ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-198-222

О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях

З. Х. Рахмонов, О. О. Нозиров

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Нозиров Опокхон Окилхонович — Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: nozirov92@inbox.ru

Аннотация

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для средних значений функций Чебышёва по всем характерам модуля q имеет место оценка

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)| \tilde{\ell} x + x^{1/2} q \mathscr{L}^2, \qquad \mathscr{L} = \ln xq.$$

При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $t(x;q)$ имелась оценка, близкая к этой оценке. Лучшие оценки для $t(x;q)$ ранее принадлежали Г. Монтгомери, Р. Вону и З. Х. Рахмонову. В работе получена новая оценка вида

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)| \tilde{\ell} x \mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}^{32},$$

с помощью которой для линейной тригонометрической суммы с простыми числами при $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, найдена более точная оценка

$$S(\alpha,x) \tilde{\ell} x q^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{33} + x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{33},$$

а также изучено распределение чисел Харди-Литтлвуда вида $p+n^2$ в коротких арифметических прогрессиях в случае, когда разность прогрессии является степенью простого числа.

Ключевые слова: характер Дирихле, функция Чебышёва, тригонометрические суммы с простыми числами, числа Харди-Литтлвуда

Библиография: 30 названия.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов, О. О. Нозиров. О средних значениях функции Чебышёва и их приложениях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 198–222.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-198-222

On the mean values of the Chebyshev function and their applications

Z. Kh. Rakhmonov, O. O. Nozirov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Nozirov Opokkhon Okilkhonovich — A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: nozirov92@inbox.ru

Abstract

Assuming the validity of the extended Riemann hypothesis for the average values of Chebyshev functions over all characters modulo q, the following estimate holds

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|\tilde{\ell}x+x^{1/2}q\mathscr{L}^2,\qquad \mathscr{L}=\ln xq.$$

When solving a number of problems in prime number theory, it is sufficient that $t(x;q)$ admits an estimate close to this one. The best known estimates for $t(x;q)$ previously belonged to G. Montgomery, R. Vaughn, and Z. Kh. Rakhmonov. In this paper we obtain a new estimate of the form

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|\tilde{\ell}x\mathscr{L}^{28}+x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31}+x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32},$$

using which for a linear exponential sum with primes we prove a stronger estimate

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33},$$

when $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$. We also study the distribution of Hardy-Littlewood numbers of the form $p+n^2$ in short arithmetic progressions in the case when the difference of the progression is a power of the prime number.

Keywords: Dirichlet character, Chebishev function, exponential sums with primes, Hardy-Littlewood numbers

Bibliography: 30 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, O. O. Nozirov, 2021, “On the means values of the Chebyshev function and their applications”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 198–222.

1. Введение

Для характера Дирихле χ по модулю q функция Чебышева определяется равенством

$$\psi(y,\chi)=\sum_{n\leqslant y}\Lambda(n)\chi(n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта. В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для средних значений функций Чебышёва по всем характерам модуля q имеет место оценка

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y,\chi)| \tilde{\ell} x + x^{1/2} q \mathscr{L}^2, \qquad \mathscr{L} = \ln xq. \tag{1}$$

При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $t(x;q)$ имелась оценка, близкая к оценке (1).

Средние значения функций Чебышёва впервые исследовал Ю. В. Линник [1, 2, 3, 4] для вывода нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами $S(\alpha, x)$.

А. А. Карацуба [5] создал метод решения тернарных мультипликативных задач, с помощью которого оценил самый простой случай величины $t(x;q)$. Следствием этой оценки является распределение чисел вида $p(p_1 + a)$ в коротких арифметических прогрессиях.

Воспользовавшись методом большего решета Ю. В. Линника, Г. Монтгомери [6] доказал плотностные теоремы для нулей L-функции Дирихле, с помощью которых показал, что

$$t(x;q) \tilde{\ell} (x + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}} q) \mathscr{L}^{17}. \tag{2}$$

Этот результат уточнил Р. Вон [7]. Он с помощью представления

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{L'}{L} + F\right)(1 - FG) + (L' + LF)G - F,$$

где F и G — соответственно частные суммы для рядов Дирихле – $\frac{L'}{L}$ и $\frac{1}{L}$, доказал, что

$$t(x;q) \tilde{\ell} x \mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{3}$$

В 1989 году З. Х. Рахмонов [8] показал, что

$$t(x;q) \tilde{\ell} (x + x^{\frac{5}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} q) x^{\delta}.$$

Это оценка сильнее (2) и слабее (3), но доказательство, в отличие от этих оценок, проводится элементарно и опирается на метод А. А. Карацубы решения мультипликативных тернарных задач [5].

Из оценок (1), (2) и (3) для $t(x;q)$ видно, что из трёх слагаемых, присутствующих в этих оценках, два крайних равны между собой с точностью конечной степени логарифма, и их, видимо, нельзя вообще улучшить относительно степеней x и q. Дальнейшего улучшения второго слагаемого добился З. Х. Рахмонов [9, 10]. Он доказал, что

$$t(x;q) \tilde{\ell} \left(x + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} q\right) \mathscr{L}^{34}. \tag{4}$$

В следующей теореме уточняем эту оценку.

Теорема 1. *При $x \geqslant 2$ и $q \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$t(x;q) \tilde{\ell} x \mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}^{32}.$$

В 1937 г. И. М. Виноградов [11] обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путём только сложения и вычитания из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не имеющих какого-либо отношения к теории L-рядов Дирихле. В частности, такой суммой оказалась линейная тригонометрическая сумма с простыми числами вида

$$S(\alpha,x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n),$$

где α — вещественное число, и при условии

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{1}{q^2},\qquad q\leqslant x,\qquad (a,q)=1,$$

была найдена оценка:

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})x^{\varepsilon},\tag{5}$$

доказательство которой проводится элементарным методом.

Впервые сумму $S(\alpha,x)$ аналитическим методом оценил Ю. В. Линник [1, 4] (см. также [12, 13]). Он с помощью идей Харди-Литтлвуда [14], применявшихся ранее в проблеме Гольдбаха, и теоремы о густоте нулей L-рядов Дирихле, дал новый вариант нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами в следующей формулировке: *пусть α- вещественное число, $N\geq N_0>0$, $\alpha=\frac{a}{q}+\lambda$, где $(a,q)=1$, $1<q\leqslant\tau=(\ln x)^{1000}$, $\tau^{1000}x^{-1}\leqslant|\lambda|\leqslant(q\tau)^{-1}$, тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda(n)\exp\left(-\frac{n}{N}\right)e(\alpha n)\right|<N(\ln N)^{-1000}.$$

Г. Монтгомери [6], пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышева (2), доказал, что

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)\tilde{\ell}\left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{3}{14}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{17}.\tag{6}$$

Он также доказал, что, если $\eta\leqslant x^{\frac{1}{4}}$, $\eta\leqslant q\leqslant x\eta^{-1}$, $|\alpha-a/q|\leqslant 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{17}.\tag{7}$$

Р. Вон [7], применяя свою оценку для средних значений функций Чебышёва (3), уточнил результат Г. Монтгомери. Он доказал, если $|\alpha-a/q|\leqslant q^{-2}$, $(a,q)=1$, то имеет место оценка

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{7}{8}}q^{-\frac{1}{8}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{4},\tag{8}$$

и, если $\eta\leqslant x^{\frac{1}{3}}$, $\eta\leqslant q\leqslant x\eta^{-1}$, $|\alpha-a/q|\leqslant 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{4}.\tag{9}$$

Отметим, что оценки (6), (7), (8) и (9), полученные аналитическим методом, слабее оценки (5), полученной И. М. Виноградовым элементарным методом. З. Х. Рахмонов [9, 10], воспользовавшись своей оценкой средних значений функций Чебышёва (4), вывел оценку в которой множитель x^{ε} в (5) заменяется на конечную степень логарифма, то есть, если $|\alpha-a/q|\leqslant q^{-2}$, $(a,q)=1$, тогда

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}^{35}.\tag{10}$$

и, если $1\leqslant\eta\leqslant x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\leqslant q<x\eta^{-1}$, $|\alpha-a/q|\leqslant 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, то справедлива оценка

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}.\tag{11}$$

Воспользовавшись теоремой 1, докажем оценку суммы $S(\alpha,x)$, в которой в (10) уточняются степени логарифмов в слагаемых, точнее оценка (10) сначала уточняется в случае, когда α является рациональным числом (теорема 2), а затем для произвольного вещественного числа α (следствие 1).

Теорема 2. *Пусть* $(a,q)=1$. *Тогда справедлива оценка*

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)\tilde{\ell}xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Следствие 1. *Пусть* $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, *тогда имеет место оценка*

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Следующее следствие является уточнением оценки (11).

