ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-161-171

Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций

А. Д. Манов

Манов Анатолий Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, Донецкий национальный университет (г. Донецк).

e-mail: manov.ad@ro.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается экстремальная задача, связанная с множеством непрерывных положительно определённых функций на $\mathbb{R}$, носитель которых содержится в отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, а значение в нуле фиксировано (класс $\mathfrak{F}_\sigma$).

Мы рассматриваем следующую задачу. Пусть μ — линейный локально ограниченный функционал на множестве финитных непрерывных функций $C_c(\mathbb{R})$, принимающий вещественные значения на множествах $\mathfrak{F}_\sigma$, $\sigma > 0$. При фиксированном $\sigma > 0$ требуется найти следующие величины:

$$M(\mu, \sigma) := \sup \{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}, \quad m(\mu, \sigma) := \inf \{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}.$$

Нами получено общее решение данной задачи для линейных функционалов следующего вида $\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, где $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \rho(-x)$ для п. в. $x \in \mathbb{R}$. Если $\rho(x) \equiv 1$, то величина $M(\mu, \sigma)$ была найдена Зигелем в 1935 году и независимо Боасом и Кацом в 1945 году. В данной работе найдены явные решения рассматриваемой задачи в следующих случаях: $\rho(x) = ix$, $\rho(x) = x^2$ и $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Кроме того, в данной работе изучается связь между рассматриваемой задачей и точечными неравенствами для производных целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, сужения на $\mathbb{R}$ которых принадлежат $L_1(\mathbb{R})$. В частности, получены точные неравенства для первой и второй производных таких функций.

Ключевые слова: положительно определённые функции, экстремальные задачи, теорема Бохнера, преобразование Фурье, целые функции экспоненциального типа.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

А. Д. Манов. Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 161–171.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-161-171

On an extremal problem for positive definite functions

A. D. Manov

Manov Anatoliy Dmitrievich — candidate of physical and mathematical sciences, Donetsk National University (Donetsk).

e-mail: manov.ad@ro.ru

Abstract

In this paper we consider an extremal problem related to a set of continuous positive definite functions on $\mathbb{R}$ whose support is contained in the closed interval $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$ and the value at the origin is fixed (the class $\mathfrak{F}_\sigma$).

We consider the following problem. Let μ be a linear locally bounded functional on the set of continuous functions which have compact support, i.e. $C_c(\mathbb{R})$ and suppose that μ is real-valued functional on the sets $\mathfrak{F}_\sigma$, $\sigma > 0$. For a fixed $\sigma > 0$, it is required to find the following constants:

$$M(\mu, \sigma) := \sup \{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}, \quad m(\mu, \sigma) := \inf \{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}.$$

We have obtained a general solution to this problem for functionals of the following form $\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, where $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$ and $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$ a.e. on $x \in \mathbb{R}$. For $\rho(x) \equiv 1$, the value of $M(\mu, \sigma)$ was obtained by Siegel in 1935 and, independently, by Boas and Kac in 1945. In this article, we have obtained explicit solution to the problem under consideration in cases of $\rho(x) = ix$, $\rho(x) = x^2$ and $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

In addition, in this paper we study the connection between the problem under consideration and pointwise inequalities for entire functions of exponential type $\leq \sigma$ whose restrictions on $\mathbb{R}$ are in $L_1(\mathbb{R})$. In particular, sharp inequalities are obtained for the first and second derivatives of such functions.

Keywords: positive-definite functions, extremal problems, Bochner theorem, Fourier transform, entire functions of exponential type.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

A. D. Manov, 2021, "On an extremal problem for positive definite functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 161–171.

