ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 514.853+517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-185-197

Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности[1]

С. С. Николаенко

Николаенко Станислав Сергеевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: nikostas@mail.ru

Аннотация

Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы рассматривается задача описания топологии слоения Лиувилля в 3-мерной некомпактной инвариантной окрестности особого слоя. При этом все особенности системы предполагаются невырожденными. В случае, когда все слои компактны, эта задача решена: известная теорема А. Т. Фоменко утверждает, что любая невырожденная 3-мерная особенность (3-атом) представляет собой S^1-расслоение специального вида (расслоение Зейферта) над двумерной особенностью (2-атомом). Тем самым задача топологической классификации 3-атомов сводится к существенно более простому вопросу классификации 2-атомов (т. е. особенностей слоений, задаваемых функциями Морса на двумерных поверхностях). Последний вопрос хорошо изучен в рамках теории А. Т. Фоменко топологической классификации интегрируемых систем.

В некомпактном случае запас всех 3-атомов становится существенно шире. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением только таких 3-атомов, которые удовлетворяют следующим условиям: полнота гамильтоновых потоков, порождаемых первыми интегралами системы, конечность числа орбит гамильтонова действия группы $\mathbb{R}^2$ на особом слое и существование среди них нестягиваемой орбиты. При этих условиях мы доказываем существование на 3-атоме гамильтонова локально свободного S^1-действия, сохраняющего слои слоения Лиувилля. В качестве следствия мы получаем некомпактный аналог теоремы А. Т. Фоменко и тем самым сводим задачу классификации некомпактных 3-атомов, удовлетворяющих перечисленным условиям, к аналогичной классификационной задаче для некомпактных 2-атомов, решённой нами ранее.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, некомпактный атом, действие окружности, расслоение Зейферта, гамильтоново действие.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

С. С. Николаенко Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 185–197.

[1]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01303).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 514.853+517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-185-197

Topological classification of non-compact 3-atoms with a circle action

S. S. Nikolaenko

Nikolaenko Stanislav Sergeevich — Lomonosov Moscow State University; Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: nikostas@mail.ru

Abstract

For integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom we investigate the topology of the Liouville foliation in a 3-dimensional non-compact invariant neighborhood of a singular leaf. All the singularities of the system are supposed to be non-degenerate. In the case when all the leaves of the Liouville foliation are compact, this problem is already solved: the well-known A. T. Fomenko theorem states that any non-degenerate 3-dimensional singularity (3-atom) is an S^1-fibration of the special type (Seifert fibration) over a 2-dimensional singularity (2-atom). Thus, the problem of the topological classification of 3-atoms is reduced to the significantly more simple classification problem for 2-atoms (i. e. singularities of foliations determined by Morse functions on 2-surfaces). The latter problem is well-studied in the framework of the Fomenko classification theory for integrable systems.

In the non-compact case, the set of all 3-atoms becomes much richer. That is why we consider only 3-atoms satisfying the following conditions: completeness of the Hamiltonian flows generated by the first integrals of the system, finiteness of the number of orbits of the Hamiltonian $\mathbb{R}^2$-action on the singular leaf, and existence among these orbits of a non-contractible one. Under these restrictions, we proof that the 3-atom admits a Hamiltonian locally free S^1-action preserving the leaves of the Liouville foliation. As a corollary, we obtain the analogue of the Fomenko theorem and thus reduce the classification problem for non-compact 3-atoms satisfying the above conditions to the similar classification problem for non-compact 2-atoms that we solved earlier.

Keywords: integrable Hamiltonian system, non-compact atom, circle action, Seifert fibration, Hamiltonian action.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
S. S. Nikolaenko, 2021, "Topological classification of non-compact 3-atoms with a circle action", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 185–197.

1. Введение

Задача, решаемая в настоящей работе, возникла в контексте исследования топологии слоений Лиувилля интегрируемых систем с некомпактными слоями. Известно, что с каждой вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой естественным образом связано лагранжево слоение с особенностями, называемое слоением Лиувилля. В типичном случае это слоение является инвариантом системы, т. е. не зависит от выбора первых интегралов.

Исследование топологии слоения Лиувилля позволяет понять многие качественные характеристики интегрируемой системы (устойчивость особых траекторий, смену различных режимов движения и др.)

А. Т. Фоменко и его школой была построена теория топологической классификации невырожденных интегрирумых систем с двумя степенями свободы. Обзор основных результатов этой теории можно найти в монографии [1]. Однако эта теория существенно использует компактность слоёв лиувиллева слоения. В то же время в различных задачах геометрии и механики часто возникают системы с некомпактными слоями [2], в частности, в различных задачах динамики твёрдого тела [3, 4] и их обобщёниях [5, 6], в теории математического биллиарда [7] и т.д. Для таких систем общей классификационной теории не существует. Среди работ, посвящённых исследованию топологии лиувиллевых слоений с некомпактными слоями, отметим [8] (в окрестности неособого слоя, для полных потоков), [9, 10] (в окрестности неособого слоя, для неполных потоков), [11] (в окрестности особого слоя, для систем с одной степенью свободы).

