ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110

Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа[1]

Д. В. Горбачев (г. Тула)

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

Классические неравенства Бернштейна — Никольского вида $\|Df\|_q \leqslant \mathcal{C}_{pq}\|f\|_p$ для $f \in Y$, дают оценки pq-норм дифференциальных операторов D на классах Y полиномов и целых функций экспоненциального типа. Данные неравенства играют важную роль в гармоническом анализе, теории приближений и находят приложения в теории чисел, метрической геометрии. Изучаются как порядковые неравенства, так и неравенства с точными константами. Последний случай особенно интересен тем, что экстремальные функции зависят от геометрии многообразия и этот факт помогает при решении геометрических проблем.

Исторически неравенства Бернштейна относят к случаю $p = q$, а неравенства Никольского — к оценке тождественного оператора при $p < q$. Впервые оценка производной тригонометрического полинома при $p = \infty$ была дана С.Н. Бернштейном (1912), хотя ранее А.А. Марков (1889) привел ее алгебраический вариант. Неравенство Бернштейна уточнялось Э. Ландау, М. Риссом, а А. Зигмунд (1933) доказал его для всех $p \geqslant 1$. При $p < 1$ порядковое неравенство Бернштейна нашли В.И. Иванов (1975), Э.А. Стороженко, В.Г. Кротов и П. Освальд (1975), а точное неравенство — В.В. Арестов (1981). Для целых функций экспоненциального типа точное неравенство Бернштейна доказали Н.И. Ахиезер, Б.Я. Левин ($p \geqslant 1$, 1957), Q.I. Rahman и G. Schmeisser ($p < 1$, 1990).

Первые одномерные неравенства Никольского при $q = \infty$ установлены Д. Джексон (1933) для тригонометрических полиномов и J. Korevaar (1949) для целых функций экспоненциального типа. Во всей общности для $q \leqslant \infty$ и d-мерного пространства это было сделано С.М. Никольским (1951). Оценки констант Никольского уточнялись И.И. Ибрагимовым (1959), D. Amir и Z. Ziegler (1976), R.J. Nessel и G. Wilmes (1978) и многими другими. Порядковые неравенства Бернштейна — Никольского для разных интервалов изучала Н.К. Бари (1954). Варианты неравенств для общих мультипликаторных дифференциальных операторов и весовых многообразий можно найти в работах П.И. Лизоркина (1965), А.И. Камзолова (1984), А.Г. Бабенко (1992), А.И. Козко (1998), К.В. Руновского и H.-J. Schmeisser (2001), F. Dai и Y. Xu (2013), В.В. Арестова и П.Ю. Глазыриной (2014) и других авторов.

Долгое время теория неравенств Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа развивалась параллельно пока E. Levin и D. Lubinsky (2015) не установили, что при всех $p > 0$ константа Никольского для функций является пределом тригонометрических констант. Для констант Бернштейна — Никольского этот факт доказан М.И. Ганзбургом и С.Ю. Тихоновым (2017) и уточнен автором совместно с И.А. Мартьяновым (2018, 2019). Многомерные результаты типа Левина — Любинского доказаны автором совместно с F. Dai и С.Ю. Тихоновым (сфера, 2020), М.И. Ганзбургом (тор, 2019 и куб, 2021).

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-11-50107.

До сих пор точные константы Никольского известны только при $(p,q) = (2,\infty)$. Интригующим является случай константы Никольского для $p = 1$. Продвижение в данной проблематике получено Я.Л. Геронимусом (1938), С.Б. Стечкиным (1961), Л.В. Тайковым (1965), L. Hörmander и B. Bernhardsson (1993), Н.Н. Андреевым, С.В. Конягиным и А.Ю. Поповым (1996), автором (2005), автором и И.А. Мартьяновым (2018), И.Е. Симоновым и П.Ю. Глазыриной (2015). E. Carneiro, M.B. Milinovich и K. Soundararajan (2019) указали приложения в теории дзета-функции Римана. В.В. Арестов, М.В. Дейкалова и их соавторы (2016, 2018) охарактеризовали экстремальные полиномы для общих весовых констант Никольского, применяя двойственность. Здесь у истоков стояли С.Н. Бернштейн, Л.В. Тайков (1965, 1993) и другие.