1. Введение

Комплекснозначная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f \in \Phi(\mathbb{R})$), если для любого $m \in \mathbb{N}$, и для любых точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0. \quad (1)$$

Если $f \in \Phi(\mathbb{R})$, то из неравенства (1) при $m = 2$ вытекает, что $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ и функция f является эрмитовой, т. е. $f = \tilde{f}$, где $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

В данной работе нас будет интересовать следующее выпуклое подмножество положительно определённых функций. Пусть $\sigma > 0$. Символом $\mathfrak{F}_\sigma$ обозначим множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\text{supp } \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$ и $\varphi(0) = 1$. Класс функций $\mathfrak{F}_\sigma$ не пуст. Например, если взять функцию $u \in L_2(\mathbb{R})$, $\|u\|_2 \neq 0$ и $u(x) = 0$ при $|x| \geq \sigma/2$, то следующая функция принадлежит $\mathfrak{F}_\sigma$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|u\|_2^2} (u * \tilde{u})(x) = \frac{1}{\|u\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \tilde{u}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Действительно, $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$; положительная определённость функции φ проверяется непосредственно. Если $u(x) = \chi_{[-\sigma/2, \sigma/2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – индикатор отрезка, то получим функцию $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$, $x \in \mathbb{R}$.

Для постановки задачи нам также потребуются следующие определения и обозначения. Пусть K компактное подмножество $\mathbb{R}$. Тогда символом $C_K(\mathbb{R})$ обозначим множество функций $f \in C(\mathbb{R})$ таких, что $\text{supp } f \subset K$. Наделим пространство $C_K(\mathbb{R})$ равномерной нормой $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Множество $C_c(\mathbb{R})$ всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем будем рассматривать как линейное пространство с топологией индуктивного предела пространств $C_K(\mathbb{R})$. В этом случае, линейный функционал μ на $C_c(\mathbb{R})$ является *непрерывным* тогда и только тогда, когда он локально ограничен, т. е. для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ найдётся константа N_K такая, что

$$|\mu(f)| \leq N_K \|f\|_\infty \quad \text{для всех } f \in C_K(\mathbb{R}). \quad (3)$$

Значение функционала μ на функции $f \in C_c(\mathbb{R})$ также будем обозначать символом $\langle \mu, f \rangle$. Определим функционалы $\tilde{\mu}$, $\bar{\mu}$ следующим образом:

$$\langle \tilde{\mu}, f \rangle := \overline{\langle \mu, \tilde{f} \rangle}, \quad \langle \bar{\mu}, f \rangle := \overline{\langle \mu, \bar{f} \rangle}, \quad f \in C_c(\mathbb{R}). \quad (4)$$

Непрерывность таким образом введённых функционалов проверяется непосредственно. Если $\mu = \tilde{\mu}$, то функционал μ будем называть *эрмитовым*.

В данной работе рассматривается следующая экстремальная задача для положительно определённых функций из $\mathfrak{F}_\sigma$.

ЗАДАЧА 1. Пусть $\sigma > 0$ и μ – непрерывный эрмитовый функционал на $C_c(\mathbb{R})$. Требуется найти следующие величины:

$$M(\mu, \sigma) := \sup \{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}, \quad m(\mu, \sigma) := \inf \{ \mu(\varphi) : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что постановка задачи 1 корректна, так как эрмитовый функционал μ на функциях из $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R})$ принимает только вещественные значения. Действительно,

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \tilde{\mu}, \varphi \rangle = \overline{\langle \mu, \tilde{\varphi} \rangle} = \overline{\langle \mu, \bar{\varphi} \rangle}, \quad \text{и значит, } \langle \mu, \varphi \rangle \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим также, что величины $M(\mu, \sigma)$ и $m(\mu, \sigma)$ конечны. Действительно, так как μ – линейный непрерывный функционал, то для отрезка $[-\sigma, \sigma]$ найдётся константа N_σ такая, что

$$|\mu(\varphi)| \leq N_\sigma \|\varphi\|_\infty = N_\sigma \varphi(0) = N_\sigma, \quad \text{для всех } \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $g \in C(\mathbb{R})$ и μ – линейный непрерывный функционал на $C_c(\mathbb{R})$. Тогда произведение g и μ определим следующим образом:

$$\langle g \cdot \mu, f \rangle := \langle \mu, g \cdot f \rangle, \quad f \in C_c(\mathbb{R}).$$