В настоящей работе даётся описание топологии слоения Лиувилля в некомпактной 3-мерной окрестности особого слоя для интегрируемых систем с двумя степенями свободы при наличии следующих дополнительных условий: полноты гамильтоновых потоков, конечности числа орбит гамильтонова действия, задаваемого первыми интегралами, на особом слое и нестягиваемости хотя бы одной из таких орбит (теорема 2). При этих условиях устанавливается взаимно-однозначное соответствие между 3-мерными особенностями (3-атомами) и 2-мерными (2-атомами). В компактном случае аналогичный результат доказан А. Т. Фоменко (см. [12], [1, теоремы 3.2, 3.3, 3.4], а также [13, 14]). Таким образом, задача классификации 3-мерных особенностей рассматриваемого типа сводится к существенно более простой классификационной задаче для 2-мерных особенностей, решённой в [11]. В основе этого результата лежит существование послойного гамильтонова действия окружности в окрестности особого слоя (теорема 1). Более подробно о торических действиях в теории интегируемых систем см. в [15, 16, 17, 18].

2. Основные понятия и результаты

На протяжении всей работы мы будем рассматривать только интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Поэтому напомним соответствующие определения для этого случая. Более подробно см. в [1].

Определение 1. *(Гладкой) гамильтоновой системой с двумя степенями свободы называется тройка (M^4, ω, H), где:*

- *M^4 – 4-мерное симплектическое многообразие (возможно, некомпактное) с симплектической формой ω;*
- *$H \in C^\infty(M^4)$ – функция Гамильтона (гамильтониан), порождающая гамильтоново векторное поле $X_H = \omega^{-1} dH$.*

Определение 2. *Гамильтонова система с двумя степенями свободы (M^4, ω, H) называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если она обладает первым интегралом F, таким, что*

- *F функционально независим с H (т. е. дифференциалы dH, dF линейно независимы почти всюду на M^4);*
- *потоки гамильтоновых полей X_H, X_F полны (т. е. параметр на их интегральных траекториях определён на всей числовой оси).*

Благодаря полноте гамильтоновых потоков на M^4 (а также на любом инвариантном подмногообразии) определено гладкое гамильтоново действие $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}\, M^4$ сдвигами вдоль интегральных траекторий векторных полей X_H, X_F. Орбиты этого действия могут быть 2-мерными, 1-мерными или 0-мерными. В любом случае они диффеоморфны факторпространству $\mathbb{R}^n$, где $n = 0, 1$ или 2, по некоторой дискретной подгруппе (стабилизатору произвольного элемента орбиты). Следовательно, с точностью до диффеоморфизма бывают следующие типы орбит:

- 2-мерные: тор T^2, цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$, плоскость $\mathbb{R}^2$;
- 1-мерные: окружность S^1, прямая $\mathbb{R}$;
- 0-мерная: одна точка.

В компактном случае слоением Лиувилля, отвечающим данной интегрируемой системе, называется разбиение фазового пространства на связные компоненты совместных множеств уровня первых интегралов. Но в некомпактном случае нужно быть аккуратнее, так как при таком подходе пространство слоёв может оказаться нехаусдорфовым. Обобщая понятие слоя, данное в [11] для систем с одной степенью свободы, дадим следующее определение.

Определение 3. *Две связные компоненты L и L' множества уровня $\{H = h, F = f\} \subset M^4$ назовём эквивалентными, если найдётся последовательность связных компонент $L_1 = L, L_2, \ldots, L_n = L'$ того же множества, такая, что любые две соседние компоненты L_i и L_{i+1} не имеют непересекающихся инвариантных (относительно действия α) окрестностей в M^4. Слоем слоения Лиувилля, отвечающего данной интегрируемой системе, назовём объединение всех компонент связности множества $\{H = h, F = f\}$ из одного класса эквивалентности.*

Рассмотрим ограничение интегрируемой системы на изоэнергетическое подмногообразие $Q^3_h = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$. Далее будем предполагать выполнение следующих условий:

1) подмногообразие Q^3_h регулярно, т. е. $dH|_x \neq 0$ для любой точки $x \in Q^3_h$;

2) интеграл F – функция Ботта на Q^3_h, т. е. множество критических точек функции $F|_{Q^3_h}$ представляет собой несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий $S_1, \ldots, S_k$ (невырожденность S_i означает, что $F|_{Q^3_h}$ – функция Морса на трансверсали в Q^3_h к любой точке $x \in S_i$);

3) каждое критическое подмногообразие S_i диффеоморфно окружности S^1.

Замечание 1. *На самом деле для дальнейшего вместо изоэнергетического подмногообразия можно рассматривать произвольное инвариантное трёхмерное подмногообразие в M^4. Иными словами, вместо функций H, F можно взять две любые независимые функции из алгебры коммутирующих первых интегралов данной системы.*

Определение 4. *Слой C слоения Лиувилля на Q^3_h назовём особым, или бифуркационным, если в любой его инвариантной окрестности $U(C) \subset Q^3_h$ слоение Лиувилля не является тривиальным. 3-атомом назовём связную инвариантную окрестность особого слоя, не содержащую других особых слоёв.*

Легко видеть, что каждый неособый слой слоения Лиувилля представляет собой некоторую орбиту действия α, а особый слой состоит из одной или нескольких орбит этого действия.