Новым направлением является доказательство точных неравенств Никольского на классах функций с ограничениями. Здесь обнаруживается связь с экстремальными задачами гармонического анализа Турана, Дельсарта, принципа неопределенности J. Bourgain, L. Clozel и J.-P. Kahane (2010) и другими. Например, автором с соавторами (2020) показано, что точная константа Никольского для неотрицательных сферических полиномов дает оценку сферических дизайнов P. Delsarte, J.M. Goethals и J.J. Seidel (1977). Варианты задач для функций приводят к знаменитым оценкам плотности сферической упаковки, а порядковые результаты тесно связаны с неравенствами Фурье.

Данные результаты излагаются в рамках общей теории неравенств Бернштейна — Никольского, приводятся приложения в теории приближений, теории чисел, метрической геометрии, предлагаются открытые проблемы.

Ключевые слова: неравенство Бернштейна, неравенство Никольского, точная константа, полином, целая функция экспоненциального типа.

Библиография: 133 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 58–110.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110

Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type

D. V. Gorbachev (Tula)

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

The classical Bernstein–Nikolskii inequalities of the form $\|Df\|_q \leqslant \mathcal{C}_{pq}\|f\|_p$ for $f \in Y$, give estimates for the pq-norms of the differential operators D on classes Y of polynomials and entire functions of exponential type. These inequalities play an important role in harmonic analysis, approximation theory and find applications in number theory and metric geometry. Both order inequalities and inequalities with sharp constants are studied. The last case is especially interesting because the extremal functions depend on the geometry of the manifold and this fact helps in solving geometric problems.

Historically, Bernstein's inequalities are referred to the case $p = q$, and Nikolskii's inequalities to the estimate of the identity operator for $p < q$. For the first time, an estimate for the derivative of a trigonometric polynomial for $p = \infty$ was given by S.N. Bernstein (1912), although earlier A.A. Markov (1889) gave its algebraic version. Bernstein's inequality was refined by E. Landau, M. Riess, and A. Sigmund (1933) proved it for all $p \geqslant 1$. For $p < 1$, the Bernstein order inequality was found by V.I. Ivanov (1975), E.A. Storozhenko, V.G. Krotov and P. Oswald (1975), and the sharp inequality by V.V. Arestov (1981). For entire functions of exponential type, the sharp Bernstein inequality was proved by N.I. Akhiezer, B.Ya. Levin ($p \geqslant 1$, 1957), Q.I. Rahman and G. Schmeisser ($p < 1$, 1990).

The first one-dimensional Nikolskii inequalities for $q = \infty$ were established by D. Jackson (1933) for trigonometric polynomials and J. Korevaar (1949) for entire functions of exponential type. In all generality for $q \leqslant \infty$ and d-dimensional space, this was done by S.M. Nikolskii (1951). The estimates of Nikolskii constants were refined by I.I. Ibragimov (1959), D. Amir and Z. Ziegler (1976), R.J. Nessel and G. Wilmes (1978), and many others. Bernstein–Nikolskii order inequalities for different intervals were studied by N.K. Bari (1954). Variants of inequalities for general multiplier differential operators and weighted manifolds can be found in the works of P.I. Lizorkin (1965), A.I. Kamzolov (1984), A.G. Babenko (1992), A.I. Kozko (1998), K.V. Runovsky and H.-J. Schmeisser (2001), F. Dai and Y. Xu (2013), V.V. Arestov and P.Yu. Glazyrina (2014) and other authors.

For a long time, the theory of Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type developed in parallel until E. Levin and D. Lubinsky (2015) established that for all $p > 0$ the Nikolskii constant for functions is the limit of trigonometric constants. For the Bernstein–Nikolskii constants, this fact was proved by M.I. Ganzburg and S.Yu. Tikhonov (2017) and refined by the author together with I.A. Martyanov (2018, 2019). Multidimensional results of the Levin–Lyubinsky type were proved by the author together with F. Dai and S.Yu. Tikhonov (the sphere, 2020), M.I. Ganzburg (the torus, 2019 and the cube, 2021).