Так как при умножении на функцию $g(x) = e^{itx}$, $t \in \mathbb{R}$ множество $\mathfrak{F}_\sigma$ отображается взаимно однозначно на себя, то справедливы равенства:

$$M(e^{itx} \cdot \mu, \sigma) = M(\mu, \sigma), \quad m(e^{itx} \cdot \mu, \sigma) = m(\mu, \sigma), \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}.$$

Аналогично можно показать, что справедливы также следующие равенства:

$$M(\bar{\mu}, \sigma) = M(\mu, \sigma), \quad m(\bar{\mu}, \sigma) = m(\mu, \sigma).$$

Пусть $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$. По функции ρ определим следующий линейный функционал:

$$\langle \rho, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx, \quad \varphi \in C_c(\mathbb{R}). \quad (6)$$

Непрерывность функционала (6) проверяется непосредственно. Кроме того, из леммы дю Буа-Реймонда вытекает, что обозначение в (6) слева корректно. Не сложно проверить, что так определённый функционал является эрмитовым тогда и только тогда, когда соответствующая ему функция $\rho(x)$ является эрмитовой п. в. на $\mathbb{R}$, т. е. $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$ для п. в. $x \in \mathbb{R}$.

Если $\rho(x) \equiv 1$, то величина $M(\rho, \sigma)$ была найдена Зигелем [1] в 1935 году и независимо Боасом и Кацом (см. [2, Theorem 5]) в 1945 году. В этом случае $M(\rho, \sigma) = \sigma$ и достигается она на функции $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$. Отметим также, что Зигелем было получено решение более общей задачи для положительно определённых функций в $\mathbb{R}^n$ с носителем в шаре. Результат Зигеля был также получен независимо Д. В. Горбачевым [3].

Не сложно показать, что в случае $\rho(x) \equiv 1$, величина $m(\rho, \sigma) = 0$. В данной работе мы докажем следующую теорему, которая даёт общее решение задачи 1 для функционалов вида (6).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$, $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Определим оператор A_ρ на функциях $u \in L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ следующим образом:

$$(A_\rho u)(t) := \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \rho(t-x) u(x) dx, \quad -\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2.$$

Тогда A_ρ – ограниченный самосопряжённый оператор в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ и имеют место следующие равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \sup(\text{spec } A_\rho), \quad m(\rho, \sigma) = \inf(\text{spec } A_\rho),$$

где $\text{spec } A_\rho$ – спектр оператора A_ρ .

Отметим, что теорема 1 является аналогом теоремы Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [4, Satz IV]). Метод доказательства теоремы 1, по существу, повторяет метод из [4].

Если $\rho(x)$ – многочлен, то задача 1 связана с задачей о точечных оценках производных целой функции экспоненциального типа $\leq \sigma$ (ц.ф.э.т. $\leq \sigma$). Прежде чем сформулировать соответствующий результат введём некоторые обозначения. Обозначим символом $W_{p,\sigma}$ множество ц.ф.э.т. $\leq \sigma$ таких, что их сужения на $\mathbb{R}$ принадлежат $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, а символом $W_{p,\sigma}^+$ – подмножество неотрицательных на вещественной оси функций из $W_{p,\sigma}$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D – линейный дифференциальный оператор следующего вида

$$D := \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k}, \quad \text{где } a_k \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \rho(x) := \sum_{k=0}^n i^k a_k x^k.$$

Тогда для любой функции $f \in W_{1,\sigma}^+$ имеют место следующие точные неравенства:

$$\frac{m(\rho, \sigma)}{2\pi} \|f\|_1 \leq Df(t) \leq \frac{M(\rho, \sigma)}{2\pi} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приведены некоторые вспомогательные факты и утверждения. В разделах 3 и 4 мы докажем теоремы 1 и 2 соответственно. В разделе 5 мы найдем решения задачи 1 в случаях, когда $\rho(x) = ix$ и $\rho(x) = x^2$ и как следствия получим точные неравенства типа Никольского–Бернштейна для первой и второй производной функций из класса $W_{1,\sigma}^+$. Кроме того, в разделе 5 будет решена задача 1 в случае $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$.