Чтобы в дальнейшем избежать эффектов, связанных с накоплением особенностей, ограничимся рассмотрением “хорошего” класса 3-атомов.

Определение 5. *3-атом назовём атомом конечного типа, если его особый слой состоит из конечного числа орбит действия α.*

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть (M^4, ω, H) – вполне интегрируемая система с дополнительным интегралом F, Q^3 – связное регулярное изоэнергетическое многообразие, F – функция Ботта на Q^3, причём все критические подмногообразия одномерны. Пусть $V \subset Q^3$ – некомпактный атом конечного типа, удовлетворяющий S^1-условию:*
бифуркационный слой содержит хотя бы одну нестягиваемую орбиту, т. е. диффеоморфную S^1 или $S^1 \times \mathbb{R}$.

Тогда на атоме V определено гладкое гамильтоново локально свободное S^1-действие, сохраняющее слои слоения Лиувилля. При этом стабилизаторы могут быть нетривиальны лишь для конечного числа орбит, и в этом случае они изоморфны группе $\mathbb{Z}_2$.

Замечание 2. *Под гамильтоновостью S^1-действия на атоме V мы на самом деле подразумеваем, что это действие можно продолжить до гамильтонова S^1-действия на некоторой 4-мерной окрестности $U(V)$ атома V в M^4. Действительно, в силу регулярности изоэнергетического многообразия Q^3 окрестность $U(V)$ можно считать прямым произведением атома V на отрезок I, параметризованный значением гамильтониана H. Описываемая ниже конструкция действия на атоме V тривиальным образом распространяется на его окрестность $U(V)$.*

Теорема 2. *Пусть V – некомпактный атом конечного типа, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Тогда на атоме V можно задать структуру расслоения Зейферта, согласованного со слоением Лиувилля, с особыми слоями типа $(2,1)$. Базой этого расслоения является некомпактный 2-атом со звёздочками или без. При этом проекция 3-атома на базу расслоения Зейферта устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством некомпактных 3-атомов конечного типа, удовлетворяющих S^1-условию, и множеством некомпактных 2-атомов конечного типа со звёздочками или без.*

Поясним некоторые определения из формулировки последней теоремы. Понятие *2-атома* вводится совершенно аналогично понятию 3-атома, только вместо 3-мерного многообразия Q^3_h нужно взять произвольное ориентируемое 2-мерное многообразие, а вместо интеграла F – какую-то функцию Морса g на этом многообразии. 2-атом называется *2-атомом конечного типа*, если дополнение к множеству критических точек функции g в особом слое атома состоит из конечного числа связных компонент. Если теперь отметить на особом слое 2-атома некоторое количество точек (“звёздочек”), отличных от критических точек функции g, то получится определение *2-атома со звёздочками.*

Расслоением Зейферта называется специальный тип S^1-расслоения 3-мерного многообразия, которое в окрестности каждого слоя либо тривиально, либо “скручено” относительно данного слоя. Слой называется *особым типа* (α, β), если в его окрестности слоение получается следующим образом: берётся цилиндр $D^2 \times I$, тривиально расслоенный на отрезки вида $\{*\} \times I$, а затем его основания склеиваются по диффеоморфизму, являющемуся поворотом на угол $2\pi\beta/\alpha$. В частности, для особого слоя типа $(2,1)$ этот диффеоморфизм является центральной симметрией. Более подробно о расслоениях Зейферта см., например, в [19].

3. Основная часть доказательства теоремы 1

В этом разделе мы докажем все утверждения теоремы 1, кроме гамильтоновости S^1-действия, которое будет выведено из теоремы 2 в разделе 5.

Шаг 1. Граф инцидентности атома.

Пусть V – данный некомпактный 3-атом, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Можно считать, что он задаётся неравенствами $-\varepsilon \leqslant F \leqslant \varepsilon$, и $C = \{F = 0\}$ – его особый слой. Представим атом V в виде стратифицированного многообразия со стратами размерностей 1, 2 и 3. 1-стратами назовём одномерные орбиты действия α, т. е. одномерные критические подмногообразия (они все содержатся в особом слое C). 2-мерными стратами назовём двумерные орбиты действия α, содержащиеся в особом слое C. 3-мерными стратами будем считать связные компоненты множества $V \setminus C$ (т. е. однопараметрические семейства регулярных слоёв слоения Лиувилля). Корректность такого подхода оправдывается следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть L и N – некоторые страты атома V, причём $\bar{L} \cap N \neq \emptyset$. Тогда $N \subset \bar{L}$.*

Доказательство. Заметим, что условие $\bar{L} \cap N \neq \emptyset$ выполнено в точности тогда, когда $\dim L > \dim N$. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть, как устроено слоение Лиувилля в окрестности каждой точки атома V. Отсюда следует, что N – одномерный или двумерный страт.

