pp. 480-485.
7. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2019, "Sound Scattering by a Thermoelastic Ball with a Continuously Inhomogeneous Coating in a Heat-Conducting Fluid", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 11, no. 6, pp. 1007-1018.
8. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with a nonuniform coating located near a plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 199-216, [in Russian].
9. Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A. 2020, "Sound diffraction on a sphere with an inhomogeneous coating in a plane waveguide", *Mechanics of Solids*, vol. 55, no. 8, pp. 1351-1362.
10. Tolokonnikov, L. A. & Tolokonnikov, S. L. 2021, "Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous transversal isotropic layer", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423-437, [in Russian].
11. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
12. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
13. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].

Получено 12.09.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.