

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-172-184

Обобщенное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами¹

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).*e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru***Яремко Олег Эммануилович** — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).*e-mail: yaremki8@gmail.com***Яремко Наталья Николаевна** — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).*e-mail: yaremki@yandex.ru***Аннотация**

Развивается теория операционного исчисления Лапласа на основе дифференциального оператора с кусочно-постоянными коэффициентами. Предложена формула обобщенного преобразования Лапласа. Доказана формула обращения типа Меллина–Лапласа. Предложено понятие обобщенного оригинала и обобщенного изображения. Доказана теорема об изоморфизме пространств оригиналов и обобщенных оригиналов. При помощи операторов преобразования установлено, что обобщенное изображение обобщенного оригинала совпадает с изображением соответствующего оригинала. Доказаны теоремы о дифференцировании и интегрировании обобщенного оригинала, теоремы об однородности, о подобии, экспоненциальном шкалировании, запаздывания и другие. В терминах оператора преобразования установлена связь свертки обобщенных оригиналов и соответствующей им свертки оригиналов. Представлен алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Найдено решение уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом при производной по времени на действительной оси. Решена смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом при производной по времени на действительной полуоси.

Ключевые слова: обобщенное интегральное преобразование Лапласа, оператор преобразования, обобщенный оригинал, формула обращения Меллина–Лапласа.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко Обобщенное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 172–184.

¹Эта работа была поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта 07-2020-0034.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-172-184

Generalized Laplace Transform Based on the Differentiation Operator With Piecewise Constant Coefficients

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).*e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru***Yaremko Oleg Emmanuilovich** — Moscow State Technical University «Stankin» (Moscow).*e-mail: yareмки8@gmail.com***Yaremko Natalya Nikolaevna** — National Research Technological University «MISiS» (Moscow).*e-mail: yareмки@yandex.ru***Abstract**

The theory of operational calculus is developed on the basis of a differential operator with piecewise constant coefficients. A formula for the generalized Laplace transform is proposed. An inversion formula of Mellin-Laplace type is proved. The concept of a generalized original-function and a generalized image is proposed. A theorem on the isomorphism of the spaces of originals and generalized originals is proved. Using transmutation operators, it is established that the generalized Laplace transform of the generalized original coincides with the Laplace transform of the corresponding original-function. Theorems on differentiation and integration of the generalized original, theorems on homogeneity, similarity, exponential scaling, first and second shifting theorems, and others are proved. In terms of the transmutation operator, a connection between the convolution of generalized original-functions and the corresponding convolution of original-functions is established. An algorithm for solving linear differential equations with piecewise constant coefficients is presented. A solution to the heat equation with a piecewise constant coefficient at the time derivative on the real axis is found. A mixed boundary value problem for the heat equation with a piecewise constant coefficient at the time derivative on the real semiaxis is solved.

Keywords: generalized integral Laplace transform, transmutation operator, generalized original-function, Mellin-Laplace inversion formula

Bibliography: 19 titles.

For citation:

A. I. Nizhnikov, O.E. Yaremko, N.N. Yaremko, 2021, "Generalized Laplace Transform Based on the Differentiation Operator With Piecewise Constant Coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 172–184.

1. Введение

Обобщение операционного исчисления оператора $D = \frac{d}{dt}$ рассмотрено в работах [1, 4-6, 8-12, 18]. Рассмотрим дифференциальный оператор с кусочно-постоянными коэффициентами, связанный с набором точек $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_0 = 0$

$$D_t = \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt},$$

где $x = x(t)$ кусочно-линейная функция вида

$$\begin{aligned} x(t) = & a_1 t (H(t - t_0) - H(t - t_1)) + (a_2(t - t_1) + a_1 \Delta t_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\ & + (a_3(t - t_2) + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\ & \dots + (a_{n+1}(t - t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1) H(t - t_n), \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, t_0 = 0, \end{aligned}$$

а производная $x'(t)$ определена формулой

$$\begin{aligned} x'(t) = & a_1 (H(t - t_0) - H(t - t_1)) + a_2 (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\ & + a_3 (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \dots + a_{n+1} H(t - t_n). \end{aligned}$$