Пусть $x \in \bar{L} \cap N$. Тогда найдётся такая последовательность точек $\{x_n\} \subset L$, что $x_n \to x$. Пусть $y \in N$ – какая-то другая точка страта N. Поскольку страт N одномерен или двумерен, он является орбитой действия α. Значит, найдутся такие $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, что $y = \alpha_{t_1,t_2}(x)$. Но тогда последовательность $\{\alpha_{t_1,t_2}(x_n)\} \subset L$ сходится к y, т. е. $y \in \bar{L}$. □

Определение 6. *Два страта L и N назовём инцидентными, если $N \subset \bar{L}$ или $L \subset \bar{N}$.*

Определим теперь *граф инцидентности* атома V. Вершинами этого графа объявим страты атома V. Две вершины соединим ребром, если соответствующие страты инцидентны.

Лемма 2. *Граф инцидентности атома V связен.*

Доказательство. Предположим противное: граф инцидентности есть несвязное объединение двух подграфов Γ_1, Γ_2. Пусть V_1 и V_2 – объединения стратов, соответствующих вершинам подграфов Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда $V = V_1 \sqcup V_2$, причём множества V_1 и V_2 открыты в относительной топологии атома V. Получаем противоречие со связностью атома V. □

Шаг 2. Существование S^1-действия.

S^1-условие означает, что действие окружности можно определить на некоторой орбите особого слоя атома V. Нужно доказать, что это действие можно “распространить” на весь атом.

Покажем, что на атоме V существуют такие нетривиальные гладкие функции $t_1(x), t_2(x)$, что для любой точки $x \in V$ имеет место равенство $\alpha_{t_1(x),t_2(x)}(x) = x$.Тогда искомое действие $\beta \colon S^1 \to \mathrm{Diff}(V)$ можно будет задать формулой $\beta_\tau(x) = \alpha_{\tau t_1(x),\tau t_2(x)}(x)$, $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Заметим, что из коммутирования гамильтоновых полей X_H, X_F будет следовать постоянство функций $t_1(x), t_2(x)$ на каждой орбите действия α.

Пусть $\mathfrak{O}$ – орбита особого слоя, диффеоморфная S^1 или $S^1 \times \mathbb{R}$. Стабилизатор любого её элемента изоморфен группе $\mathbb{Z}$, поэтому найдутся числа $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $\alpha_{t_1,t_2}(x) = x$ для всех $x \in \mathfrak{O}$ (в качестве (t_1, t_2) нужно взять порождающий элемент стабилизатора как подгруппы в $\mathbb{R}^2$). Тем самым функции $t_1(x), t_2(x)$ уже определены на орбите $\mathfrak{O}$ (и постоянны на ней).

Докажем, что функции $t_1(x), t_2(x)$ можно по непрерывности продлить на любой страт L атома V. На одном страте, а именно на $\mathfrak{O}$, они уже определены. В силу леммы 1 существует такая последовательность стратов $L_1 = \mathfrak{O}, L_2, \dots, L_n = L$, что страты L_i и L_{i+1} $(k = 1, \dots, n-1)$ инцидентны. Поэтому достаточно доказать, что если функции $t_1(x), t_2(x)$ определены на некотором страте L_i, то их можно определить и на произвольном страте L_{i+1}, инцидентном L_i. Рассмотрим возможные случаи в зависимости от размерностей стратов L_i и L_{i+1}.

Случай 1. $\dim L_i = 2$, $\dim L_{i+1} = 3$.
Введём в окрестности произвольной точки $x_0 \in L_i$ локальную систему координат (u, v, f), где f – значение интеграла F, определяющее слой слоения Лиувилля, а (u, v) – координаты в слое. Уравнение $\alpha_{t_1,t_2}(x) = x$, записанное в координатах (u, v, f), даёт систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} \alpha^1_{t_1,t_2}(u, v, f) = u, \\ \alpha^2_{t_1,t_2}(u, v, f) = v, \\ \alpha^3_{t_1,t_2}(u, v, f) = f, \end{cases} \tag{1}$$

причём третье уравнение выполнено автоматически в силу инвариантности слоёв относительно действия α (здесь $(\alpha^1_{t_1,t_2}, \alpha^2_{t_1,t_2}, \alpha^3_{t_1,t_2})$ – координатное представление отображения α_{t_1,t_2}). Поскольку $\dfrac{\partial \alpha_{t_1,t_2}}{\partial t_1} = X_H$, $\dfrac{\partial \alpha_{t_1,t_2}}{\partial t_2} = X_F$, а векторы X_H и X_F неколлинеарны в точке x_0, то первые два уравнения системы (1) единственным образом задают в окрестности точки x_0 гладкие неявные функции $t_1 = t_1(u, v, f)$, $t_2 = t_2(u, v, f)$. Как уже было замечено, эти функции не зависят от координат u, v, а зависят только от слоя лиувиллева слоения. Таким образом, мы определили функции $t_1(x), t_2(x)$ на всех слоях, имеющих непустое пересечение с некоторой окрестностью точки x_0, в частности, на слоях страта L_{i+1}. Уменьшая при необходимости параметр ε, задающий "толщину" атома, можно считать, что функции $t_1(x), t_2(x)$ теперь определены на всём страте L_{i+1}.