Следствие 2. *Пусть* $\eta\leqslant x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\leqslant q\leqslant x\eta^{-1}$, $|\alpha-aq^{-1}|\leqslant 2\eta(qx)^{-1}$, $(a,q)=1$, *тогда справедлива оценка*

$$S(\alpha,x)\tilde{\ell}x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Харди и Литтлвуд [15] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n=p+m^k,\qquad k\geq 2.$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г. Бабаев [16] опроверг эту гипотезу, а именно показал, что существует бесконечное число натуральных чисел, не являющихся числом Харди-Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют l, $1\leq l\leq q$, для которых выполняется неравенство

$$H_k(q,l)>q,\qquad k\geq 2,$$

где $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p+m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt+l$, $t=0,1,2,\ldots$, q – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q,l)$ как можно лучше.
2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди-Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

В случае q – простое число и $k\geq 2$, эти две задачи исследовались в работах [8, 9, 10, 17], и была получена асимптотическая формула для числа решений сравнения:

$$p+m^k\equiv l\ (\mathrm{mod}\ q),\qquad p\leq x,\qquad m\leq\sqrt[k]{x},$$
$$q\tilde{\ell}\min\left(x^{\frac{2}{k}}\mathscr{L}_x^{-8},x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}_x^{-35},x^{\frac{k+2}{3k}}\mathscr{L}_x^{-\frac{70}{3}},\right),\qquad \mathscr{L}_x=\ln x,$$

откуда, в частности, следует, что

$$H_2(q,l)\tilde{\ell}q^{\frac{3}{2}}\ln^{35}q.$$

Доказательство этого результата опирается на метод А. А. Карацубы для решения мультипликативных тернарных задач [5] и на теорему А. Вейля [18] об оценке в случае $\beta = 1$ полных смешанных сумм вида

$$S(\chi, g, f, p^\beta) = \sum_{m=1}^{p^\beta} \chi(g(m)) e\left(\frac{f(m)}{p^\beta}\right),$$

где χ — характер Дирихле по модулю p^β, $g(m)$ и $f(m)$ — рациональные функции, и подразумевается, что m пробегает только значения, для которых $g(m)$ и $f(m)$ определены по модулю p^β, а также $g(m)$ отлична от нуля по модулю p;

Следующая теорема — обобщение и уточнение этого результата на случай, когда $k = 2$, и q – разность прогрессии является степенью простого числа.

Теорема 3. *Пусть $x \geqslant x_0$, p — нечётное простое число, $(l, p) = 1$, $-l$ — квадратичный невычет по модулю p, $\rho(p, l)$ — число решений сравнения $n^2 \equiv l (\mathrm{mod}\ p)$,*

$$H_2(x; p^\alpha, l) = \sum_{\substack{n \leqslant x,\ m^2 \leq x \\ n+m^2 \equiv l\ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)}} \Lambda(n).$$

Тогда для любого фиксированного $A \geqslant 58$ справедлива асимптотическая формула

$$H_2(x; p^\alpha, l) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)} \left(1 - \frac{\rho(p, l)}{p} + O\left(\mathscr{L}_x^{-0.5A+28} + \frac{p^{0.5\alpha}}{x^{0.5}}\mathscr{L}^{32} + \frac{p^\alpha}{x^{0.7}}\mathscr{L}^{32} + \frac{p^{1.5\alpha}}{x}\mathscr{L}^{33}\right)\right),$$

где постоянная под знаком O зависит от α.

Отметим, что эта формула становится нетривиальной, если

$$p^\alpha \tilde{\ell} x^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}_x^{-\frac{68}{3}}.$$

Следствие 3. *Пусть $q = p^\alpha$, p – простое число, $(l, p) = 1$. Тогда*

$$H_2(q, l) \tilde{\ell} q^{\frac{3}{2}} (\ln q)^{34}.$$

При доказательстве теоремы 3 воспользуемся результатами работы T. Cochrane [19] об оценке полных смешанных сумм $S(\chi, g, f, p^\beta)$, $\beta \geqslant 2$. Отметим, что метод оценки полных сумм характеров вида $S(\chi, g, 0, p^\beta)$ разработал Д. Исмоилов [20] – [25], воспользовавшись явной формулой А. Г. Постникова [26].

Обозначения:

- x — достаточно большое положительное вещественное число;
- q натуральное число, $q > q_0$, $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю q;
- $\mu(n)$ — функция Мёбиуса; $s = \sigma + it$ – комплексное число; M_j, N_j и U_j – целые числа, $N_j \leqslant U_j < 2N_j$;

$$S_j(s, \chi) = \sum_{U_j < n \leq 2N_j} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad G_j(s, \chi) = \sum_{M_j < m \leqslant 2M_j} \frac{\mu(m)\chi(m)}{m^s};$$

$$W_k(s, \chi) = \sum_{j=1}^{k} G_j(s, \chi) S_j(s, \chi), \qquad t_k(q; M, N) = \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |W_k(0, 5 + it, \chi)| \frac{dt}{1 + |t|},$$

$\sum_{\chi}''$ — означает суммирование по всем примитивным характерам по модулям d, $d|q$;

- $ord_p(x)$ — наибольшая степень простого числа p, делящего целое число x, для многочлена f над $\mathbb{Z}$, $ord_p(f)$ — наибольшая степень p, делящая все коэффициенты f, а для рациональной функции f_1/f_2, $ord_p(f_1/f_2) = ord_p(f_1) - ord_p(f_2)$.

2. Известные леммы

Лемма 1. [6]. *Предположим, что $M \geq 0$ и $N \geq 1$. Тогда для любых значений $T \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) n^{-it} \right|^2 \frac{dt}{1+|t|} \tilde{\ell} \sum_{n=M}^{M+N} (n + q\ln T)|a_n|^2.$$

Лемма 2. [27]. *При $x \geq 2$ имеем*

$$\sum_{n \leq x} \tau_r^2(n) \tilde{\ell} x (\ln x)^{r^2-1}.$$

Лемма 3. [28]. *Пусть $b > 0$, $T > 1$, тогда имеет место соотношение*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\dfrac{a^b}{T_0|\ln a|}\right), & \textit{если} \quad a > 1, \\ O\left(\dfrac{a^b}{T_0|\ln a|}\right), & \textit{если} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

Лемма 4. [29]. *Пусть $q \geq 1$, тогда при $Re\, s = \sigma \geqslant 0,5$ справедлива оценка*

$$|L(s,\chi)| \tilde{\ell} (q|s|)^{1-\sigma} \ln q|s|.$$

Лемма 5. [6, 29]. *При $T \geq 2$ справедливы неравенства:*

$$\sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |L(0.5+it,\chi)|^4 \frac{dt}{1+|t|} \tilde{\ell} q (\ln qT)^5,$$
$$\sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T} |L(0.5+it,\chi)|^2 \frac{dt}{1+|t|} \tilde{\ell} q \ln qT.$$

Лемма 6. ([9], используя тождество Хис-Брауна [30]). *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u_1 \leqslant x$, $r \geqslant 1$,*

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d \backslash n,\, d \leqslant u_1} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) f(n) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \sum_{m_1 \leqslant u_1} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{m_k \leqslant u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leqslant x}} \mu(m_k) \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_k} \ln n_1 f(m_1 n_1 \cdots m_k m_k)$$
$$+ (-1)^r \sum_{n_1 > u_1} \lambda(n_1) \cdots \sum_{\substack{n_r > u_1 \\ n_1 \cdots n_r m \leqslant x}} \lambda(n_r) \sum_{m} \Lambda(m) f(n_1 \cdots n_r m).$$

Лемма 7. [19]. *Пусть f и g рациональные функции над $\mathbb{Z}$, не являющиеся постоянными, p — нечетное простое число, χ — характер Дирихле по модулю p^β, а β — целое число, такое что $\beta \geqslant t+2$.*

(i) *Если $\delta \notin \mathcal{A}$, то $S_\delta(\chi, g, f, p^\beta) = 0$.*

(ii) *Если δ простой корень, то*

$$S_\delta(\chi, g, f, p^\beta) = \begin{cases} \chi(g(\delta^*))e\left(\dfrac{f(\delta^*)}{p^\beta}\right)p^{\frac{\beta+t}{2}}, & \text{если } \beta - t \text{ — четное,} \\ \chi(g(\delta^*))e\left(\dfrac{f(\delta^*)}{p^\beta}\right)\left(\dfrac{A_\delta}{p}\right)\mathcal{G}_p p^{\frac{\beta+t-1}{2}}, & \text{если } \beta - t \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

где δ^* построенный на основе δ корень сравнения

$$\mathcal{C}(m) \equiv 0 \left(\bmod p^{\left[\frac{\beta+t-1}{2}\right]}\right), \qquad A_\delta \equiv 2r(\mathcal{C}/g)'(\delta) \, (\bmod p),$$

здесь $\mathcal{G}$ квадратичная сумма Гаусса.