2. Вспомогательные факты и утверждения

Отметим следующие свойства функций из $\Phi(\mathbb{R})$. Пусть $f, f_i \in \Phi(\mathbb{R})$. Тогда:

- 1) $|f(x+y) - f(x)|^2 \leq 2f(0)(f(0) - \operatorname{Re} f(y))$, $x, y \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \bar{f}, \operatorname{Re} f, f_1 f_2 \in \Phi(\mathbb{R})$, где $\lambda_i \geq 0$;
- 3) если для всех $x \in \mathbb{R}$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: g(x)$, то $g \in \Phi(\mathbb{R})$.

Свойства 1)–3) хорошо известны (см., например, [5, 6, 7]). В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин доказали следующий критерий положительной определённости:

ТЕОРЕМА 3 (Бохнер–Хинчин). *Функция $f \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [5, 6, 7]. Как прямое следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}) \iff \hat{f}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, где*

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

и в этом случае $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

В следующей теореме утверждается, что по существу, класс функций $\mathfrak{F}_\sigma$ исчерпывается функциями вида (2).

ТЕОРЕМА 4 (М.Г. Крейн, Боас–Кац). *Функция $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ тогда и только тогда, когда представима в следующем виде*

$$\varphi(x) = u * \tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x+t) \overline{u(t)} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $u \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|u\|_2 = 1$, $u(x) = 0$ при $|x| \geq \sigma/2$.

Доказательство этой теоремы см., например, в [6, Theorem 3.10.2].

3. Доказательство теоремы 1

1) Пусть $\sigma > 0$ фиксировано и $\rho_\sigma(x) := \chi_{[-\sigma, \sigma]}(x)\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пространство $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ будем отождествлять с подпространством функций $u \in L_2(\mathbb{R})$ таких, что $u(x) = 0$ для п. в. $x \in \mathbb{R} \setminus [-\sigma/2, \sigma/2]$. Тогда оператор A_ρ на $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ можно определить следующим образом:

$$(A_\rho u)(x) = \chi_{[-\sigma/2, \sigma/2]}(x)(\rho_\sigma * u)(x), \quad u \in L_2[-\sigma/2, \sigma/2].$$

Так как $\rho_\sigma \in L_1(\mathbb{R})$, а $u \in L_2(\mathbb{R})$, то $\rho_\sigma * u \in L_2(\mathbb{R})$ и справедливо неравенство

$$\|\rho_\sigma * u\|_2 \leq \|\rho_\sigma\|_1 \|u\|_2, \quad \text{и значит,} \quad \|A_\rho u\|_2 \leq \|\rho_\sigma\|_1 \|u\|_2.$$

Таким образом, оператор A_ρ является ограниченным оператором в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$. Самосопряжённость A_ρ вытекает из эрмитовости функции ρ и также проверяется без труда.

2) Так как $M(\bar{\rho}, \sigma) = M(\rho, \sigma)$ и $m(\bar{\rho}, \sigma) = m(\rho, \sigma)$ (см. замечание 3), то далее вместо функции ρ будем рассматривать её сопряжение $\bar{\rho}$.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ и $\varphi(x) = u * \tilde{u}(x)$, где $u \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|u\|_2 = 1$, $u(x) = 0$ при $|x| \geq \sigma/2$. Тогда справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\rho}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(x)} (u * \tilde{u})(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(x)} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x+t) \overline{u(t)} dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(x)} u(x+t) dx \right) \overline{u(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(y-t)} u(y) dy \right) \overline{u(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t-y) u(y) dy \right) \overline{u(t)} dt = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \left(\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \rho(t-y) u(y) dy \right) \overline{u(t)} dt \\ &= (A_\rho u, u). \end{aligned} \tag{7}$$

Из равенств (7) и теоремы 4 вытекает, что множество значений функционала $\bar{\rho}$ на множестве $\mathfrak{F}_\sigma$ совпадает с множеством значений эрмитовой квадратичной формы $(A_\rho u, u)$ на единичной сфере $\|u\|_2 = 1$ в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$. Так как A_ρ – ограниченный самосопряжённый оператор, то справедливы следующие равенства:

$$\sup_{\|u\|_2=1} (A_\rho u, u) = \sup(\text{спек} A_\rho), \quad \inf_{\|u\|_2=1} (A_\rho u, u) = \inf(\text{спек} A_\rho).$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [8, Теорема 2, §8, гл. XI].