Случай 2. $\dim L_i = 2$, $\dim L_{i+1} = 1$.
В этом случае функции $t_1(x), t_2(x)$ тривиально продолжаются на L_{i+1}.

Случай 3. $\dim L_i = 1$, $\dim L_{i+1} = 2$ *или* 3.
В этом случае L_i – особая одномерная замкнутая орбита. Если она имеет эллиптический тип, то некоторая её инвариантная окрестность диффеоморфна расслоенному полноторию, т. е. представляет собой самостоятельный компактный атом. Поэтому в условиях теоремы 1 такая ситуация невозможна, и орбита L_i имеет гиперболический тип.

Рассмотрим сначала случай, когда $i = 1$, то есть L_i – "отправной" 1-мерный страт. Он инцидентен четырём двумерным стратам $L^2_{(1)}, L^2_{(2)}, L^2_{(3)}, L^2_{(4)}$ и четырём трёхмерным стратам $L^3_{(1)}, L^3_{(2)}, L^3_{(3)}, L^3_{(4)}$ (некоторые из них могут совпадать). Несложно видеть, что стабилизаторы точек двумерных стратов $L^2_{(k)}$ нетривиальны. Рассмотрим 2-страт $L^2_{(1)}$. Как и в случае 1, можно определить функции $t_1(x), t_2(x)$ сначала на нём, а затем и на инцидентных ему 3-стратах (пусть это будут страты $L^3_{(1)}$ и $L^3_{(4)}$). Рассмотрим 3-страт $L^3_{(1)}$. Функции $t_1(x), t_2(x)$ фактически зависят только от значения f интеграла F, и потому имеют конечные пределы при $f \to 0$, равные значениям на страте $L^2_{(1)}$. Следовательно, их можно по непрерывности доопределить теми же значениями на 2-страте $L^2_{(2)}$, инцидентном $L^3_{(1)}$. Таким образом, функции $t_1(x), t_2(x)$ продолжаются на все страты $L^2_{(k)}$, $L^3_{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, инцидентные 1-страту $L_i = L_1$, а следовательно и на сам страт L_i. Корректность такого продолжения гарантируется тем, что $t_1(x), t_2(x)$ принимают одни и те же значения при $f = 0$ (т. е. на стратах особого слоя атома).

В случае, когда $i > 1$, снова рассмотрим страты $L^2_{(k)}$, $L^3_{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, инцидентные 1-страту L_i, и выберем среди них тот, который первым встречается в последовательности $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Пусть это будет страт L_j, $j < i$. Тогда, стартуя со страта L_j, как и в случае $i = 1$, можно определить функции $t_1(x), t_2(x)$ всех стратах $L^2_{(k)}$, $L^3_{(k)}$ и на самом страте L_i.

Таким образом, мы показали, что функции $t_1(x), t_2(x)$ можно определить на всех стратах, инцидентных 1-страту L_i.

Случай 4. $\dim L_i = 3$, $\dim L_{i+1} = 1$ *или* 2.
Как и в предыдущем случае, доопределяем функции $t_1(x), t_2(x)$ их предельными значениями при $f \to 0$ (последние существуют в силу того, как функции $t_1(x), t_2(x)$ определялись на 3-страте L_i).

Шаг 3. Корректность задания S^1-действия.

Убедимся в том, что определение функций $t_1(x), t_2(x)$ не зависит от выбора последовательности стратов, соединяющей страты $\mathfrak{O}$ и L. Но это очевидным образом следует из того, что на особом слое атома (т. е. на всех одномерных и двумерных стратах) функции $t_1(x), t_2(x)$ принимают одно и то же значение.

Шаг 4. Гладкость S^1-действия.

Локально $t_1(x)$ и $t_2(x)$ являются функциями значения f интеграла F, причём, как было показано выше, эта зависимость гладкая. Гладкость функций $t_1(x)$ и $t_2(x)$ влечёт гладкость построенного S^1-действия.

Таким образом, все утверждения теоремы 1, за исключением гамильтоновости S^1-действия, доказаны. Отметим, что нетривиальные стабилизаторы имеют в точности орбиты, являющиеся критическими окружностями с неориентируемой сепаратрисной диаграммой.

4. Доказательство теоремы 2

Первое утверждение теоремы 2 является топологической переформулировкой теоремы 1. Слоями расслоения Зейферта будут орбиты S^1-действия, существование которого доказано в теореме 1. Особыми слоями типа $(2, 1)$ будут орбиты с нетривиальными стабилизаторами (изоморфными $\mathbb{Z}_2$).