Until now, the sharp Nikolskii constants are known only for $(p, q) = (2, \infty)$. The case of the Nikolskii constant for $p = 1$ is intriguing. Advancement in this area was obtained by Ya.L. Geronimus (1938), S.B. Stechkin (1961), L.V. Taikov (1965), L. Hörmander and B. Bernhardsson (1993), N.N. Andreev, S.V. Konyagin and A.Yu. Popov (1996), author (2005), author and I.A. Martyanov (2018), I.E. Simonov and P.Yu. Glazyrina (2015). E. Carneiro, M.B. Milinovich and K. Soundararajan (2019) pointed out applications in the theory of the Riemann zeta function. V.V. Arestov, M.V. Deikalova et al (2016, 2018) characterized extremal polynomials for general weighted Nikolskii constants using duality. Here, S.N. Bernshtein, L.V. Taikov (1965, 1993) and others stood at the origins.

A new direction is the proof of Nikolskii's sharp inequalities on classes of functions with constraints. It reveals a connection with the extremal problems of harmonic analysis of Turan, Delsarte, the uncertainty principle by J. Bourgain, L. Clozel and J.-P. Kahane (2010) and others. For example, the author and coauthors (2020) showed that the sharp Nikolskii constant for nonnegative spherical polynomials gives an estimate for spherical designs by P. Delsarte, J.M. Goethals and J.J. Seidel (1977). Variants of problems for functions lead to famous estimates for the density of spherical packing, and order results are closely related to Fourier inequalities.

These results are presented in the framework of the general theory of Bernstein–Nikolskii inequalities, applications in approximation theory, number theory, metric geometry are presented, open problems are proposed.

Keywords: Bernstein inequality, Nikolskii inequality, sharp constant, polynomial, entire function of exponential type.

Bibliography: 133 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, 2021, "Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 58–110.

1. Список некоторых обозначений

- $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$;
- $L^p(M)$ — пространство измеримых функций $f\colon M \to \mathbb{C}$ с конечной (квази-)нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p;M} = (\int_M |f|^p\,dx)^{1/p}$ при $0 < p < \infty$ и $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_M |f|$ при $p = \infty$;
- $C(M)$ — пространство непрерывных функций, $\|f\|_C = \|f\|_\infty = \sup_M |f|$;
- $L^p_w(M)$ — весовое пространство, $\|f\|_{p,w} = (\int_M |f|^p w\,dx)^{1/p}$ при $p < \infty$, $w\colon M \to \mathbb{R}_+$ — вес;
- $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель;
- $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ — одномерный тор;
- $\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство, $xy = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x| = (xx)^{1/2}$;
- $B^d \subset \mathbb{R}^d$ — единичный евклидов шар с центром в нуле;
- $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — единичная евклидова сфера;
- χ_A — характеристическая функция множества A;
- $|A|$ — число элементов конечного множества A или мера измеримого множества A;
- $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f;
- $\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ixy}\,dx$ — преобразование Фурье функции f;
- $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$ — свертка функций f, g;
- C — положительные константы, которые могут меняться от места к месту и зависеть только от несущественных параметров;
- $A(\theta) \asymp B(\theta)$, если $C_1A(\theta) \leqslant B(\theta) \leqslant C_2A(\theta)$, где $C_1 \leqslant C_2$ не зависят от θ;
- $(a)_+ = \max\{a, 0\}$;
- $[a]$ — целая часть, $\lceil a \rceil$ и $\lfloor a \rfloor$ — округления в большую и меньшую сторону соответственно;
- $Y \subset C(M)$ — как правило, подпространство;
- K — воспроизводящее ядро подпространства Y;
- ρ — метрика однородного пространства $M = G/H$, G — транзитивная группа движений M, H — стационарная подгруппа точки $o \in M$, $f(x) = f(\rho(x, o))$ — зональные функции;
- $f(x) = f(|x|)$ — радиальные функции на $\mathbb{R}^d$;
- D — дифференциальный оператор, I — единичный оператор;
- $\partial = \partial_x$ — производная по x;
- Δ_M — оператор Лапласа–Бельтрами однородного пространства M, $\Delta_0 = \Delta_{\mathbb{S}^d}$;
- $\mathcal{C}^D_{pq}(Y)$ — константа Бернштейна — Никольского, $\mathcal{C}^D_{pq,w}(Y)$ — весовая константа, $\mathcal{C}^D_p(Y) = \mathcal{C}^D_{p\infty}(Y)$ при $q = \infty$;