3. Основные леммы об оценках сумм вида $t_k(q; M, N)$

Лемма 8. *Пусть $T \geq 2$, $M_1 \ldots M_k N_1 \ldots N_k = Y$, $k_1 \leq k$, $k_2 \leq k$, $k_1 + k_2 = r$, $2^r M_{j_1} \ldots M_{j_{k_1}} N_{i_1} \ldots N_{i_{k_2}} = X$. Тогда справедлива оценка:*

$$t_k(q; M, N)\tilde{\ell}(Y^{\frac{1}{2}} + X^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2+2k^2-2rk-1}.$$

Доказательство. Пусть

$$H_1(s,\chi) = \prod_{\alpha=1}^{k_1} G_{j_\alpha}(s,\chi)\prod_{t=1}^{k_2} S_{j_t}(s,\chi), \quad H_2(s,\chi) = W_k(s,\chi)H_1^{-1}(s,\chi).$$

Из определения функций $G_{j_\alpha}(s,\chi)$ и $S_{j_t}(s,\chi)$ следует, что

$$H_1(s,\chi) = \sum_{n \leqslant X} \frac{a_n\chi(n)}{n^s}, \qquad H_2(s,\chi) = \sum_{m \leqslant V} \frac{b_m\chi(m)}{m^s}, \qquad V = 2^{2k}YX^{-1},$$

где $|a_n| \leq \tau_r(n)$, $|b_m| \leq \tau_{2k-r}(m)$. Применяя неравенство Коши сначала для интеграла по t, затем для суммы по характерам χ, найдём

$$t_k(q; M, N) = \sum_\chi{}'' \int_{-T}^{T} |H_1(0.5+it,\chi)H_2(0.5+it,\chi)| \frac{dt}{1+|t|} \leqslant \left(t_k'(q; M, N)t_k''(q; M, N)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$$t_k'(q; M, N) = \sum_\chi{}'' \int_{-T}^{T} \left|\sum_{n \leq X} \frac{a_n\chi(n)}{n^{0,5+it}}\right|^2 \frac{dt}{1+|t|},$$

$$t_k''(q; M, N) = \sum_\chi{}'' \int_{-T}^{T} \left|\sum_{n \leq V} \frac{b_n\chi(n)}{n^{0,5+it}}\right|^2 \frac{dt}{1+|t|}.$$

Оценим $t_k'(q; M, N)$. Применяя последовательно леммы 1 и 2, получим

$$t_k'(q; M, N)\tilde{\ell}\sum_{n \leq X}(n + q\ln T)\left|\frac{a_n}{n^{0,5}}\right|^2 \tilde{\ell}\sum_{n \leq X}\tau_r^2(n) + q\ln T\sum_{n \leq X}\frac{\tau_r^2(n)}{n}\tilde{\ell}(X + q\mathscr{L}^2)\mathscr{L}^{r^2-1}.$$

Таким же способом найдём, что

$$t_k''(q;M,N)\tilde{\ell}\sum_{n\le V}(n+q\ln T)\left|\frac{b_n}{n^{0,5}}\right|^2\tilde{\ell}\left(\frac{Y}{X}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{(2k-r)^2-1}.$$

Отсюда и из оценки суммы $t_k'(q;M,N)$, ввиду (12) следует утверждение леммы.

Лемма 9. *Пусть $|t|\le T$, $T\le T_0$ и $N\leqslant U<2N$, тогда справедливо неравенство:*

$$S(0.5+it,\chi)\tilde{\ell}\int_{-T_0}^{T_0}|L(0.5+i(u+t),\chi)|\frac{du}{1+|u|}+\frac{N^{\frac12}\mathscr{L}}{T_0}+\left(\frac{q}{T_0}\right)^{\frac12}\mathscr{L}.$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Эйлера, теоремой Лагранжа о конечных разностях в форме $\sin\varphi=\sin\varphi-\sin 0=\varphi\cos\theta\varphi$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$, а также, воспользовавшись тривиальной оценкой, найдём

$$\begin{aligned}\left|\frac{(2N)^{iu}-U^{iu}}{u}\right|&=\frac{\sqrt{2-2\cos(u(\ln 2N-\ln U))}}{|u|}=\frac{2|\sin(0,5u(\ln 2N-\ln U))|}{|u|}=\\&=(\ln 2N-\ln U)|\cos(0,5\theta u(\ln 2N-\ln U))|\leqslant\\&\leqslant\min\left(\ln 2N-\ln U,\ \frac{2}{|u|}\right)\leqslant\min\left(\ln 2,\ \frac{2}{|u|}\right)\leqslant\frac{2\ln 2+2}{1+|u|}.\end{aligned}\tag{13}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что U и $2N$ полуцелые числа. Применяя тождество Перрона (лемма 3) при $T=T_0$ и $b=0,5+(\ln 2N)^{-1}$, имеем

$$S(0.5+it,\chi)-\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_0}^{b+iT_0}L(0.5+it+u,\chi)\frac{(2N)^u-U^u}{u}du\tilde{\ell}R_1(2N,T_0)+R_1(U,T_0),\tag{14}$$

$$R_1(N,T_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0.5}}R\left(\frac{N}{n}\right)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0.5}}\left(\frac{N}{n}\right)^b\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|^{-1},$$

где N одно из полуцелых чисел $2N$ и U. Неравенства $\frac{N}{2}\ge n\geqslant 2N$ и $\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|\geqslant\ln 2$ эквивалентны. Поэтому с учётом соотношения $n^{0,5+b}=n^{1+(\ln 2N)^{-1}}>n$, имеем

$$\begin{aligned}R_1(N,T_0)&=\frac{N^b}{T_0}\left(\sum_{\frac{N}{2}\ge n\geqslant 2N}\left(n^{0,5+b}\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|\right)^{-1}+\sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant 2N-1}\left(n^{0,5+b}\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|\right)^{-1}\right)\leqslant\\&\leqslant\frac{N^{\frac12}}{T_0}\left(\frac{1}{\ln 2}\sum_{\frac{N}{2}\ge n\geqslant 2N}\frac{1}{n^{1+(\ln 2N)^{-1}}}+\frac{2}{N}\sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant 2N-1}\left|\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right|^{-1}\right).\end{aligned}\tag{15}$$

Обозначая две последние суммы через R_{11} и R_{12}, оценим каждую из них отдельно. R_{11} является сходящимся числовым рядом, то есть $R_{11}\tilde{\ell}1$. В R_{12} переменная суммирования n принимает значения целого числа, начиная от целого числа N_1 до целого числа $2N-1$, где

$$N_1=\begin{cases}\dfrac{N+0,5}{2}+1, & \text{если } N-0,5 \text{ – нечётное;}\\[2ex]\dfrac{N-0,5}{2}+1, & \text{если } N-0,5 \text{ – чётное.}\end{cases}$$

Разбивая сумму по n на две части, затем воспользовавшись в первой сумме эквивалентностью неравенств $N_1 \leqslant n \leqslant N-0,5$ и $0 \leqslant N-0,5-n \leqslant N-0,5-N_1$, имеем

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= -\sum_{n=N_1}^{N-0,5}\left(\ln\left(\frac{n}{N}\right)\right)^{-1} + \sum_{n=N+0,5}^{2N-1}\left(\ln\left(\frac{n}{N}\right)\right)^{-1} = \\
&= -\sum_{n=0}^{N-0,5-N_1}\left(\ln\left(\frac{N-0,5-n}{N}\right)\right)^{-1} + \sum_{n=0}^{N-1,5}\left(\ln\left(\frac{n+N+0,5}{N}\right)\right)^{-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-0,5-N_1}\left(-\ln\left(1-\frac{n+0,5}{N}\right)\right)^{-1} + \sum_{n=0}^{N-1,5}\left(\ln\left(1+\frac{n+0,5}{N}\right)\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Далее при $0 \leqslant n \leqslant N-0,5-N_1$ и $0 \leqslant n \leqslant N-1,5$, пользуясь соответственно соотношениями

$$
\begin{aligned}
-\ln\left(1-\frac{n+0,5}{N}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{n+0,5}{N}\right)^k > \frac{n+0,5}{N}, \\
\ln\left(1+\frac{n+0,5}{N}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{n+0,5}{N}\right)^k > \frac{n+0,5}{2N},
\end{aligned}
$$

находим

$$
R_{12} < \sum_{n=0}^{N-0,5-N_1}\frac{N}{n+1,5} + \sum_{n=0}^{N-1,5}\frac{2N}{n+0,5}\tilde{\ell} N\ln N.
$$

Подставляя эту оценку и оценку для R_{11} в формулу (15), получим

$$
R_1(N,T_0)\tilde{\ell}\frac{N^{\frac12}}{T_0}\left(1+\frac{1}{N}\cdot N\ln N\right)\tilde{\ell}\frac{N^{\frac12}\mathscr{L}}{T_0}.
$$

Подставим эту оценку в (14), а затем в интеграле J перенесём контур интегрирования на прямую $Rez=0$, тогда получим

$$
\begin{aligned}
S(0.5+it,\chi) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{-T_0}^{T_0}\frac{(2N)^{iu}-U^{iu}}{u}L(0.5+i(t+u),\chi)du + \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{b}^{0}\frac{(2N)^{u-iT_0}-U^{u-iT_0}}{u-iT_0}L(0.5+u+i(t-T_0),\chi)du + \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{b}\frac{(2N)^{u+iT_0}-U^{u+iT_0}}{u+iT_0}L(0.5+u+i(t+T_0),\chi)du + O\left(\frac{N^{\frac12}\mathscr{L}}{T_0}\right).
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись при оценке первого интеграла неравенством (13), а для оценки двух отставших интегралов оценкой $|L(0.5+u+i(t+T_0),\chi)|\tilde{\ell}\,(qT_0)^{0.5-u}\ln qT_0$ (лемма 4), найдём

$$
\begin{aligned}
|S(0.5+it,\chi)|\tilde{\ell}\int_{-T_0}^{T_0}|L(0.5+i(t+u),\chi)|\frac{du}{1+|u|} + \frac{(qT_0)^{0.5}\ln qT_0}{T_0}\int_0^b\left(\frac{N}{qT_0}\right)^u du + \frac{N^{\frac12}\mathscr{L}}{T_0}\tilde{\ell} \\
\tilde{\ell}\int_{-T_0}^{T_0}|L(0.5+i(t+u),\chi)|\frac{du}{1+|u|} + \frac{N^{\frac12}\mathscr{L}}{T_0} + \left(\frac{q}{T_0}\right)^{\frac12}\mathscr{L}.
\end{aligned}
$$