Докажем существование "двулистного сечения" атома V, т. е. гладкой двумерной поверхности $\tilde{P} \subset V$, трансверсальной слоям расслоения Зейферта и пересекающей каждый неособый слой дважды, а каждый особый слой – один раз. Построим сначала "засечки" этого сечения. В окрестности каждой критической окружности с неориентируемой сепаратрисной диаграммой построим сечение, трансверсальное слоям расслоения Зейферта. В случае критической окружности с ориентируемой сепаратрисной диаграммой построим два таких сечения. Также на особом слое атома в каждом 2-страте, не имеющем инцидентных 1-стратов, возьмём какой-нибудь S^1-слой и построим в его окрестности два трансверсальных сечения. Несложно показать, что построенные "засечки" можно гладким образом соединить, получив тем самым искомую поверхность $\tilde{P}$.

На поверхности $\tilde{P}$ определена инволюция σ, сопоставляющая каждой её точке, лежащей на каком-то S^1-слое, вторую точку пересечения с этим слоем (точки особых слоёв остаются на месте). Интеграл F инвариантен относительно инволюции σ и задаёт на факторпространстве $P = \tilde{P}/\sigma$ структуру 2-атома. Звёздочки при этом соответствуют особым слоям.

Доказательство того, что по данному 2-атому однозначно восстанавливается 3-атом со структурой расслоения Зейферта, повторяет доказательство аналогичного утверждения для компактного случая (см. теорему 3.4 в [1]).

5. Завершение доказательства теоремы 1 (гамильтоновость S^1-действия)

Для доказательства гамильтоновости S^1-действия, построенного при доказательстве теоремы 1, достаточно доказать точность симлектической формы ω. Действительно, если $\omega = d\alpha$, то соответствующую функцию Гамильтона можно определить по формуле

$$G(x) = \int\limits_{\gamma(x)} \alpha,$$

где $\gamma(x)$ – орбита S^1-действия, проходящая через точку x. При этом если $\gamma(x)$ – особая орбита (с нетривиальным стабилизатором), то её нужно обойти дважды, т. е. умножить соответствующий интеграл на два.

Для доказательства точности формы ω воспользуемся уже доказанной теоремой 2. Пусть P – некомпактный 2-атом, отвечающий 3-атому V (т. е. являющийся базой расслоения Зейферта). Пусть $\pi\colon V \to P$ – соответствующая проекция. Согласно теореме классификации некомпактных 2-атомов [11, теорема 4.1], 2-атом P послойно гомеоморфен склейке конечного числа элементарных поверхностей трёх типов (рис. 1):

- компактный крест с 4-мя концами: $\{z \in \mathbb{C}\colon -\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(z^2) \leqslant \varepsilon,\, |z| \leqslant 1\}$;
- проколотый крест с $2n$ концами ($n \in \mathbb{N}$): $\{z \in \mathbb{C}\colon -\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(z^n) \leqslant \varepsilon,\, 0 < |z| \leqslant 1\}$;
- полукрест с n концами ($n \in \mathbb{N}$): $\{z \in \mathbb{C}\colon -\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(z^n) \leqslant \varepsilon,\, |z| \leqslant 1 \; \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Слоение на каждой из этих поверхностей задаётся функцией $\mathrm{Re}(z^n)$ (для компактного креста $n = 2$). Комплексную переменную z будем называть канонической.

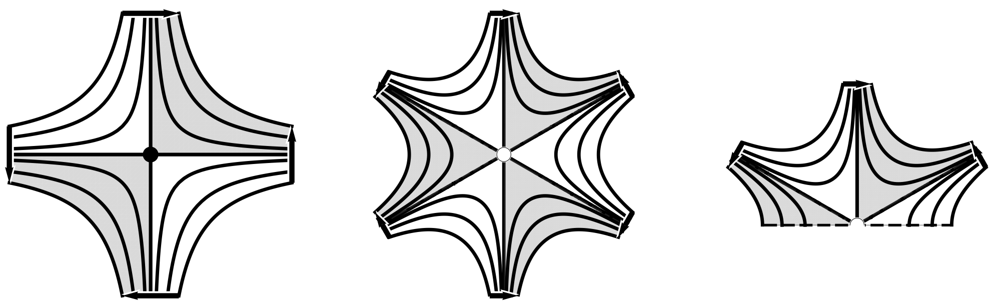

Рис. 1: Компактный крест (слева), проколотый крест (в центре) и полукрест (справа)

Рассмотрим особый слой $\tilde{C}$ 2-атома P. Зафиксируем достаточно малое $\delta > 0$. Для каждого проколотого креста или полукреста, составляющего атом P, удалим из особого слоя $\tilde{C}$ точки, удовлетворяющие неравенству $|z| < \delta$ в канонической переменной, а точки, в которых $|z| = \delta$, соединим дугами γ_k окружности $|z| = \delta$ (рис. 2). В результате получим некоторый одномерный комплекс $\tilde{L}$, вложенный в 2-атом P. Несложно видеть, что двумерный комплекс $L = \pi^{-1}(\tilde{L})$ является деформационным ретрактом 3-атома V. Поэтому для доказательства точности симплектической формы ω на атоме V достаточно доказать, что она точна на L.