Функция $H(x)$ это функция Хевисайда [2] (единичная ступенчатая функция),

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Оператор D_t возникает при моделировании переходных процессов [7]. Воспользуемся методом операторов преобразования [3, 15-17, 19] для разработки операционного исчисления на основе оператора D_t . Приведем основные понятия, связанные с преобразованием Лапласа. Пусть функция $\tilde{f}(t)$ действительной переменной t является оригиналом для преобразования Лапласа, тогда преобразованием Лапласа $\tilde{L}$ функции $\tilde{f}(t)$ называется функция комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$, такая что:

$$F(s) = \tilde{L}[\tilde{f}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \tilde{f}(t) dt.$$

Оператор $\tilde{L} : \tilde{f}(t) \rightarrow F(s)$ называют преобразованием Лапласа. Функцию $F(s)$ называют изображением Лапласа функции $\tilde{f}(t)$. Связь между оригиналом и изображением принято обозначать следующим образом: $\tilde{f}(t) \doteq F(s)$ и $F(s) \doteq \tilde{f}(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть функция $\tilde{f}$ есть оригинал. Оператор $J : \tilde{f} \rightarrow f$ действующий по правилу $f(t) = \tilde{f}(x(t))$ назовем оператором преобразования, а функцию $f(t)$ обобщенным оригиналом.

Непосредственно проверяется справедливость следующего утверждения. Функция $t = t(x)$, обратная к функции $x(t)$, имеет вид

$$\begin{aligned} t(x) = & \frac{x}{a_1} (H(x) - H(x - a_1 \Delta t_1)) + \\ & + \left(\frac{x - a_1 \Delta t_1}{a_2} + t_2 \right) (H(x - a_1 \Delta t_1) - H(x - a_1 \Delta t_1 - a_2 \Delta t_2)) + \dots \\ & + \left(\frac{x - a_1 \Delta t_1 - \dots - a_n \Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n \right) H(x - a_1 \Delta t_1 - \dots - a_n \Delta t_n), \\ & \Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \dots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(t)$ — обобщенный оригинал, тогда оператор J^{-1} , обратный к оператору преобразованию $J : f \rightarrow \tilde{f}$, действует по правилу $\tilde{f}(x) = f(t(x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция $f(t)$ — обобщенный оригинал, тогда ее изображение Лапласа определим по правилу:

$$F(s) = \tilde{L}[\tilde{f}(t)]$$

Оператор $L : f(t) \rightarrow F(s)$ называют обобщенным преобразованием Лапласа. Из определений 1, 2 следует

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенное преобразование Лапласа есть произведение преобразования Лапласа и оператора преобразования*

$$L = \tilde{L} \cdot J^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Для обобщенного преобразования Лапласа справедлива формула*

$$L[f(t)] \equiv F(p) = \int_0^\infty e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt, \quad (1)$$

где $x'(t)$ кусочно-постоянная функция вида

$$x'(t) = a_1 (H(t - t_0) - H(t - t_1)) + a_2 (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\ + a_3 (H(t - t_2) - H(t - t_3)) + \dots + a_{n+1} H(t - t_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 2 имеем

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-px} \tilde{f}(x) dx.$$

В приведенном интеграле выполним замену переменного $x = x(t)$. Тогда получим

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-px(t)} \tilde{f}(x(t)) x'(t) dt.$$

Наконец, представим формулы для обобщенного преобразования Лапласа в развернутом виде.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $f(t)$ обобщенная функция-оригинал, тогда обобщенное изображение Лапласа вычисляется по формуле*

$$F(p) = a_1 \int_0^{t_1} e^{-a_1 p t} f(t) dt + a_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1 \Delta t_1)} f(t) dt + \\ + a_3 \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2 \Delta t_2+a_1 \Delta t_1)} f(t) dt + \dots \\ + a_{n+1} \int_{t_n}^\infty e^{-p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n \Delta t_n+\dots+a_1 \Delta t_1)} f(t) dt.$$

Приведем формулу обращения типа Римана-Меллина для обобщенного преобразования Лапласа.