- $\mathcal{A}_p^D(Y;o)$ — сдвинутая задача Никольского;
- $\mathcal{T}_n$ — множество комплекснозначных 2π-периодических тригонометрических полиномов порядка не выше n;
- $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше n;
- $\mathcal{E}_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального типа не выше σ, $\mathcal{E}_\sigma^p$ — подмножество функций, ограниченных по норме L^p;
- $\mathbf{T}_n(x)$, $\mathbf{U}_n(x)$ — полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода соответственно;
- $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — алгебраический вес и полиномы Якоби соответственно, при $\alpha=\beta$ вес и полиномы Гегенбауэра;
- $j_\alpha(x)=\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(x)}{x^\alpha}$ — нормированная функция Бесселя;
- $0<q_{\alpha1}<q_{\alpha2}<\ldots$ — нули функции Бесселя $J_\alpha(x)$;
- $\operatorname{Si}x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральный синус.

2. Введение

Неравенства Бернштейна — Никольского изучаются на подмножествах пространств Лебега — Рисса L^p действительных или комплексных функций, заданных на некотором многообразии M. Для естественной меры dx на M имеем $\|f\|_p=(\int_M|f|^p\,dx)^{1/p}$ при $0<p<\infty$ (для $p<1$ это будет квазинорма), $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_M|f|$ при $p=\infty$. Для непрерывных функций $C(M)$ получаем равномерную норму $\|f\|_\infty=\sup_M|f|$. Стандартно $A(\theta)\asymp B(\theta)$ для положительных $A(\theta)$, $B(\theta)$ означает $C_1A(\theta)\leqslant B(\theta)\leqslant C_2A(\theta)$ с константами эквивалентности $0<C_1\leqslant C_2$, не зависящими от параметра θ.

Классические неравенства типа Бернштейна — Никольского имеют следующий вид:

$$\|Df\|_q\leqslant C\|f\|_p,\quad f\in Y,$$

где D — дифференциальный оператор (включая единичный I), Y — обычно подпространство из $C(M)$ (в нашем случае полиномов или целых функций экспоненциального типа), $DY\subset Y$. Точная константа в этом неравенстве определяется как решение задачи Бернштейна — Никольского

$$\mathcal{C}_{pq;M}^D(Y)=\sup_{f\in Y\cap L^p(M)}\frac{\|Df\|_q}{\|f\|_p}$$

($0/0$ понимается как 0). Для краткости обозначения M и $D=I$ опускаются. Данная величина является pq-нормой оператора D на подпространстве Y. Заметим, что множество Y может быть шире, чем $Y\cap L^p(M)$, однако только эта часть используется при нахождении супремума.

Величину $\mathcal{C}_{pq}^D(Y)$ интересно изучать как функцию от всех параметров, но в первую очередь от мощности Y, например размерности $\dim Y$. В общих постановках рассматривают не обязательно линейные множества функций Y, дробные операторы D и другие модификации.

Случаи $D=I$, $p<q$ и $D\neq I$, $p=q$ отвечают классическим неравенствам Никольского и Бернштейна соответственно. Неравенства типа Бернштейна для алгебраических полиномов также называют неравенствами Маркова. Далее мы дадим исторический обзор, объясняющий данные определения (см. разд. 3).

Неравенства и задачи Бернштейна–Маркова–Никольского активно применяются в теории приближений при доказательстве прямых и обратных теорем о наилучшем приближении подпространствами Y. Похожие экстремальные задачи возникают в аналитической теории чисел, теории кодирования, метрической геометрии, особенно если варьировать классы функций Y. Мы приведем некоторые такие приложения (см. разд. 6).