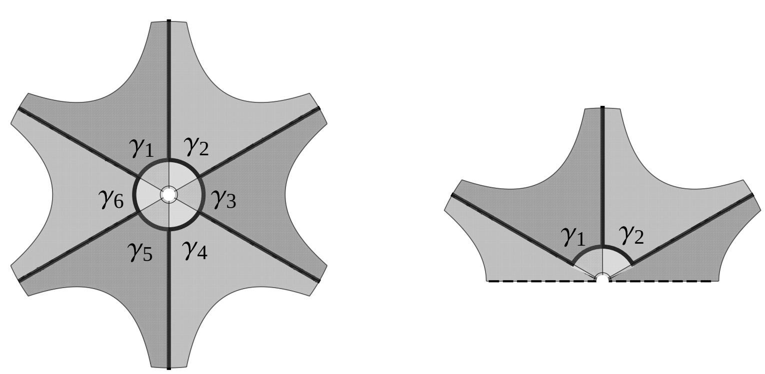

Рис. 2: Комплекс $\tilde{L}$

Комплекс L состоит из части особого слоя $C = \pi^{-1}(\tilde{C})$ атома V и поднятий кривых γ_k на атом V. Докажем, что для любого проколотого креста или полукреста и для любой содержащейся в нём кривой γ_k $\int\limits_{\pi^{-1}(\gamma_k)} \omega = 0$. Вместе с тем что форма ω обнуляется на особом слое C (как на лагранжевом подмногообразии), это будет означать, что интеграл от формы ω по любому двумерному циклу комплекса L равен нулю и, следовательно, ω точна на L.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ рассмотрим в 2-атоме P область D_ε, ограниченную кривой γ_k и слоем $\{\mathrm{Re}(z^n) = \varepsilon\}$, где z – каноническая координата соответствующего проколотого креста или полукреста. Положим $l_\varepsilon = \partial D_\varepsilon \cap \gamma_k$, $\mu_\varepsilon = \partial D_\varepsilon \cap \{\mathrm{Re}(z^n) = \varepsilon\}$ (рис. 3). Тогда $\partial(\pi^{-1}(D_\varepsilon)) = \pi^{-1}(l_\varepsilon) \cup \pi^{-1}(\mu_\varepsilon)$, и по формуле Стокса

$$\int\limits_{\pi^{-1}(l_\varepsilon)} \omega + \int\limits_{\pi^{-1}(\mu_\varepsilon)} \omega = \int\limits_{\pi^{-1}(D_\varepsilon)} d\omega = 0.$$

Но $\pi^{-1}(\mu_\varepsilon)$ – лагранжево подмногообразие (как часть слоя лиувиллева слоения), поэтому $\omega|_{\pi^{-1}(\mu_\varepsilon)} = 0$. Следовательно, $\int\limits_{\pi^{-1}(l_\varepsilon)} \omega = 0$. При $\varepsilon \to 0$ из этого равенства получаем $\int\limits_{\pi^{-1}(\gamma_k)} \omega = 0$, что завершает доказательство.

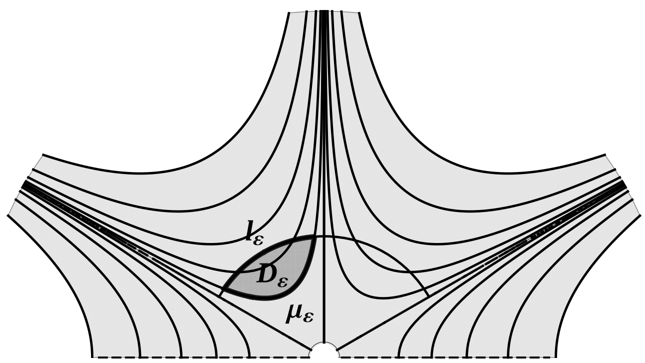

Рис. 3: Область D_ε

6. Заключение

Итак, в настоящей работе получена классификация некомпактных трёхмерных особенностей (3-атомов) интегрируемых систем с двумя степенями свободы при выполнении трёх существенных условий:

1) полнота гамильтоновых потоков полей X_H, X_F;

2) существование нестягиваемой орбиты гамильтонова действия α на особом слое атома (S^1-условие);

3) невырожденность особенностей.

Отказ от любого из этих условий ставит новую классификационную задачу.

При отказе от первого условия задача в общей постановке представляется бессмысленной. Действительно, можно рассмотреть произвольную интегрируемую систему на некотором компактном многообразии и удалить из её фазового пространства произвольное подмножество. Запас систем с неполными потоками, которые могут получиться в результате такой операции, настолько велик, что вряд ли подлежит разумному описанию. Поэтому в случае неполных потоков естественно рассматривать задачу классификации 3-атомов при каких-либо дополнительных ограничениях (см., например, [9]) либо для какого-то конкретного класса систем.

При отказе от второго условия все орбиты действия α на особом слое 3-атома диффеоморфны плоскости $\mathbb{R}^2$ либо прямой $\mathbb{R}$. Естественный класс таких 3-атомов образуют прямые произведения вида $P\times\mathbb{R}$, где P – некоторый 2-атом. Однако можно показать, что такими примерами запас всех 3-атомов без S^1-условия не исчерпывается, что делает соответствующую классификационную задачу ещё интереснее.