ТЕОРЕМА 4. *Если $f(t)$ обобщенный оригинал, то интеграл (1) сходится всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. При этом сходимость равномерная в любой области $\operatorname{Re} p \geq s > s_0$. Функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Обратное обобщенное преобразование Лапласа $L^{-1} : F(p) \rightarrow f(t)$ действует по правилу*

$$L^{-1}[F(p)] \equiv f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px(t)} F(p) dp.$$

На основании теоремы 4 и определения функции $x = x(t)$ представим формулу обращения в развернутом виде

СЛЕДСТВИЕ 2. *Формула обращения Римана–Меллина для обобщенного преобразования Лапласа*

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pta_1} F(p) dp, 0 \leq t \leq t_1, \\ f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)} F(p) dp, t_1 \leq t \leq t_2, \\ &\dots \\ f_{n+1}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\dots+a_1\Delta t_1)} F(p) dp, t_n \leq t. \end{aligned}$$

1.1. Изображения кусочно-элементарных функций

Представленные ниже примеры вычисления обобщенных изображений конструировались заменой переменного $t \rightarrow x(t)$ с помощью оператора преобразования.

Пример 1. Пусть $f(t) = H(t)$, тогда

$$L[H(t)] = \int_0^\infty e^{-px(t)} x'(t) dt = \frac{1}{p}.$$

Пример 2. Пусть $f(t) = x(t)H(t)$, тогда имеем

$$L[x(t)H(t)] = \frac{1}{p^2}.$$

В самом деле

$$L[x(t)H(t)] = \int_0^\infty e^{-px(t)} x(t) dx(t) = \frac{1}{p^2}.$$

Пример 3. Пусть $f(t) = x^n(t)H(t)$, тогда выполняется равенство

$$L[x^n(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Пример 4. Пусть $f(t) = e^{\alpha x(t)} H(t)$, тогда

$$L[f(t)] = \frac{1}{p - \alpha}.$$

2. Свойства обобщенного преобразования Лапласа

Однородность. Пусть α действительное число, тогда

$$L[\alpha f(t)] = \alpha L[f(t)].$$

Теорема о подобии. Пусть α положительное действительное число, тогда

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

где $F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ — обобщенная функция-изображение для преобразования Лапласа с точками деления $t_k = \alpha t_k$ функции $f(t)$.

Экспоненциальное шкалирование. Для каждого действительного числа α выполнено тождество

$$L[e^{-\alpha x(t)} f(t)] = F(p + \alpha).$$

Доказательство следует из теоремы 3.

Дифференцирование изображения. Пусть $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, тогда

$$L[x(t)f(t)] = -F'(p). \quad (2)$$

Доказательство. Дифференцируя под знаком интеграла в формуле (1), получим

$$F'(p) = - \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) x(t) f(t) dt.$$

Пусть $f(t)$ – обобщенный оригинал, тогда функцию $f(x^{-1}(x(t) - \alpha))$ будем называть обобщенным сдвигом на величину α .

Теорема запаздывания. Пусть α действительное положительное число, тогда

$$L[f(x^{-1}(x(t) - \alpha))] = e^{-\alpha p} L[f(t)].$$

Дифференцирование оригинала. Пусть функции $D_t[f(t)]$ и $f(t)$ – оригиналы и пусть функция $f(t)$ непрерывна справа в точке $t_0 = 0$, тогда

$$L[D_t(f)] = pF(p) - f(0).$$

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям. Согласно определению оператора D_t имеем

$$\begin{aligned} L[D_t(f)](p) &= \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) D_t f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-px(t)} f'(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-px(t)} f'(t) dt = -e^{-px(0)} f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Интегрирование оригинала. Если функция $f(t)$ обобщенный оригинал, то функция

$$g(t) = \int_0^t x'(t) f(z) dz -$$

также оригинал, при этом выполнено тождество

$$L[g(t)] = \frac{1}{p} F(p).$$

Доказательство. По построению выполняется равенство $D_t[g(t)] = f(t)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$pL[g(t)] = F(p).$$

Утверждение доказано.

Связь операторов дифференцирования D_t и $\frac{d}{dt}$. Пусть D_t – обобщенный оператор дифференцирования а $\frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, тогда выполнено $D_t = J \frac{d}{dt}$.