Лемма 10. *Пусть $M_1\ldots M_kN_1\ldots N_k = Y$, $Y\le y$, $y\le x$, $N_1\ge N_2\ge\ldots\ge N_k$, $T\ge N_1^{\frac12}$, $q\le T$. Тогда справедливы оценки*

$$
t_k(q;M,N)\tilde{\ell}\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac12}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-1)^2+4)},
$$

$$t_k(q;M,N)\tilde{\ell}\left(\left(\frac{Yq}{N_1}\right)^{\frac12}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{(2(k-0,5)^2+1)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&W_k(s,\chi)=H(s,\chi)S_1(s,\chi)S_2(s,\chi),\\
&H(s,\chi)=\prod_{j=1}^{k}G_j(s,\chi)\prod_{i=3}^{k}S_i(s,\chi)=\sum_{V_0<n\le V_1}\frac{a(n)\chi(n)}{n^s},\\
&a_n=\sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\ldots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}\mu(m_k)\sum_{U_3<n_3\leqslant 2N_3}\ldots\sum_{U_k<n_k\leqslant 2N_k}1,\quad |a_n|\leqslant\tau_{2k-2}(n),\\
&V_0=M_1\ldots M_kU_3\ldots U_k,\quad V_1=2^{2k-2}M_1\ldots M_kN_3\ldots N_k\tilde{\ell}\frac{Y}{N_1N_2}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши сначала для интеграла по t, затем для суммы по характерам χ, найдём

$$\begin{aligned}
&t_k(q;M,N)\leqslant\left(t_k'(q;M,N)t_k''(q;M,N)\right)^{\frac12},\\
&t_k'(q;M,N)=\sum_{\chi}{}''\int_{-T}^{T}\left|\sum_{V_0<n\le V_1}\frac{a(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2\frac{dt}{1+|t|},\\
&t_k''(q;M,N)=\sum_{\chi}{}''\int_{-T}^{T}|S_1(0.5+it,\chi)S_2(0.5+it,\chi)|^2\frac{dt}{1+|t|}.
\end{aligned}$$

Оценим $t_k'(q;M,N)$. Применяя последовательно лемму 1, соотношение $|a_n|\leqslant\tau_{2k-2}(n)$, а затем лемму 2, соотношение $V_1\tilde{\ell}\dfrac{Y}{N_1N_2}$, имеем

$$\begin{aligned}
t_k'(q;M,N)\tilde{\ell}&\sum_{V_0<n\le V_1}(n+q\ln T)\left|\frac{a_n}{n^{0.5}}\right|^2\tilde{\ell}\sum_{V_0<n\leqslant V_1}\tau_{2k-2}^2(n)+q\ln T\sum_{V_0<n\le V_1}\frac{\tau_{2k-2}^2(n)}{n}\tilde{\ell}\\
&\tilde{\ell}V_1(\ln V_1)^{(2k-2)^2-1}+q\ln T(\ln V_1)^{(2k-2)^2}\tilde{\ell}\left(\frac{Y}{N_1N_2}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{(2k-2)^2-1}.
\end{aligned}$$

Перейдём к оценке $t_k''(q;M,N)$. Применим к суммам $S_1(0.5+it,\chi)$ и $S_2(0.5+it,\chi)$ лемму 9, полагая в ней $T_0=T$. Имея в виду, что $T_0\ge\max(N_j^{\frac12},q)$, находим

$$S_j(0.5+it,\chi)\tilde{\ell}\int_{-T}^{T}|L(0.5+i(u+t),\chi)|\frac{du}{1+|u|}+\mathscr{L},\quad j=1,2.$$

Воспользовавшись этим соотношением, неравенством $(a+b)^4\tilde{\ell}a^4+b^4$, применяя к внутреннему интегралу по переменной u два раза неравенство Коши, а затем пользуясь симметричностью повторного интеграла по переменным u и t, имеем

$$\begin{aligned}
t_k''(q;M,N)\tilde{\ell}&\sum_{\chi}{}''\int_{-T}^{T}\left|\int_{-T}^{T}|L(0.5+i(u+t),\chi)|\frac{du}{1+|u|}+\mathscr{L}\right|^4\frac{dt}{1+|t|}\tilde{\ell}\\
&\tilde{\ell}\sum_{\chi}{}''\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{T}|L(0.5+i(u+t),\chi)|\frac{du}{1+|u|}\right)^4\frac{dt}{1+|t|}+q\mathscr{L}^5,
\end{aligned}$$

$$\tilde{\ell}\mathscr{L}^3 \sum_{\chi}{}'' \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \frac{du}{1+|u|}\frac{dt}{1+|t|} + q\mathscr{L}^5 =$$
$$= 2\mathscr{L}^3 \sum_{\chi}{}'' \int_{|t|\leqslant T}\int_{|t|\leqslant|u|\leqslant T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \frac{du}{1+|u|}\frac{dt}{1+|t|} + q\mathscr{L}^5.$$

Так как $|u|\geq|t|$, то

$$1+|u| \geq 1+\frac{|u|+|t|}{2} \geq 1+\frac{|u+t|}{2} \geq \frac{1}{2}(1+|u+t|),$$

поэтому

$$t_k''(q;M,N)\tilde{\ell}\mathscr{L}^3 \sum_{\chi}{}'' \int_{|t|\leq T}\int_{|t|\leq|u|\leq T} |L(0.5+i(u+t),\chi)|^4 \, \frac{du}{1+|u+t|} \, \frac{du}{1+|u|} + q\mathscr{L}^5 =$$
$$= \mathscr{L}^3 \sum_{\chi}{}'' \int_{|t|\leq T}\int_{|t|\leq|v-t|\leq T} |L(0.5+iv,\chi)|^4 \, \frac{dv}{1+|v|} \, \frac{du}{1+|u|} + q\mathscr{L}^5 = \tilde{\ell}$$
$$\tilde{\ell}\mathscr{L}^4 \sum_{\chi}{}'' \int_{-2T}^{2T} |L(0.5+iv,\chi)|^4 \, \frac{dv}{1+|v|} + q\mathscr{L}^5.$$

Пользуясь леммой 5, получим утверждение леммы. Второе утверждение леммы доказывается аналогично, только вместо четвёртого момента L-рядов Дирихле применяется их второй момент.

4. Доказательство теоремы 1

Пусть χ_d – примитивный характер по модулю d, χ – индуцированный χ_d характер по модулю q, $d|q$, тогда $\psi(y,\chi)=\psi(y,\chi_d)+O(\mathscr{L}^2)$, отсюда

$$t(x;q) = \sum_{\chi\neq\chi_0} \max_{y\leq x}|\psi(y,\chi)| + \psi(x,\chi_0)\tilde{\ell}\sum_{\chi}{}''\max_{y\leq x}|\psi(y,\chi)| + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2. \tag{16}$$

Полагая в лемме 6, $u=y^{\frac14}$, $r=4$ и $f(n)=\chi(n)$, найдём

$$\psi(y,\chi) = \sum_{k=1}^{4}(-1)^k C_4^k \tilde{\psi}_k(y,\chi), \tag{17}$$

$$\tilde{\psi}_k(y,\chi) = \sum_{m_1\leqslant u}\mu(m_1)\cdots\sum_{m_k\leqslant u}\mu(m_k)\sum_{n_1 m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leqslant y}\cdots\sum \ln n_1\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k).$$

Разобьём в $\tilde{\psi}_k(y,\chi)$ области изменения каждого $m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j<m_j\leqslant 2M_j$, $N_j<n_j\leqslant 2N_j$, $j=1,2,\cdots,k$. Получим не более $\mathscr{L}^{2k}$ сумм вида

$$\hat{\psi}_k(y,\chi,M,N) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\leqslant 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\leqslant y}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k)\ln n_1 =$$

$$= \int_1^{2N_1}\sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}\mu(m_k)\sum_{\max(u,N_1)<n_1\leqslant 2N_1}\cdots\sum_{\substack{N_k<n_k\leqslant 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\leqslant x}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k)d\ln u.$$

Через $U_1 = \max(u, N_1)$ обозначим такое число u, при котором модуль подынтегральной функции, принимает максимальное значение, тогда

$$\hat{\psi}_k(y, \chi, M, N)|\tilde{\ell}\mathscr{L}\,|\psi_k(y, \chi, M, N)|\,, \tag{18}$$

где

$$\psi_k(y,\chi,M,N) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}\mu(m_k)\sum_{U_1<n_1\leqslant 2N_1}\cdots\sum_{\substack{U_k<n_k\leqslant 2N_k\\ m_1n_1\cdots m_kn_k\leqslant y}}\chi(m_1n_1\cdots m_kn_k),$$