Автор благодарит проф. Е. А. Кудрявцеву за неоценимую помощь и поддержку в процессе написания статьи, а также всех участников семинаров "Современные геометричские методы", "Алгебра и топология интегрируемых систем" за внимание к работе и полезные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999. 444 с., 447 с.

2. Федосеев Д. А., Фоменко А. Т. Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Том 21, №6. С. 217-243.

3. Новиков Д. В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли e(3) // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 127–160.

4. Nikolaenko S. S. Topological classification of the Goryachev Integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, №6. P. 1050-1060.

5. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces // Russ. J. Math. Phys. 2016. Vol. 23, №4. P. 431–454.

6. Кибкало В. А. Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2020. №6. С. 56-59.

7. Ведюшкина (Фокичева) В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Том 81, №4. С. 20-67.

8. Fiorani E., Giachetta G., Sardanashvily G. The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds // J. Phys. A. 2003. Vol. 36, №7. P. 101-107.

9. Кудрявцева Е. А. Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // Докл. РАН. 2012. Том 445, №4. С. 383-385.

10. Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А. Топология слоений и теорема Лиувилля для интегрируемых систем с неполными потоками // Тр. сем. по векторному и тензорному анализу. 2011. №27. С. 106-149.

11. Николаенко С. С. Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. Том 211, №8. С. 68-101.

12. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Том 22, №4. С. 38–51.

13. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. Том 287, №5. С. 1071-1075.

14. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Том 50, №6. С. 1276–1307.

15. Kudryavtseva E. A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // European Journal of Mathematics. 2021. https://doi.org/10.1007/s40879-021-00501-9 (published 25 October 2021). 63 p.

16. Bau T., Zung N. T. Singularities of integrable and near-integrable Hamiltonian systems // J. Nonlinear Sci. 1997. Vol. 7, №1. P. 1-7.

17. Zung N. T. A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems // Comment. Math. Helv. 2000. Vol. 75, №2. P. 271-283.

18. Kudryavtseva E. A., Martynchuk N. N. Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26, №6. P. 732-741.

19. Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии. М.: изд-во МГУ, 1991. 304 с.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, "Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification", *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 730 p.

2. Fedoseev, D. A. & Fomenko, A. T. 2020, "Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems", *J. Math. Sci.*, vol. 248, pp. 810-827.

3. Novikov, D. V. 2011, "Topological features of the Sokolov integrable case on the Lie algebra e(3)", *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 749–781.

4. Nikolaenko, S. S. 2017, "Topological classification of the Goryachev Integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, no. 6, pp. 1050-1060.

5. Borisov, A. V. & Mamaev, I. S. 2016, "Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces", *Russ. J. Math. Phys.*, vol. 23, no. 4, pp. 431–454.

6. Kibkalo, V. A. 2020, "Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 75, no. 6, pp. 263-267.

7. Vedyushkina (Fokicheva), V. V. & Fomenko, A. T. 2017, "Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems", *Izv. Math.*, vol. 81, no. 4, pp. 688-733.

8. Fiorani, E., Giachetta, G. & Sardanashvily, G. 2003, "The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds" *J. Phys. A*, vol. 36, no. 7, pp. 101-107.

9. Kudryavtseva, E. A. 2012, "An analogue of the Liouville theorem for integrable Hamiltonian systems with incomplete flows", *Dokl. Math.*, vol. 86, no. 1, pp. 527-529.

10. Kudryavtseva, E. A. & Lepskii, T. A. 2011, "Topology of foliations and Liouville theorem for integrable systems with incomplete flows", *Trudy Sem. Vect. Tens. Anal.*, no. 27, pp. 106-149. (In Russian).

11. Nikolaenko, S. S. 2020, "Topological classification of Hamiltonian systems on two-dimensional noncompact manifolds", *Sb. Math.*, vol. 211, no. 8, pp. 1127-1158.

12. Fomenko, A. T. 1988, "Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems", *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

13. Fomenko, A. T. 1986, "Morse theory of integrable Hamiltonian systems", *Soviet Math. Dokl.*, vol. 33, no. 2, pp. 502-506.

14. Fomenko, A. T. 1987, "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability", *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629–658.

15. Kudryavtseva, E. A. 2021, "Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems", *European Journal of Mathematics*, https://doi.org/10.1007/s40879-021-00501-9 (published 25 October 2021), 63 p.

16. Bau, T. & Zung, N. T. 1997, "Singularities of integrable and near-integrable Hamiltonian systems", *J. Nonlinear Sci.*, vol. 7, no. 1, pp. 1-7.

17. Zung, N. T. 2000, "A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems", *Comment. Math. Helv.*, vol. 75, no. 2, pp. 271-283.

18. Kudryavtseva, E. A. & Martynchuk, N. N. 2021, "Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori", *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 26, no. 6, pp. 732-741.

19. Fomenko, A. T. & Matveev, S. V. 1997, "Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds", *Mathematics and Its Applications*, vol. 425, *Springer Science+Business Media, Dordrecht*, 337 p.

Получено 26.08.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.