Подробный обзор классических неравенств Маркова–Бернштейна — Никольского, в основном одномерных, дается в известной монографии G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović и Th.M. Rassias [100]. Поэтому здесь мы сконцентрируемся на недавнем прогрессе в области многомерных точных неравенств Бернштейна — Никольского в пространствах $L^p(M)$ на однородных многообразиях M, включая единичную евклидову сферу $\mathbb{S}^d$ и евклидово пространство $\mathbb{R}^d$. Многие из данных результатов опираются на решение одномерных задач в пространствах L^p с весом, что обогащает классическую теорию.

Задача вычисления $\mathcal{C}_{pq}^D(Y)$ в общей ситуации является сложной. В настоящее время точные результаты ограничиваются случаями пар $(p,q)=(2,\infty)$, (p,p). Мы их приведем далее. Поэтому много результатов являются порядковыми. В частности, пусть оператор D однородный степени r, множество Y_n зависит от некоторого параметра n, например, $\dim Y_n \asymp n^d$ при $n\to\infty$. Тогда типичной оценкой для константы Бернштейна — Никольского является

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y_n) \asymp n^{r+d(1/p-1/q)_+}, \quad n\to\infty. \tag{1}$$

Одними из основных результатов, которые мы приводим, являются теоремы типа Левина — Любинского, когда вместо эквивалентности можно написать асимптотическое равенство вида

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y_n) = \mathcal{L}_{pq}^D n^{r+d(1/p-1/q)_+}(1+o(1)), \tag{2}$$

с некоторой предельной константой Бернштейна — Никольского $\mathcal{L}_{pq}^D$. Теория таких равенств только развивается и пока они известны только для случая $q=\infty$, который в целом будет основным в данном обзоре.

Структура обзора следующая. В следующем разделе 3 мы приводим исторический фон проблемы, выделяя ключевые для нас результаты. В разделе 4 мы излагаем в компактном виде известные подходы к получению верхних и нижних оценок констант Бернштейна — Никольского, а также даем сопутствующие результаты. В разделе 5 мы доказываем явные границы для констант Никольского, связанных с многомерной сферой $\mathbb{S}^d$, из которых вытекает результат Левина — Любинского с явной оценкой остаточного члена. Данный выбор обусловлен общностью и относительной простой доказательства. В разделе 6 предлагаются некоторые приложения констант и задач Бернштейна — Никольского, включая теорию приближений, теорию чисел, метрическую геометрию. В заключении мы перечисляем некоторые открытые проблемы из теории точных неравенств Бернштейна — Никольского.

3. Исторический обзор основных результатов

Мы постараемся более или менее следовать историческому развитию событий, на всем многообразии результатов выделяя концептуальные для нас. Условно выделим пункты в соответствии с основными результатами соответствующей эпохи.

3.1. Эпоха Чебышева и братьев Марковых

Во многом, развитие классических неравенств теории приближений для полиномов и функций было стимулировано знаменитой задачей П.Л. Чебышева о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля. Обзор классических результатов мы даем по известной книге [100]. Далее через $\mathcal{P}_n$ обозначим множество алгебраических полиномов $P(x)=\sum_{k=0}^n c_k x^k$ с комплексными коэффициентами и степени не выше $n\in\mathbb{Z}_+$. Здесь и далее подмножество действительных полиномов будем помечать меткой «real». Тогда для $M=[-1,1]$ при всех $n\geqslant 1$ имеем

$$\min_{P\in\mathcal{P}_{n-1}^{\mathrm{real}}} \|x^n+P(x)\|_\infty = 2^{1-n}\|\mathbf{T}_n(x)\|_\infty, \tag{3}$$

где $\mathbf{T}_n(x) = \cos n \arccos x$ — единственный экстремальный полином, впоследствии названный полиномом Чебышева первого рода. Считается, что данная задача возникла у П.Л. Чебышева при моделировании параллелограмма Уатта. Впоследствии, способ ее решения привел к знаменитой теореме об альтернансе — критерии наилучшего приближения подпространством в равномерной метрике. Из соображений компактности мы сразу пишем в (3) минимум.