Доказательство. Пусть $f(t)$ – обобщенный оригинал, а $\tilde{f}(t)$ – оригинал, тогда имеем

$$D_t[f(t)] = D_t[\tilde{f}(x(t))] = \tilde{f}'(x(t)) = J \cdot \frac{d}{dt}[f(t)].$$

3. Свертка обобщенных оригиналов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Сверткой функций оригиналов $f(t), g(t)$ назовем функцию*

$$f(t) * g(t) = L^{-1}[F(p)G(p)].$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функции $f(t), g(t)$ – обобщенные оригиналы. Свертка функций $f(t) * g(t)$ определяется интегралами*

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x^{-1}(x(t) - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau$$

или

$$f(t) * g(t) = J \left[\int_0^t \tilde{f}(z) \tilde{g}(t-z) dz \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения свертки следует равенство

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^\infty e^{-px(t)} x'(t) \int_0^t f(x^{-1}(x(t) - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau dt.$$

Во внешнем интеграле проведем замену переменного $x(t) = \beta$

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^\infty e^{-p\beta} \int_0^t f(x^{-1}(\beta - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau d\beta.$$

Во внутреннем интеграле выполним замену переменного $x(\tau) = \sigma$

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^\infty e^{-p\beta} \int_0^{x^{-1}(\sigma)} f(x^{-1}(\beta - \sigma)) g(x^{-1}(\sigma)) d\sigma d\beta.$$

Применим теорему о свертке для преобразования Лапласа [2] :

$$L[f(t) * g(t)] = \tilde{L}[f(x^{-1}(\sigma))] \tilde{L}[g(x^{-1}(\sigma))] = L[f(t)] L[g(t)].$$

Для доказательства второй части утверждения теоремы установим, что изображения правой и левой частей во второй формуле из теоремы 5 одинаковы. В самом деле из определения свертки следует равенство

$$L[f(t) * g(t)] = F(p)G(p).$$

С другой стороны, получим

$$L \cdot J [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = \tilde{L} [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = F(p)G(p).$$

Перепишем правую часть доказываемой формулы в виде

$$\int_a^t \tilde{f}((x(t) - x(\tau))) \tilde{g}(x(\tau)) x'(\tau) d\tau.$$

После выполнения замены переменного $\tau = x^{-1}(z)$ мы получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{x(t)} \tilde{f}((x(t) - z)) \tilde{g}(z) dz &= J \left[\int_0^t \tilde{f}((t - z)) \tilde{g}(z) dz \right] = \\ &= J [\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = f(t) * g(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если функции $f(t), g(t)$ — обобщенные оригиналы, то их свертка вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= a_1 \int_0^t f(\tau) \tilde{g}(a_1 t - a_1 \tau) d\tau, 0 < t < t_1, \\ f(t) * g(t) &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \tilde{g}(a_2(t - t_1) + a_1(t_1 - \tau)) d\tau + \\ &\quad + a_2 \int_{t_1}^t f(\tau) \tilde{g}(a_2(t - \tau)) d\tau, t_1 < t < t_2, \\ &\quad \dots \\ f(t) * g(t) &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \tilde{g}(a_{n+1}(t - t_n) + a_n(t_n - t_{n-1}) + \dots + a_1(t_1 - \tau)) d\tau + \\ &\quad + a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \tilde{g}(a_{n+1}(t - t_n) + a_n(t_n - t_{n-1}) + \dots + a_2(t_2 - \tau)) d\tau + \dots + \\ &\quad + a_{n+1} \int_{t_2}^t f(\tau) \tilde{g}(a_{n+1}(t - \tau)) d\tau, t_n < t. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 5 выпишем формулу для свертки:

$$f(t) * g(t) = J \left[\int_0^t \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau \right] = \int_0^{x(t)} \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(x(t) - \tau) d\tau.$$

Проведем замену переменного в последнем интеграле $\tau = x(z)$. В результате получим

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(z) \tilde{g}(x(t) - x(z)) x'(z) dz.$$

Формула доказана.