Теорема доказана. $\square$

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $f \in W_{1,\sigma}^+$ и $f(x) \not\equiv 0$. Так как оператор D линеен, то, не ограничивая общности, будем предполагать, что $\|f\|_1 = 2\pi$.

Из теоремы Винера–Пэли и следствия 1 вытекает, что преобразование Фурье является биекцией между $W_{1,\sigma}^+$ и множеством функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\text{supp } \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$. Таким образом,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$. Из формулы обращения преобразования Фурье следует, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{и значит, } \varphi(0) = 1.$$

Таким образом, $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Применяя дифференциальный оператор D к левой и правой части (8), получим, что

$$Df(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) e^{itx} \varphi(x) dx = \langle e^{itx} \rho(x), \varphi(x) \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что ρ является эрмитовой функцией. Далее, учитывая замечание 3, получаем, что

$$m(\rho, \sigma) \leq Df(t) \leq M(\rho, \sigma), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана. $\square$

5. Некоторые примеры

В примерах ниже функция $\rho(x)$ является однородной. В этом случае достаточно найти константы $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$ для какого-нибудь определённого $\sigma > 0$. Если $a \geq 0$ и $\rho(tx) = t^a \rho(x)$ для всех $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$, то справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma_1) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{a+1} M(\rho, \sigma_2), \quad m(\rho, \sigma_1) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{a+1} m(\rho, \sigma_2). \quad (9)$$

ПРИМЕР 3. Пусть $\rho(x) = ix$, $x \in \mathbb{R}$ и $\sigma = 2$. В этом случае, оператор A_ρ – конечномерный и имеет вид:

$$(A_\rho u)(t) = i \int_{-1}^1 (t-x)u(x)dx = it \int_{-1}^1 u(x)dx - i \int_{-1}^1 xu(x)dx, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Так как A_ρ – компактный оператор на бесконечномерном пространстве, то спектр A_ρ содержит точку 0, и отличные от нуля точки спектра являются собственными значениями A_ρ .

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$. Пусть $u(t) = at + b$, $-1 \leq t \leq 1$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

$$i2bt - i\frac{2a}{3} = \lambda(at + b), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях t , получим систему:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2i \\ -\frac{2i}{3} & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривиальные решения системы существуют лишь при $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}/3$. Таким образом, $M(\rho, 2) = 2\sqrt{3}/3$ и $m(\rho, 2) = -2\sqrt{3}/3$. Из (9) получаем, что

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma^2 \sqrt{3}}{6}, \quad m(\rho, \sigma) = -\frac{\sigma^2 \sqrt{3}}{6}. \quad (10)$$

Найдём экстремальные функции на которых достигаются величины (10). В силу однородности функции $\rho(x)$, достаточно найти экстремальные функции при фиксированном $\sigma > 0$. В общем случае, надо сделать замену переменных.

Для нахождения экстремальной функции надо взять какую-нибудь собственную функцию $u(t)$, которая соответствует экстремальному собственному значению и воспользоваться формулой (2). В данном случае, собственными функциями, которые соответствуют экстремальным собственным значениям являются:

$$u_{1,2}(t) = \pm i\sqrt{3}t + 1, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

В случае произвольного $\sigma > 0$, экстремальными являются функции $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi(x)}$, где

$$\operatorname{Re} \varphi(x) = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma - |x|)_+(\sigma^2 - \sigma|x| - |x|^2), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{Im} \varphi(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\sigma^2}(\sigma - |x|)_+x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 4. Пусть $\rho(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ и $\sigma = 2$. В этом случае, оператор A_ρ – конечномерный и имеет вид:

$$(A_\rho u)(t) = \int_{-1}^1 (t-x)^2 u(x) dx = t^2 \int_{-1}^1 u(x) dx - 2t \int_{-1}^1 xu(x) dx + \int_{-1}^1 x^2 u(x) dx, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$. Пусть $u(t) = at^2 + bt + c$, $-1 \leq t \leq 1$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\left(\frac{2a}{3} + 2c\right)t^2 - \frac{4b}{3}t + \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = \lambda(at^2 + bt + c), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях t , получим систему:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривиальные решения системы существуют при λ , удовлетворяющих уравнению:

$$15\lambda^3 - 32\lambda - \frac{64}{9} = 0, \text{ т. е. при } \lambda_1 = -\frac{4}{3}, \lambda_2 = \frac{10 - 6\sqrt{5}}{15}, \lambda_3 = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{15}.$$