Полиномы Чебышева и их обобщения, в том числе достаточно неожиданные, возникают во многих задачах (см., например, [5]). Однако мы выделим результат братьев Марковых, который говорит об экстремальности полинома Чебышева в задаче об оценке производных алгебраических полиномов. Именно, для произвольного действительного полинома $P_n \in \mathcal{P}_n$ и $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|P_n^{(r)}\|_\infty \leqslant \mathbf{T}_n^{(r)}(1)\|P_n\|_\infty, \tag{4}$$

или, обозначая $\partial = \partial_x$ производную по x,

$$\mathcal{C}_{\infty\infty}^{\partial^r}(\mathcal{P}_n) = \mathbf{T}_n^{(r)}(1).$$

При $r = 1$ неравенство (4) было доказано А.А. Марковым, а при $r \geqslant 1$ его братом В.А. Марковым [100]. Интересно отметить, что данное неравенство выросло из точной оценки Д.И. Менделеева $\|P_2'\|_\infty \leqslant 4\|P_2\|_\infty$, использованной им в его знаменитых результатах о концентрации спирта в воде (см. [100]). Впоследствии, экстремальные задачи об оценки производных полиномов для подмножеств $M \subset \mathbb{R}^d$ стали называть неравенствами типа Маркова или неравенствами братьев Марковых. Отметим, что В.А. Марков также доказал следующий вариант неравенства для коэффициентов полинома

$$|P_n^{(r)}(0)| \leqslant |\mathbf{T}_{n-\theta}^{(r)}(0)|\, \|P\|_\infty, \tag{5}$$

где $\theta = 0$ или 1 в зависимости от четности или нечетности $n - r$. Для $r = n$ оно известно как неравенство Чебышева.

А.Н. Коркин и Е.И. Золотарев решили задачу Чебышева в интегральной метрике пространства $L^1([-1,1])$ [100]:

$$\min_{P \in \mathcal{P}_{n-1}^{\mathrm{real}}} \|x^n + P(x)\|_1 = 2^{-n}\|\mathbf{U}_n(x)\|_1, \tag{6}$$

где $\mathbf{U}_n(x) = \frac{\sin{(n+1)}\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ — полином Чебышева второго рода, который также единственный в задаче.

Задача Чебышева относительно простая в метрике $L^2([-1,1])$, где единственным ответом будут ортогональные полиномы Лежандра. Для других $p \geqslant 1$ имеется характеризация экстремальных полиномов в виде соотношений ортогональности, однако мы не знаем конструктивного описания этих полиномов.

Задачи Чебышева активно изучались для полиномов с несколькими фиксированными коэффициентами (см. [100]). Однако мы уделяем больше внимания весовым аналогам задачи Чебышева, так как они оказываются тесно связанными с многомерными точными неравенствами Никольского. В них для неотрицательной на $[-1,1]$ весовой функции w требуется найти

$$\min_{P \in \mathcal{P}_{n-1}^{\mathrm{real}}} \|(x^n + P(x))w(x)\|_p,$$

В L^2-метрике ответом вновь будут ортогональные полиномы, но уже с весом $w^{1/2}$. Также ответ известен при $p = 1, \infty$ для весов вида

$$w(x) = \frac{(1-x)^a(1+x)^b}{\sqrt{S(x)}}, \quad a, b \in \{0, 1/2\},$$

где S — положительный на $[-1,1]$ полином (см. [100, 86]). Во всех случаях экстремальными являются вариации полиномов Чебышева–Маркова–Бернштейна–Сеге.

Для нас особый интерес представляет случай веса Якоби $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ [113]. Однако для общих α, β решение задачи Чебышева неизвестно при $p \neq 2$, хотя есть порядковые результаты [100]. Далее мы увидим, как этот случай связан с неравенством Никольского для сферических полиномов.

Есть интересные исследования, посвященные случаю, когда $w \equiv 0$ на интервалах. Здесь задача Чебышева становится близкой к проблеме Ремеза (см., например, [21, 124] и п. 6.4). Причем в L^{∞}-проблеме Ремеза экстремальными полиномами вновь будут модификации полинома Чебышева $\mathbf{T}_n$ [124].