где $N_j \le U_j < 2N_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Не ограничивая общности, будем считать, что $M_1 \ldots M_k N_1 \ldots N_k < y$ и y полуцелое число. От ограничения $m_1n_1 \ldots m_kn_k \leqslant y$ освобождаемся при помощи леммы 3 при $T = (xq)^{10}$:

$$\psi_k(y,\chi,M,N) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0.5-iT}^{0.5+iT}\prod_{j=1}^{k}\sum_{M_j<m_j\le 2M_j}\frac{\chi(m_j)\mu(m_j)}{m_j^s}\sum_{U_j<n_j\le 2N_j}\frac{\chi(n_j)}{n_j^s}\frac{y^s}{s}ds+$$
$$+\,O\left(\sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}m_1^{-\frac12}\cdots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}m_k^{-\frac12}\sum_{U_1<n_1\leqslant 2N_1}n_1^{-\frac12}\cdots\sum_{U_k<n_k\leqslant 2N_k}n_k^{-\frac12}\frac{y^{\frac12}}{T\left|\ln\frac{y}{m_1n_1\ldots m_kn_k}\right|}\right).$$

Далее, воспользовавшись при $m_1n_1 \ldots m_kn_k < y$ неравенством

$$\ln\frac{y}{m_1n_1\ldots m_kn_k} \geqslant \ln\frac{y}{y-0,5} = \ln\left(1+\frac{1}{2y-1}\right) > \frac{1}{2y},$$

а при $m_1n_1 \ldots m_kn_k > y$ неравенством

$$\ln\frac{m_1n_1\ldots m_kn_k}{y} \geqslant \ln\frac{y+0,5}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{2y}\right) > \frac{1}{2y},$$

получим

$$\psi_k(y,\chi,M,N) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0.5-iT}^{0.5+iT}W_k(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds + O\left(\frac{y^{\frac32}}{T}\prod_{j=1}^{k}\sum_{M_j<m_j\le 2M_j}m_j^{-\frac12}\sum_{N_j<n_j\le 2N_j}n_j^{-\frac12}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{0.5-iT}^{0.5+iT}W_k(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds + O\left(\frac{y^2}{(xq)^{10}}\right)\tilde{\ell}y^{\frac12}\int_{-T}^{T}|W_k(0.5+it,\chi)|\frac{dt}{1+|t|} + \frac{y^2}{(xq)^{10}}.$$

Подставляя полученную оценку в (18), а затем в (17), получим

$$\psi(y,\chi)\tilde{\ell}y^{\frac12}\mathscr{L}^9\sum_{k=1}^{4}\int_{-T}^{T}|W_k(0.5+it,\chi)|\frac{dt}{1+|t|} + \frac{y^2\mathscr{L}^9}{(xq)^{10}}.$$

Отсюда и из формулы (16), имеем

$$t(x,q)\tilde{\ell}x^{\frac12}\mathscr{L}^9\sum_{k=1}^{4}\max_{y\leqslant x}t_k(q;M,N) + x + \varphi(q)\mathscr{L}^2, \tag{19}$$
$$t_k(q;M,N) = \sideset{}{''}\sum_{\chi_q}\int_{-T}^{T}|W_k(0.5+it,\chi)|\frac{dt}{1+|t|}.$$

Оценим $t_k(q;M,N)$ отдельно для каждого $k=1,2,3,4$. Не ограничивая общности, будем считать, что для $t_k(q;M,N)$ выполняются следующие условия:

$$M_1 \geq M_2 \geq \ldots \geq M_k, \tag{20}$$

$$N_1 \geq N_2 \geq \ldots \geq N_k, \tag{21}$$

$$M_1 \ldots M_k N_1 \ldots N_k = Y, \quad Y \leq y, \quad M_j \leq y^{\frac{1}{4}}. \tag{22}$$

2. Оценка $t_1(q;M,N)$. Воспользовавшись вторым утверждением леммы 10, имеем

$$t_1(q;M,N)\tilde{\ell}\left((M_1q)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{1,5}\tilde{\ell}(y^{\frac{1}{8}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{1,5}\leqslant(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{1,5}.$$

3. Оценка $t_2(q;M,N)$. Применяя первое утверждение леммы 10, находим

$$t_2(q;M,N)\tilde{\ell}\left((M_1M_2q)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{6}\leqslant(y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{6}\leqslant(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L})\mathscr{L}^{6}.$$

4. Оценка $t_3(q;M,N)$. Рассмотрим три возможных случая:

1. $M_1M_2M_3 \leq Y^{\frac{2}{5}}$;
2. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3 \leq Y^{\frac{3}{5}}$;
3. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3$.

Случай 1. $M_1M_2M_3 \leq Y^{\frac{2}{5}}$. Ввиду условий (21) и (22), находим, что

$$N_1N_2 \geqslant N_1N_2\cdot\frac{N_3}{\sqrt[3]{N_1N_2N_3}}=(N_1N_2N_3)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{Y}{M_1M_2M_3}\right)^{\frac{2}{3}}\geq Y^{\frac{2}{5}}.$$

Следовательно, по первому утверждению леммы 10, имеем

$$t_3(q;M,N)\tilde{\ell}\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{12}\leqslant\left(\left(Y^{\frac{3}{5}}q\right)^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{12}\tilde{\ell}\left(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}+q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{12}.$$

Случай 2. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3 \leq Y^{\frac{3}{5}}$**.** Применяя лемму 8 при $X=8M_1M_2M_3$, имеем

$$\begin{aligned}t_3(q;M,N)\tilde{\ell}&\left(Y^{\frac{1}{2}}+(M_1M_2M_3)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+Y^{\frac{1}{2}}(M_1M_2M_3)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^8\leqslant\\ &\leq\left(Y^{\frac{1}{2}}+2Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^8\tilde{\ell}\left(y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^8.\end{aligned}$$

Случай 3. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3$**.** Из соотношений (22), (20) и условия рассматриваемого случая находим, что

$$y^{\frac{1}{2}}\geqslant M_1M_2\geqslant M_1M_2\cdot\frac{M_3}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}}=(M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}}\geq Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому, полагая в лемме 8 $X=M_1M_2$, имеем

$$\begin{aligned}t_3(q;M,N)\tilde{\ell}&\left(Y^{\frac{1}{2}}+(M_1M_2)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+Y(M_1M_2)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^9\leq\\ &\leqslant\left(Y^{\frac{1}{2}}+Y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^9\tilde{\ell}\left(y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}+q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^9.\end{aligned}$$

5. Оценка $t_4(q;M,N)$. Рассмотрим семь возможных случаев:

1. $M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{1}{5}}$;
2. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{2}{5}}$, $N_1N_2 \le Y^{\frac{2}{5}}$;
3. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{2}{5}}$; $N_1N_2 > Y^{\frac{2}{5}}$
4. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{3}{5}}$;
5. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{4}{5}}$, $M_1M_2M_3 \le Y^{\frac{3}{5}}$;
6. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{3}{5}}$, $M_1M_2M_3 > Y^{\frac{3}{5}}$;
7. $M_1M_2M_3M_4 > Y^{\frac{4}{5}}$.

Случай 1. $M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{1}{5}}$**.** Из соотношений (21), (22) и условия рассматриваемого случая, имеем

$$N_1N_2 \geqslant (N_1N_2N_3N_4)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Y}{M_1M_2M_3M_4}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому согласно первому утверждению леммы 10, имеем

$$t_4(q;M,N)\tilde{\ell}\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \leqslant \left(Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \le \left(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22}.$$

Случай 2. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{2}{5}}$; $\quad N_1N_2 \le Y^{\frac{2}{5}}$**.** Из соотношений (21), (22) и условия рассматриваемого случая, имеем

$$N_1N_2N_3 \geqslant N_1N_2N_3\frac{N_4}{\sqrt[4]{N_1N_2N_3N_4}} = (N_1N_2N_3N_4)^{\frac{3}{4}} \geqslant \left(\frac{Y}{M_1M_2M_3M_4}\right)^{\frac{3}{4}} \geqslant Y^{\frac{9}{20}} > Y^{\frac{2}{5}},$$

$$N_1N_2N_3 \leqslant N_1N_2\cdot\sqrt{N_1N_2} = (N_1N_2)^{\frac{3}{2}} \leqslant \left(Y^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = Y^{\frac{3}{5}}.$$

Поэтому, полагая в лемме 8 $X = 8N_1N_2N_3$, находим

$$t_4(q;M,N)\tilde{\ell}\left(Y^{\frac{1}{2}} + (N_1N_2N_3)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{1}{2}}(N_1N_2N_3)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16} \le$$
$$\le \left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16} \le \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16}.$$

Случай 3. $Y^{\frac{1}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{2}{5}}$; $\quad N_1N_2 > Y^{\frac{2}{5}}$**.** Применяя к сумме $t_4(q;M,N)$ первое утверждение леммы 10, получим

$$t_4(q;M,N)\tilde{\ell}\left(\left(\frac{Yq}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \leqslant \left(Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22} \le \left(y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}} + q\mathscr{L}\right)\mathscr{L}^{22}.$$

Случай 4. $Y^{\frac{2}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{3}{5}}$**.** Применяя лемму 8 при $X = 16M_1M_2M_3M_4$, имеем

$$t_4(q;N)\tilde{\ell}\left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{15} \le \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{15}.$$

Случай 5. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \le Y^{\frac{4}{5}}$; $\quad M_1M_2M_3 \le Y^{\frac{3}{5}}$**.** Из соотношений (20) и условия рассматриваемого случая, найдем

$$M_1M_2M_3 \geqslant M_1M_2M_3\frac{M_4}{\sqrt[4]{M_1N_2M_3M_4}} = (M_1M_2M_3M_4)^{\frac{3}{4}} \geqslant \left(Y^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{4}} = Y^{\frac{9}{20}} > Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 8 при $X = 8M_1M_2M_3$, находим

$$t_4(q; M, N)\tilde{\ell}\left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16} \leqslant \left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{16}.$$