4. Решение дифференциальных уравнений методом обобщенного преобразования Лапласа

Вначале рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения
Пример 5. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} D_t y + \alpha y = x(t), & 0 < t, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Перейдем к обобщенным изображениям Лапласа

$$pY + \alpha Y - y_0 = \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда находим решение в изображениях

$$Y = \frac{y_0}{p + \alpha} + \frac{1}{p^2(p + \alpha)}.$$

После преобразования получим

$$Y = \frac{y_0}{p + \alpha} - \frac{1}{\alpha^2 p} + \frac{1}{\alpha p^2} + \frac{1}{\alpha^2(p + \alpha)}.$$

Из значений обобщенных изображений в примерах 1, 2, 4, возвращаясь к оригиналам, получим

$$y = y_0 e^{-\alpha x(t)} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} x(t) + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha x(t)}.$$

5. Обобщенное преобразование Лапласа для уравнений математической физики

5.1. Уравнение теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами

Задача Коши. В качестве приложения рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$D_t u - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, z \in R, t > 0, \quad (3)$$

$$u(z, 0) = f(z), z \in R. \quad (4)$$

Дополним условия (3)-(4) условием непрерывности решения в моменты $t = t_k, k = 1, 2, \dots, n$.

$$\lim_{t \rightarrow t_k - 0} u(t, z) = \lim_{t \rightarrow t_k + 0} u(t, z)$$

В задаче (3)-(4) перейдем к изображениям Фурье [2]. Получим

$$D_t U - \lambda^2 U = 0, t > 0, \quad (5)$$

$$U(\lambda, 0) = F(\lambda), \lambda \in R. \quad (6)$$

В изображениях Фурье решение задачи Коши (5)-(6) имеет вид

$$U = F(\lambda) e^{-\lambda^2 x(t)}$$

Вернемся к оригиналам. Получим формулу для решения задачи (3)-(4)

$$u(t, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x(t)}} \int_R \exp\left(-\frac{(z - \zeta)^2}{4x(t)}\right) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

5.2. Смешанная краевая задача Коши

Рассмотрим смешанную краевую задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$D_t u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x > 0, t > 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = 0, x > 0, \quad (8)$$

$$u(0, t) = f(t), t > 0. \quad (9)$$

Дополним условия (7)-(9) условием непрерывности решения в моменты $t = t_k, k = 1, 2, \dots, n$.

$$\lim_{t \rightarrow t_k - 0} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow t_k + 0} u(t, x)$$

Применим оператор преобразования J для решения задачи (7)-(9). В изображениях получим модельную смешанную краевую задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0, x > 0, t > 0,$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0, x > 0$$

$$\tilde{u}(0, t) = \tilde{f}(t), t > 0$$

Решение приведенной модельной задачи находится по формуле [2]

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tilde{f}(\tau) d\tau$$

В результате действия обратного оператора преобразования J^{-1} получаем формулу

$$u(t, x) = \int_0^{x(t)} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(x(t)-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(x(t)-\tau)}} \tilde{f}(\tau) d\tau$$

Выполним замену переменного $\tau = x(y)$ в интеграле в правой части последней формулы. Учитывая, что $f(y) = \tilde{f}(x(y))$, получим

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(x(t)-x(y))}}}{2\sqrt{\pi(x(t)-x(y))}} f(y) x'(y) dy.$$

6. Заключение

Создана теория обобщенного интегрального преобразования Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказан изоморфизм пространства функций-оригиналов и пространства обобщенных функций-оригиналов. Установлено, что пространства изображений и обобщенных изображений совпадают. В результате многие факты обобщенного операционного исчисления автоматически выводятся из классической теории. Вместе с тем, понятие обобщенной свертки оказалось невозможным ввести без помощи оператора преобразования. Оператор преобразования оказался полезным для решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом при производной по временной переменной. Есть основания считать, что аналогичным образом можно разработать операционное исчисление для дифференциальных операторов с кусочно-постоянными коэффициентами порядков выше первого. Таким образом, станет возможным решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами высших порядков. Обобщенное операционное исчисления может быть полезным при моделировании переходных процессов в электрических цепях. На основе понятия свертки обобщенных оригиналов по образцу из [13, 14] можно будет разработать интегральное и дифференциальное исчисление дробного порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайкина С.М. Обобщение интегрального преобразования Лапласа и его приложения для решения некоторых интегральных уравнений. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, т. 1. 34, с. 19-24, 2014.
2. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: Наука, 1980. — 336 с.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987 — 688 с.
4. Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщённое двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных. Прикладная математика и Физика. 52(4): 239–245, 2020, DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