Из (9) вытекает, что

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma^3}{8} M(\rho, 2) = \frac{\sigma^3(5 + 3\sqrt{5})}{60}, \quad m(\rho, \sigma) = \frac{\sigma^3}{8} m(\rho, 2) = -\frac{\sigma^3}{6}.$$

Собственными функциями, которые соответствует экстремальным собственным значениям λ_1 и λ_3 являются:

$$u_1(t) = t, \quad u_3(t) = \sqrt{5}t^2 + 1, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Величины $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$ достигается на функция

$$\varphi_1(x) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4\sigma^5}(\sigma - |x|)_+((3 + \sqrt{5})\sigma^4 - 2(3 + \sqrt{5})\sigma^3|x| + 4(1 + \sqrt{5})\sigma^2|x|^2 + 4\sigma|x|^3 + 4|x|^4),$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sigma^3}(\sigma - |x|)_+(\sigma^2 - 2\sigma|x| - 2|x|^2), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ соответственно.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы 2 и примеров 1 и 2 вытекает, что для любой функции $f \in W_{1,\sigma}^+$ имеют место следующие точные неравенства:

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{\sigma^2 \sqrt{3}}{12\pi} \|f\|_1, \quad (11)$$

$$-\frac{\sigma^3}{12\pi} \|f\|_1 \leq -f''(t) \leq \frac{\sigma^3(5+3\sqrt{5})}{120\pi} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Равенства в (11) и (12) достигается, например, на преобразованиях Фурье экстремальных функций в примерах 1 и 2.

Точная оценка слева в (12) была получена Д. В. Горбачевым в [9] другим методом (см. теорему 1 при $r = 1$, $\alpha = -1/2$ в [9]), методом квадратурных формул. Отметим, что в теореме 2 работы [9], которая была использована при доказательстве теоремы 1 в [9], неотрицательность ц.ф.э.т. не предполагалась. Как следствие, при доказательстве теоремы 1 была допущена неточность, в следствии которой была получена только нижняя оценка величины $-f''(t)$, $t \in \mathbb{R}$ для функций $f \in W_{1,\sigma}^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Также стоит отметить, что И. И. Ибрагимовым в 1959 было доказано (см. [10, следствие 2]), что для функций $f \in W_{1,\sigma}$, не обязательно неотрицательных, выполняются следующие неравенства:

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\sigma^{n+1}}{\pi(n+1)} \|f\|_1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Неравенство (13) при $n = 1$ с константой σ^2/π было доказано Кореваром в 1949 (см. [11]).

ПРИМЕР 5. Пусть $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$ и $\sigma = 2$. В этом случае, оператор A_ρ является компактным и имеет вид:

$$(A_\rho u)(t) = i \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(t-x) u(x) dx = i \int_{-1}^t u(x) dx - i \int_t^1 u(x) dx, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$, т. е. следующего интегрального уравнения:

$$i \int_{-1}^t u(x) dx - i \int_t^1 u(x) dx = \lambda u(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (14)$$

Не сложно заметить, что если функция u при некотором $\lambda \neq 0$ удовлетворяет уравнению (14), то $u \in C^\infty(-1, 1)$. Кроме того, подставляя $t = -1$ и $t = 1$ в (14), получаем следующие краевые условия: $u(1) = -u(-1)$. Легко проверить, что функция $u(t)$ является решением уравнения (14) тогда и только тогда, когда она является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \lambda u'(t) - 2iu(t) = 0; \\ u(1) = -u(-1). \end{cases} \quad (15)$$