Случай 6. $Y^{\frac{3}{5}} < M_1M_2M_3M_4 \leq Y^{\frac{3}{5}}$; $M_1M_2M_3 > Y^{\frac{3}{5}}$**.** Из соотношений (22), (20) и условия рассматриваемого случая, найдём

$$y^{\frac{1}{2}} \geqslant M_1M_2 \geqslant M_1M_2\frac{M_3}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}} = (M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}} > \left(Y^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = Y^{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому в лемме 8, полагая $X = 4M_1M_2$, и имея в виду, что $Y^{\frac{2}{5}}\tilde{\ell}X\tilde{\ell}y^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$t_4(q; M, N)\tilde{\ell}\left(Y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19}\tilde{\ell}\left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19}.$$

Случай 7. $M_1M_2M_3M_4 > Y^{\frac{4}{5}}$**.** Из соотношений (22), (20) и условия рассматриваемого случая, найдем

$$y^{\frac{1}{2}} \geqslant M_1M_2 \geqslant M_1M_2\frac{M_3M_4}{\sqrt{M_1M_2M_3M_4}} = (M_1M_2M_3M_4)^{\frac{1}{2}} > Y^{\frac{2}{5}}.$$

Следовательно, по лемме 8 при $X = 4M_1M_2$, и имея в виду, что $Y^{\frac{2}{5}}\tilde{\ell}X\tilde{\ell}y^{\frac{1}{2}}$, находим:

$$t_4(q; M, N)\tilde{\ell}\left(Y^{\frac{1}{2}} + Y^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + Y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19}\tilde{\ell}\left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L} + q\mathscr{L}^2\right)\mathscr{L}^{19}.$$

6. Таким образом, для всех $k = 1, 2, 3, 4$ доказано, что

$$\max_{y\leqslant x} t_k(q; M, N)\tilde{\ell}\max_{y\leqslant x}\left(y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{19} + y^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{22} + q\mathscr{L}^{23}\right) = x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{19} + x^{\frac{3}{10}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{22} + q\mathscr{L}^{23}.$$

Подставляя эти оценки в (19), получим утверждение теоремы.

5. Доказательство теоремы 2 и её следствий

Пользуясь свойством ортогональности характеров, имеем

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\bar{\chi})\psi(x, \chi) + O(\mathscr{L}^2),$$

$$\tau(\chi) = \sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{h}{q}\right), \qquad |\tau(\chi)|\tilde{\ell}\sqrt{q}.$$

Отсюда, из соотношения $q\tilde{\ell}\varphi(q)\ln\mathscr{L}$ и теоремы 1, имеем

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right)\tilde{\ell}\frac{\sqrt{q}}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\leqslant x}|\psi(y, \chi)| + \mathscr{L}^2\tilde{\ell}\frac{\ln\mathscr{L}}{\sqrt{q}}t(x; q) + \mathscr{L}^2\tilde{\ell}$$
$$\tilde{\ell}xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Для доказательства следствия 1, вводя обозначение $\alpha - \frac{a}{q} = \lambda$, рассмотрим два возможных случая:$|\lambda| \leqslant 2x^{-1}$ и $2x^{-1} < |\lambda| \leqslant q^{-2}$.

Случай 1: $|\lambda| \leqslant 2x^{-1}$. Пользуясь преобразованием Абеля, сумму $S(\alpha, x)$ выразим через сумму $S\left(\frac{a}{q}, u\right)$, $u \leqslant x$. Имеем

$$S(\alpha, x) = -\int_2^x S\left(\frac{a}{q}, u\right) 2\pi i\lambda e(u\lambda)du + e(\lambda x)S\left(\frac{a}{q}, x\right).$$

Переходя к оценкам, и воспользовавшись условием рассматриваемого случая, находим

$$|S(\alpha, x)|\tilde{\ell}(|\lambda|x + 1)\max_{u\leqslant x}\left|S\left(\frac{a}{q}, u\right)\right|\tilde{\ell}xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}.$$

Случай 2: $2x^{-1} < |\lambda| \leqslant q^{-2}$. Имеем $\frac{q^2}{x} \leq \frac{1}{2}$. Согласно теореме Дирихле о приближении вещественных чисел рациональными числами, для любого $\tau \geqslant 1$ существуют целые взаимно простые числа b и r, $1 \leqslant r \leqslant \tau$, такие что

$$\left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \leqslant \frac{1}{r\tau}.$$

Возьмем $\tau = \frac{x}{q}$, тогда

$$\left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \leqslant \frac{q}{rx}, \qquad r \leqslant \frac{x}{q}. \tag{23}$$

Предположим, что $r = q$, тогда (23) принимает вид $|\lambda| \leqslant \frac{1}{x}$ и, как в случае 1, получим для $S(\alpha, x)$ нужную оценку. Пусть теперь $r \neq q$, тогда

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right| = \frac{|ar - bq|}{rq} \geqslant \frac{1}{rq}.$$

Отсюда и из $\frac{q^2}{x} \leq \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{q^2} \geqslant |\lambda| = \left|\left(\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right) + \left(\frac{b}{r} - \alpha\right)\right| \geqslant \left|\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right| - \left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \geqslant \frac{1}{rq} - \frac{q}{rx} = \frac{1}{rq}\left(1 - \frac{q^2}{x}\right) \geqslant \frac{1}{2rq},$$

то есть $\frac{q}{r} \leqslant 2$. Поэтому (23) принимает вид:

$$\left|\alpha - \frac{b}{r}\right| \leqslant \frac{2}{x}, \qquad \frac{q}{2} < r \leqslant \frac{x}{q}.$$

Следовательно, как в случае 1, имеем

$$S(\alpha, x)\tilde{\ell}xr^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{29} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33}\tilde{\ell}xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{33} + x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{32}.$$

Следствие 2 непосредственно вытекает из следствия 1.

6. Доказательство теоремы 3

Разбивая сумму $H_2(x; p^\alpha, l)$ на три части и имея в виду, что $p^\alpha > \sqrt{x}$, имеем

$$H_2(x; p^\alpha, l) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}} \Lambda(n) \sum_{\substack{m^2\leq x,\ (m^2-l,p)=1\\ n\equiv l-m^2 \pmod{p^\alpha}}} 1 + H_1'(x; p^\alpha, l) + H_2''(x; p^\alpha, l),$$

$$H_1'(x;p^\alpha,l)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,p)>1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^2\leqslant x\\ m^2\equiv l-n \,(\mathrm{mod}\ p^\alpha)}}1\leqslant 2\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}_x^2,$$

$$H_2''(x;p^\alpha,l)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,p)=1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{x},\ m^2-l\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ p)\\ m^2-l\equiv -n\,(\mathrm{mod}\ p^\alpha)}}1=0.$$

Далее, пользуясь свойством ортогональности характеров, найдём

$$H_2(x;p^\alpha,l)=\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\chi \mathrm{mod}\ p^\alpha}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l,p^\alpha)+O\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}_x^2\right),$$

$$V_2(u,\chi,l,p^\alpha)=\sum_{m\leqslant u}\chi(l-m^2).$$

Разбивая последнюю сумму по χ на две части, находим

$$H_2(x;p^\alpha,l)=G_2(x;p^\alpha,l)+R_2(x;p^\alpha,l)+O\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}_x^2\right), \tag{24}$$

$$G_2(x;p^\alpha,l)=\frac{\psi(x,\chi_0)V_2(\sqrt{x},\chi_0,l,p^\alpha)}{\varphi(p^\alpha)},$$

$$R_2(x;p^\alpha,l)=\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l,p^\alpha).$$

В этой формуле $G_2(x;p^\alpha,l)$ даёт предполагаемый главный член $H_2(x;p^\alpha,l)$, а $R_2(x;p^\alpha,l)$ входит в его остаточный член.

Вычислим главный член. Из теоремы Ш. Валле – Пуссена получим

$$\psi(x,\chi_0)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)+O(\mathscr{L}_x^2)=x+O(x\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}_x})).$$

Рассмотрим теперь

$$V_2(\sqrt{x},\chi_0,l,p^\alpha)=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}1-\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{x}\\(m^2-l,p)=p}}1=[\sqrt{x}]-\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{x}\\ m^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p)}}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant p\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\ p)}}1=$$

$$=[\sqrt{x}]-\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant p\\ n^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p)}}\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{x}\\ m\equiv n\,(\mathrm{mod}\ p)}}1=[\sqrt{x}]-\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant p\\ n^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p)}}\left[\frac{\sqrt{x}-n}{p}\right]=$$

$$=[\sqrt{x}]-\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant p\\ n^2\equiv l\,(\mathrm{mod}\ p)}}\left(\frac{\sqrt{x}}{p}+O(1)\right)=x^{\frac12}\left(1-\frac{\rho(p,l)}{p}\right)+O(1),$$

где $\rho(p,l)$ — число решений сравнения $n^2\equiv l(\mathrm{mod}\ p)$, $1\leqslant n\leqslant p$. Поэтому

$$G_2(x;p^\alpha,l)=\frac{x^{\frac32}}{\varphi(p^\alpha)}\left(1-\frac{\rho(p,l)}{p}+O\left(\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}_x})\right)\right). \tag{25}$$