5. Brychkov Yu. A. , Prudnikov A. P. , Shishov V. S. Operational calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 16, VINITI, Moscow, 1979, 99–148; J. Soviet Math., 15:6 , pp. 733–765, 1981.
6. Ermolova, N.Y., Tirkkonen, O. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on. pp. 2938-2944 Jun, 2014.
7. Jeffreys H. and Jeffreys B., Methods of Mathematical Physics , 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.
8. Ganzha, E.I. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38, 150–155, 2012.
9. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. Ain Shams Engineering Journal; Vol. 10 Issue 4, pp. 841-845, 2019.
10. Jarad Fahd , Abdeljawad Thabet. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. Results in Nonlinear Analysis, Vol 1, Iss 2, Pp 88-98, 2018.
11. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. Axioms, Vol 8, Iss 3, p 87, 2019.
12. M.M. Meerschaert, J. Mortensen, S.W. Wheatcraft. Fractional Vector Calculus for Fractional Advection-Dispersion, Physica A, 367, pp. 181-190, 2006.
13. Mainardi, F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity . Imperial College Press: London, UK, 2010, p. 347.
14. Miller, K.S.; Ross, B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons, Inc.: New York, NY, USA, 1993; p.366.
15. Napalkov, V. V., Mullabaeva, A. U. On one class of differential operators and their application. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 288 pp.142-155, 2015.
16. M. M. Rashidi. The modified differential transforms method for solving MHD boundary-layer equations Comput. Phys. Commun., 180 , pp. 2210-2217, 2009.
17. Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, Singular and Fractional. Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Elsevier, 2020.
18. Tsarev, S.P. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC 2005. pp. 325–331. ACM Press, 2005.
19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, P.447-466, 2020.

REFERENCES

1. Zaikina Svetlana M., 2014, Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematičeskie Nauki, Vol 1. 34, pp. 19-24.

2. Romanovsky P. I., 1980, Fourier series. Field theory. Analytical and special functions. Laplace transformations. Moscow: Nauka, p. 336.
3. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Yverdon et al. (Eds.), Gordon and Breach, New York.
4. Yaremko O. E., Yaremko N. N., 2020, Generalized double Laplace transform and its applications for solving partial differential equations. Applied Mathematics and Physics. 52(4): 239–245, DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.
5. Brychkov Yu. A. , Prudnikov A. P. , Shishov V. S., 1979, 1981, Operational calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 16, VINITI, Moscow, 99–148; J. Soviet Math., 15:6 , pp. 733–765.
6. Ermolova, N.Y., Tirkkonen, O., 2014, Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on.pp. 2938-2944 June.
7. Jeffreys H., Jeffreys B., 1956, Methods of Mathematical Physics , 3rd ed., Cambridge Univ. Press.
8. Ganzha, E.I., 2012, On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38, 150–155.
9. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C., 2019, Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. Ain Shams Engineering Journal; Vol. 10 Issue 4, pp. 841-845.
10. Jarad Fahd, Abdeljawad Thabet., 2018, A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. Results in Nonlinear Analysis, Vol 1, Iss 2, pp 88-98.
11. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K., 2019, On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. Axioms, Vol 8, Iss 3, p 87.
12. M.M. Meerschaert, J. Mortensen, S.W. Wheatcraft., 2006, Fractional Vector Calculus for Fractional Advection-Dispersion, Physica A, 367, pp. 181-190.
13. Mainardi, F., 2010, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity . Imperial College Press: London, UK, p. 347.
14. Miller, K.S.; Ross, B., 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons, Inc.: New York, NY, USA; p.366.
15. Napalkov, V. V., Mullabaeva, A. U., 2015, On one class of differential operators and their application. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 288 pp.142-155.
16. M.M. Rashidi., 2009, The modified differential transforms method for solving MHD boundary-layer equations Comput. Phys. Commun., 180 , pp. 2210-2217.
17. Shishkina E. L., Sitnik S. M., 2020, Transmutations, Singular and Fractional. Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Elsevier.
18. Tsarev, S.P., 2005, Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC 2005. pp. 325–331. ACM Press.

19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia, 2020, Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, P.447-466.

Получено 4.09.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.