Общим решением первого уравнения в (15) является функция

$$u(t) = C e^{\frac{i2t}{\lambda}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \text{где } C \in \mathbb{C}.$$

Подставляя краевые условия, получим уравнение $\cos(2/\lambda) = 0$, решением которого являются числа

$$\lambda_k = \frac{2}{\pi/2 + \pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} M(\rho, 2) = \frac{2\sigma}{\pi}, \quad m(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} m(\rho, 2) = -\frac{2\sigma}{\pi}.$$

Экстремальной является пара функций $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi(x)}$, где

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi x}{\sigma}} \left(1 - \left|\frac{x}{\sigma}\right|\right)_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Так как $i \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi(x) dx = -2 \int_0^{\sigma} \text{Im} \varphi(x) dx$, то из примера 3 следует, что для любой функции $\varphi \in \mathfrak{F}_{\sigma}$ имеет место следующее точное неравенство:

$$\left| \int_0^{\sigma} \text{Im} \varphi(x) dx \right| \leq \frac{\sigma}{\pi}.$$

6. Заключение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}$ и имеет место неравенство $\inf_{\lambda_k, \lambda_j \in \Lambda, \lambda_k \neq \lambda_j} |\lambda_k - \lambda_j| > 0$. Рассмотрим комплекснозначную функцию $\rho : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда следующий функционал является непрерывным на $C_c(\mathbb{R})$:

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \varphi(\lambda), \quad \varphi \in C_c(\mathbb{R}).$$

В случае эрмитовости функционала ρ , задача 1 сводится к задаче о точечных оценках финитных положительно определённых функций. Подобные задачи рассматривались в ряде работ. Отметим, в частности [12] и [13]. Более подробную информацию о такого типа задачах можно найти в указанных работах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65, № 1. P. 307–323.
2. Boas R. P. Jr., Кас М. Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. P. 189–206.
3. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352.
4. Szász O. Über harmonische Funktionen und L-Formen // Math. Zeitschr. 1918. Band. 1. S. 149–162.
5. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions. Berlin: Akad. Verl., 1994. 208 p.
6. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. 366 p.
7. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. 585 p.
8. Иосида К. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967. 624 с.

9. Горбачев Д. В. Константы Никольского-Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального типа на оси // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 93–103.
10. Ибрагимов И. И. Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23, № 2. С. 243–256.
11. Korevaar J. An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde. 1949. V. 23., № 2. P. 55–62.
12. Arestov V., Berdysheva E., Berens H. On pointwise Turan's problem for positive definite functions // East J. Approx. 2003. V. 9, № 1. P. 31–42.
13. Kolountzakis M., Révész S. G. On Pointwise Estimates of Positive Definite Functions With Given Support // Canad. J. Math. 2006. V. 58, № 2. P. 401–418.

REFERENCES

1. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65, № 1. P. 307–323.
2. Boas R. P. Jr., Kac M. Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. P. 189–206.
3. Gorbachev D. V. Extremum Problem for Periodic Functions Supported in a Ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, № 3. C. 313–319.
4. Szász O. Über harmonische Funktionen und L-Formen // Math. Zeitschr. 1918. Vol. 1. P. 149–162.
5. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions. Berlin: Akad. Verl., 1994. 208 p.
6. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. 366 p.
7. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. 585 p.
8. Yoshida K. Functional Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1965. 624 p.
9. Gorbachev D. V. Nikolskii – Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN 2018. Vol. 24, № 4. P. 93–103. (in Russ.)
10. Ibragimov I. I. Extremal problems in a class of entire functions of finite degree // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1959. Vol. 23, № 2. P. 243–256. (in Russ.)
11. Korevaar J. An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde. 1949. V. 23., № 2. P. 55–62.
12. Arestov V., Berdysheva E., Berens H. On pointwise Turan's problem for positive definite functions // East J. Approx. 2003. V. 9, № 1. P. 31–42.
13. Kolountzakis M., Révész S. G. On Pointwise Estimates of Positive Definite Functions With Given Support // Canad. J. Math. 2006. V. 58, № 2. P. 401–418.

Получено 17.06.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.