Многие алгебраические задачи после тригонометрической замены переменного $x = \cos t$ сводятся к проблемам для четных тригонометрических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{T})$ на торе $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$. Множество всех комплекснозначных тригонометрических полиномов $T(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ порядка не выше n обозначим через $\mathcal{T}_n$. Четные или нечетные полиномы будем помечать метками «even» или «odd». Тогда алгебраическая задача Чебышева эквивалентна следующей тригонометрической задаче в пространстве $L^{\infty}(\mathbb{T})$:

$$\min_{T \in \mathcal{T}_{n-1}^{\mathrm{real,even}}} \|\cos nt + T(t)\|_{\infty} = \|\cos nt\|_{\infty}.$$

Тригонометрическая задача может быть решена отличным от альтернанса методом с помощью усреднения по дискретной подгруппе тора $\mathbb{T}$, состоящей из точек $t_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. При этом условие четности полиномов можно будет отбросить (см. [5]). Этот метод обобщается на произвольные нормы, инвариантные относительно сдвига. В частности, С.Н. Бернштейн доказал [125], что для всех $p \in [1, \infty]$ в пространстве $L^p(\mathbb{T})$

$$\min_{T \in \mathcal{T}_{n-1}} \|\cos n(t-\tau) + T(t)\|_p = \|\cos nt\|_p. \tag{7}$$

Действительно, для любых $T \in \mathcal{T}_{n-1}$ и $t \in \mathbb{T}$ имеем $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T(t - t_k) = c_0$, поэтому по неравенству треугольника, инвариантности нормы и периодичности, влекущей $\cos n(t + t_k - \tau) = \cos n(t-\tau)$, находим

$$\|\cos n(t-\tau) + c_0\|_p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|\cos n(t-\tau) + T(t-t_k)\|_p = \|\cos n(t-\tau) + T(t)\|_p.$$

Делая здесь сдвиг переменного $t + \frac{\pi}{n}$, получаем

$$\|\cos n(t-\tau) - c_0\|_p \leqslant \|\cos n(t-\tau) + T(t)\|_p,$$

поэтому вновь по неравенству треугольника $\|\cos n(t-\tau)\|_p \leqslant \|\cos n(t-\tau) + T(t)\|_p$, где равенство будет на нулевом полиноме. Данный подход обобщался на многомерный случай Н.Н. Андреевым и В.А. Юдиным [5].

Из (7) следует, что

$$\min_{T \in \mathcal{T}_n^{\mathrm{real,odd}}} \|\sin(n+1)t + T(t)\|_1 = \|\sin(n+1)t\|_1, \tag{8}$$

откуда после обратной тригонометрической замены переменного вытекает результат Коркина–Золотарева (6). До сих пор мы писали задачи в основном для действительных полиномов, однако, как мы увидим, многие результаты остаются справедливыми и для комплекснозначных полиномов.

3.2. Эпоха Бернштейна и Джексона

Равенство (8) сводится к решению алгебраической L^1-задачи Чебышева и наоборот. Если делать тригонометрическую замену переменного, то появляется вес $|\sin t|$. По той же причине алгебраическая задача Маркова для производных не эквивалентна задаче для производных тригонометрического полинома. Впервые такое неравенство для четных тригонометрических полиномов $T_n \in \mathcal{T}_n$ доказал С.Н. Бернштейн (см. [100]): для $M = \mathbb{T}$ имеем

$$\|T_n^{(r)}\|_\infty \leqslant n^r \|T_n\|_\infty.$$

Впоследствии усилиями Э. Ландау ($p = \infty$, произвольные не обязательно четные действительные полиномы), М. Рисса ($p = \infty$, комплексные полиномы), А. Зигмунда ($p \geqslant 1$), В.В. Арестова ($0 \leqslant p < 1$) это неравенство было доказано в максимальной степени общности [100]: для всех $p \in [0, \infty]$ справедливо точное неравенство

$$\|T_n^{(r)}\|_p \leqslant n^r \|T_n\|_p \tag{9}$$

или $\mathcal{C}_{pp}^{\partial^r}(\mathcal{T}_n) = n^r$ (определение 0-квазинормы см. в [6]). Полиномы $C \cos n(t - \tau)$ являются экстремальными.