Оценим остаточный член $R_2(x;p^\alpha,l)$. Переходя к примитивным характерам, имеем

$$R_2(x;p^\alpha,l)=\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \mathrm{mod}\, p^\beta}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l,p^\beta),$$

где * означает, что суммирование ведётся по примитивным характерам. Обозначая через α_1, $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha$ такое целое число, которое удовлетворяет условию $p^{\alpha_1-1} \leqslant \mathscr{L}_x^A < p^{\alpha_1}$, а затем, разбивая сумму по β на две части $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha_1-1$ и $\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, представим $R_2(x;p^\alpha,l)$ в виде суммы двух сумм R_{21} и R_{22}. Оценим сначала R_{21}. Имеем

$$R_{21} = \frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha_1-1}\sum_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l,p^\beta)\tilde{\ell}$$

$$\tilde{\ell}\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha_1-1}\ \max{}^{*}|\psi(x,\chi)|\sum_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)|,$$

знак * в сумме по β означает, что максимум берётся по всем примитивным характерам по модулю p^β. Воспользовавшись при $p^\beta \leqslant \mathscr{L}_x^A$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha_1-1$ классической оценкой (см. [28] стр. 152)

$$\psi(x,\chi)\tilde{\ell}x\exp\left(-c_1\sqrt{\mathscr{L}_x}\right),$$

получим

$$R_{21}\tilde{\ell}\frac{x}{\varphi(p^\alpha)}\exp\left(-c_1\sqrt{\mathscr{L}_x}\right)\sum_{\beta=1}^{\alpha_1-1}\sum_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)| =$$

$$= \frac{x}{\varphi(p^\alpha)}\exp\left(-c_1\sqrt{\mathscr{L}_x}\right)\sum_{\substack{\chi \bmod p^{\alpha_1-1}\\ \chi\neq\chi_0}}|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^{\alpha_1-1})|.$$

Далее, применяя неравенство Коши, а затем воспользовавшись условием $p^{\alpha_1-1} \leqslant \mathscr{L}_x^A$, получим

$$R_{21}\tilde{\ell}\frac{x}{\varphi(p^\alpha)}\exp\left(-c_1\sqrt{\mathscr{L}_x}\right)\left(\varphi(p^{\alpha_1-1})\sum_{\chi \bmod p^{\alpha_1-1}}|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\tilde{\ell}$$

$$\tilde{\ell}\frac{x}{\varphi(p^\alpha)}\exp\left(-c_1\sqrt{\mathscr{L}_x}\right)\left(p^{\alpha_1-1}\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{p^{\alpha_1-1}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}\tilde{\ell}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)}\exp\left(-c_1\sqrt{\mathscr{L}_x}\right). \tag{26}$$

Теперь оценим R_{22}. Имеем

$$R_{22} = \frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha}\sum_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}\psi(x,\chi)V_2(\sqrt{x},\overline{\chi},l,p^\beta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha}\max_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)|\sum_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}|\psi(x,\chi)|,$$

знак * в сумме по β означает, что максимум берётся по всем примитивным характерам по модулю p^β. Воспользовавшись теоремой 1, имеем

$$R_{22}\tilde{\ell}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha}\left(x^{-0.5}\mathscr{L}_x^{28}+x^{-0.7}p^{\frac{\beta}{2}}\mathscr{L}_x^{31}+x^{-1}p^\beta\mathscr{L}_x^{32}\right)\max_{\chi \bmod p^\beta}{}^{*}|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)|. \tag{27}$$

Оценку неполных сумм $V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)$, сведём к оценке полных смешанных сумм вида

$$S(\chi,g,f,p^\beta) = \sum_{m=1}^{p^\beta}\chi(g(m))e\left(\frac{f(m)}{p^\beta}\right), \qquad g(m) = l-m^2, \quad f(m) = hm.$$

Имеем равенство

$$V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)=\frac{1}{p^\beta}\sum_{h=1}^{p^\beta}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}e\left(-\frac{hm}{p^\beta}\right)S(\chi,g,f,p^\beta)=$$

$$=\frac{S(\chi,g,0,p^\beta)}{p^\beta}\left[\sqrt{x}\right]+\frac{1}{p^\beta}\sum_{h=1}^{p^\beta-1}\frac{\sin\frac{\pi h\sqrt{x}}{p^\beta}}{\sin\frac{\pi h}{p^\beta}}e\left(-\frac{h(1+[\sqrt{x}])}{2p^\beta}\right)S(\chi,g,f,p^\beta).$$

Переходя к оценкам, найдём

$$|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)|\leqslant\frac{1}{p^\beta}\max_{1\leqslant h\leqslant p^\beta}|S(\chi,g,f,p^\beta)|\left(\sqrt{x}+2\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}\left(\sin\frac{\pi h}{p^\beta}\right)^{-1}\right).$$

Так как p^β — нечётное число, то воспользовавшись последовательно неравенствами $\sin\pi\alpha\geqslant 2\alpha$ при $0\leqslant\alpha<0.5$ и $\frac{1}{h}\leqslant\ln\frac{2h+1}{2h-1}$, найдём

$$2\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}\left(\sin\frac{\pi h}{p^\beta}\right)^{-1}\leqslant 2\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}\left(\frac{2h}{p^\beta}\right)^{-1}\leqslant p^\beta\sum_{h=1}^{0.5(p^\beta-1)}(\ln(2h+1)-\ln(2h-1))=p^\beta\ln p^\beta.$$

Следовательно,

$$|V_2(\sqrt{x},\chi,l,p^\beta)|\leqslant\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\beta}+\ln p^\beta\right)\max_{1\leqslant h\leqslant p^\beta}|S(\chi,g,f,p^\beta)|.$$

Подставляя эту оценку в формулу (27), имеем

$$R_{22}\tilde{\ell}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha}\left(\frac{\mathscr{L}_x^{28}}{x^{0.5}}+\frac{p^{\frac{\beta}{2}}\mathscr{L}_x^{31}}{x^{0.7}}+\frac{p^\beta\mathscr{L}_x^{32}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{p^\beta}+\ln p^\beta\right)\max^*_{\substack{\chi\bmod p^\beta,\\ 1\leqslant h\leqslant p^\beta}}\left|S(\chi,g,f,p^\beta)\right|,\tag{28}$$

знак * в сумме по β означает, что максимум берётся по всем примитивным характерам по модулю p^β. Далее представим сумму $S(\chi,g,f,p^\beta)$ в виде

$$S(\chi,g,f,p^\beta)=\sum_{\delta=1}^{p}S_\delta,\qquad S_\delta=S_\delta(\chi,g,f,p^\beta)=\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv\delta(\mathrm{mod}\ p)}}^{p^\beta}\chi(g(m))e\left(\frac{f(m)}{p^\beta}\right).\tag{29}$$

Пусть a — наименьший из первообразных корней по модулю p^β. Определим число r из соотношения $a^{p-1}=1+rp$, $(r,p)=1$, и пусть $c=c(\chi,a)$ единственное целое, $0<c\leqslant p^{\beta-1}(p-1)$ такое, что для всякого целого k имеет место соотношение

$$\chi(a^k)=e\left(\frac{ck}{p^{\beta-1}(p-1)}\right),$$

то есть характер χ однозначно определяется заданием чисел r и c. Так как в формуле (28) все характеры χ примитивные, то $(c,p)=1$. Пусть

$$t=t_p(\chi,g,f)=ord_p(rgf'+cg').$$

Через $\mathcal{A}(\chi,g,f)$ обозначим множества корней сравнения

$$\mathcal{C}(m):=p^{-t}(rg(m)f'(x)+cg'(m))\equiv 0\pmod p,$$

для которых слагаемые в $S(\chi, g, f, p^\beta)$ определены, то есть

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\chi, g, f) := \{\delta \in \mathbb{F}_p : \quad \mathcal{C}(\delta) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p), \quad g(\delta) \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p)\}.$$

Теперь определим множество $\mathcal{A}$ в случае, когда $g = g(m) = l - m^2$ и $f = f(m) = hm$, в зависимости относительно параметров h, c и r, и имея в виду, что

$$t_p(\chi, g, f) = ord_p(r(m^2 - l)h + 2cm) = \min(ord(rh), ord(2c), ord(lh)) = \min(ord(h), 0) = 0,$$

получим, что множество $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \{\delta \in \mathbb{F}_p : \quad r(\delta^2 - l)h + 2c\delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p), \quad \delta^2 - l \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p)\}, \tag{30}$$

то есть $\mathcal{A}$ — множество решений квадратичного сравнения по модулю p и состоит из не более чем двух решений. Рассмотрим два возможных случая.

1. Случай $(h, p) = p$. Квадратичное сравнение в (30) превращается в линейное сравнение вида $2c\delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p)$, и оно имеет одно решение $\delta = p$.

2. Случай $(h, p) = 1$. Умножая обе части сравнения в (30) на число rh, $(rh, p) = 1$ и выделяя полный квадрат, имеем

$$(rh\delta + c)^2 \equiv c^2 + lr^2h^2 \,(\mathrm{mod}\; p), \qquad 1 \leqslant \delta \leqslant p - 1.$$

По условии теоремы $-l$ — квадратичный невычет, поэтому правая часть полученного квадратичного сравнения не обращается в нуль по модулю p, то есть

$$c^2 \not\equiv -lr^2h^2 \pmod{p}.$$

Отсюда следует, что в (30) квадратичное сравнение

- не имеет решение, если число $c^2 + lr^2h^2$ — квадратичный невычет;
- имеет два простые решения, если число $c^2 + lr^2h^2$ — квадратичный вычет.

Следовательно, если квадратичное сравнение в (30) разрешимо, то все корни простые, и их не более двух. Поэтому согласно лемме 7 правая часть (29) состоит из не более двух слагаемых вида $S_\delta(\chi, g, f, p^\beta)$, соответствующих этим корням, для которых имеет место равенство

$$|S_\delta(\chi, g, f, p^\beta)| = p^{\frac{\beta}{2}}.$$

Подставляя эту оценку в формулу (28), получим

$$R_{22} \tilde{\ell} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)} \left(\sum_{\beta=\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{\mathscr{L}_x^{28}}{p^{0.5\beta}} + \frac{\mathscr{L}_x^{31}}{x^{0.2}} + \frac{p^{0.5\beta}}{x^{0.5}} \mathscr{L}_x^{32} + \frac{p^\beta}{x^{0.7}} \mathscr{L}_x^{32} + \frac{p^{1.5\beta}}{x} \mathscr{L}_x^{33} \right) \right) \tilde{\ell}$$
$$\tilde{\ell} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)} \left(\frac{\mathscr{L}_x^{28}}{p^{0.5\alpha_1}} + \frac{\mathscr{L}_x^{32}}{x^{0.3}} + \frac{p^{0.5\alpha}}{x^{0.5}} \mathscr{L}_x^{32} + \frac{p^\alpha}{x^{0.7}} \mathscr{L}_x^{32} + \frac{p^{1.5\alpha}}{x} \mathscr{L}_x^{33} \right).$$

Далее, воспользовавшись выбором числа α_1, получим

$$R_{22} \tilde{\ell} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\varphi(p^\alpha)} \left(\mathscr{L}_x^{-0.5A+28} + \frac{p^{0.5\alpha}}{x^{0.5}} \mathscr{L}^{32} + \frac{p^\alpha}{x^{0.7}} \mathscr{L}^{32} + \frac{p^{1.5\alpha}}{x} \mathscr{L}^{33} \right).$$

Отсюда, из (26) и (25) ввиду (24) следует утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Избранные труды — Ленинград. Наука, 1980.
2. Линник Ю. В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Мат.сборник, 1946, Т. 19, Вып. I, С. 3 – 8.
3. Линник Ю. В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории чисел // Докл. АН СССР, 1945, Т. 49, № 1, С. 3 – 7.
4. Линник Ю. В. О густоте нулей L – рядов // Изв. АН СССР.сер. матем.1946. Т. 10, № 1, С. 35 – 46.
5. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 — 727.
6. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел — М.: изд-во Мир, 1974.
7. Vaughan R. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.
8. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 – 224.
9. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.
10. Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 – 282.
11. Виноградов И. М. Избранные труды — М: изд-во АН СССР. 1952.
12. Чудаков Н. Г. On Goldbach-Vinogradov‘s theorem // Annals of Mathematics. Second Series. 1947. Т. 48. С. 515 – 545.
13. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле // Москва – Ленинград. 1947. гос.изд-во технико-теоретической литературы. 204 с.
14. Hardy G. H., Littlwood I. E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of number as a sum of primes // Acta Math. 1923. V. 44. pp. 1–70.
15. Hardy G. H., Wright E. M. An introduction to theory of numbers — Oxford at the clarendon press. 1954.
16. Бабаев Г. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН. 1958. Т. 13. В. 6(84). С. 63 – 64.
17. Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.
18. Weil A. On Some Exponential Sums // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1948. vol. 34, Is. 5, pp. 204 — 207. doi: 10.1073/pnas.34.5.204.
19. Cochrane T. Exponential sums modulo prime powers // Acta Arithmetica. 2002. vol. 101. pp. 131 – 149. doi:10.4064/aa101-2-5

20. Исмоилов Д. Оценка суммы характеров от многочленов // Доклады АН Тадж. ССР. 1986. Т. 29. № 10. С. 567 – 571.

21. Исмоилов Д. Оценка суммы характеров от рациональных функций // Доклады АН Тадж. ССР. 1986. Т. 29. № 11. С. 635 – 639.

22. Исмоилов Д. Об оценках снизу сумм характеров о т многочленов по составному модулю // Доклады АН Тадж. ССР. 1990. Т. 33. № 8. С. 501 – 505.

23. Исмоилов Д. Оценки полных сумм характеров от многочленов // Труды МИАН. 1991. Т. 200. С. 171 – 186.1

24. Ismoilov D. A lower bound estimate for complete sums of characters of polynomials and rational functions // Acta Math. Sinica, New Series. 1993. Vol. 9. pp. 90-99.

25. Исмоилов Д. Оценки полных тригонометрических сумм // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 153 -– 171.

26. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Известия АН СССР. Серия математическая. 1955. Т. 19. № 1. С. 11 — 16.

27. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391 – 393.

28. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

29. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.

30. Heath-Brown D. R. Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity // Canad. J. Math. 34, 1982, 1365 – 1377.

REFERENCES

1. Linnik, U. V., 1980, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Leningrad, Nauka.

2. Linnik, U. V., 1946, “A new proof of the Goldbach–Vinogradow theorem”, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 19(61), Is. 1, pp. 3–8.

3. Linnik, U. V., 1945, “On the possibility of a unique method in certain problems of ’additive’ and ’distributive’ prime number theory”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 49, Is. 1, pp. 3–7.

4. Linnik, U. V., 1946, “On the density of the zeros of L-series”, *Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR]*, vol. 10, Is. 1, pp. 35–46.

5. Karatsuba A. A., 1970, “The distribution of products of shifted prime numbers in arithmetic progressions”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 192, Is. 4, pp. 724–727.

6. Montgomery, H., 1971, *Topics in Multiplicative Number Theory*, vol. 227. Springer-Verlag, Berlin-New York.

7. Vaughan, R. O., 1975, “Mean value theorems in prime number theory”, *J.London Math. Soc.*, vol. s2-10, Is. 2, pp. 153-162, https://doi.org/10.1112/jlms/s2-10.2.153

8. Rakhmonov, Z. Kh., 1990, “The distribution of Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 34, Is. 1, pp. 213-228, http://dx.doi.org/10.1070/IM1990v034n01ABEH000621.

9. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64. doi.org/10.1070 /IM1994v043n01ABEH001558.

10. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Mean values of the Chebyshev function”, *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, vol. 48, Is. 1, pp. 85-87. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/search/?an=Zbl 0818.11030

11. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow.

12. Tchudakoff N., 1947, “On Goldbach-Vinogradov‘s theorem”, *Annals of Mathematics. Second Series*, vol. 1947, pp. 515-545.

13. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of Dirichlet L-functions*, OGIZ, Moscow–Leningrad.

14. Hardy G.H., &, Littlwood I.E., 1923, “Some problems of partitio numerorum III. On the expression of number as a sum of primes”, *Acta Math.*, vol. 44, pp. 1-70.

15. Hardy, G. H., & Wright, E. M., 1954, *An introduction to theory of numbers*, 3rd ed. Oxford, at the Clarendon Press.

16. Babaev, G., 1958, “Remark on a paper of Davenport and Heilbronn”, *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 13, Is. 6(84), pp. 63–64.

17. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 263–272.

18. Weil, A., 1948, “On Some Exponential Sums”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 34, Is. 5, pp. 204 — 207. doi: 10.1073/pnas.34.5.204.

19. Cochrane, T. 2002, “Exponential sums modulo prime powers”, *Acta Arithmetica*, vol. 101. pp. 131 – 149. doi:10.4064/aa101-2-5.

20. Ismoilov D, 1986, “Estimate of a character sum of polynomials”, *Dokl. Acad. Nauk Tadjhik SSR*, vol. 29, no 10, pp. 567-571. (Russian).

21. Ismoilov D., 1986, “Estimate of a character sum of rational functions”, *Dokl. Acad. Nauk Tadjhik SSR*, vol. 29, no 11, pp. 635-639. (Russian).

22. Ismoilov D., 1990, “Lower bounds on character sums of polynomials with respect to a composite modulus”, *Dokl. Acad. Nauk Tadzhik SSR*, vol. 33, no 8, pp. 501-505. (Russian).

23. Ismoilov D., 1991, “Estimates of complete character sums of polynomials”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 200, pp. 171-186, (Russian); English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 200 (1993), 189-203.

24. Ismoilov D., 1993, “A lower bound estimate for complete sums of characters of polynomials and rational functions”, *Acta Math. Sinica, New Series*, vol. 9, pp. 90-99.

25. Ismoilov D., 1991, “Estimates for complete trigonometric sums”, *Number Theory and Analysis, Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 207, pp. 153-171, (Russian); English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 207 (1995), 137-153.

26. Postnikov A. G., 1955, "On a character sum modulo a prime power of a prime", *Izv. Acad. Nauk SSR, ser. Mathem.*, vol. 19, no 1, pp. 11 – 16. (Russian)

27. Mardjhanashvili K. K., "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, Is. 7, pp. 391–393.

28. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

29. Prachar K., 1957, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag.

30. Heath-Brown D. R., 1982, "Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity", *Canad. J. Math.*, vol. 34, pp. 1365-1377.

Получено 6.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.