А. Зигмунд использовал интерполяционную формулу М. Рисса вида

$$T_n'(t) = \sum_{j=1}^{2n} a_j T_n(t + t_j), \quad \sum_{j=1}^{2n} |a_j| = n, \quad t_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad a_j = \frac{(-1)^{j+1}}{4n \sin^2 \frac{t_j}{2}}, \tag{10}$$

и неравенство Гёльдера, доступное при $p \geqslant 1$. При $p < 1$ на это неравенство нельзя опираться и задача оказалась особенно трудной. С неточной константой она была решена В.И. Ивановым [76] и, независимо, Э.А. Стороженко, В.Г. Кротовым и П. Освальдом [118], см. также [14]. Окончательное решение классической задачи Бернштейна было найдено В.В. Арестовым [6] методами теории функций комплексного переменного. Относительно простой вариант доказательства см. в [38]. На наш взгляд, многие нерешенные задачи для действительных полиномов требуют выхода в комплексную область. Однако здесь мы стараемся оставаться в рамках теории функций действительного переменного.

Разные способы доказательства точного неравенства Бернштейна (9) можно найти в [110]. Еще один вариант доказательства при $p \geqslant 1$ обобщенного неравенства Бернштейна методами положительно определенных функций был недавно предложен В.П. Заставным и А.Д. Мановым [132]. На случай однородных пространств $M = G/H$ порядковое неравенство Бернштейна изучалось И.З. Песенсоном [105]. Равенство $\mathcal{C}_{pp}^{\partial^r}(\mathcal{T}_n) = n^r$ для дробных $r \geqslant 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ установлено А.И. Козко (1998 г., см. обзор результатов в [9]). Разным вариантам неравенств для полиномов и общих мультипликаторных дифференциальных операторов посвящены многочисленные работы (см., например, результаты из [1, 6, 15, 100, 112]).

Если ∞-неравенство Бернштейна записать для полинома $P_n(\cos t)$, где $P_n \in \mathcal{P}_n$, то получим следующее неравенство типа Маркова в $L^\infty([-1, 1])$:

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}} \|P_n\|_\infty, \quad x \in (-1, 1),$$

при $x = 0$ ср. с (5). Заметим, что лучший на сегодня результат для алгебраического неравенства Маркова в пространстве $L^p([-1, 1])$ при $p \geqslant 1$ имеет вид

$$\mathcal{C}_{pp}^{\partial}(\mathcal{P}_n) \leqslant A(n, p) n^2$$

с неточной константой $A(n, p)$ (см. [100]). Порядковые неравенства Бернштейна — Никольского для разных интервалов изучала Н.К. Бари [16]. Наиболее общие порядковые результаты по проблеме братьев Марковых при $p \geqslant 1$, в том числе для алгебраического веса Гегенбауэра, получены С.В. Конягиным [82].

Следующий важный шаг в развитие тригонометрических неравенств в контексте задач теории приближений был сделан в 1933 г. Д. Джексоном [77]. Он при помощи неравенства Бернштейна вывел следующее неравенство Никольского в пространстве $L^p(\mathbb{T})$ при $p \geqslant 1$:

$$\|T_n\|_\infty \leqslant 2n^{1/p}\|T_n\|_p, \quad n \geqslant 1, \tag{11}$$

откуда следует, что

$$\mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{T}_n) \leqslant 2n^{1/p}. \tag{12}$$

Отметим, что в честь этого результата $p\infty$-неравенства Никольского также называют неравенствами Джексона–Никольского.

Идея доказательства Д. Джексона следующая. Пусть $T \in \mathcal{T}_n$, $\|T\|_\infty = |T(t_0)|$. Для $|t-t_0| \leqslant \frac{1}{2n}$ по теореме Лагранжа о среднем значении

$$|T(t_0)| - |T(t)| \leqslant |T(t) - T(t_0)| \leqslant \frac{\|T'\|_\infty}{2n} \leqslant \frac{\|T\|_\infty}{2}.$$

Отсюда $|T(t)| \geqslant \frac{\|T\|_\infty}{2}$ на интервале длины не менее $\frac{1}{n}$. Поэтому $\|T\|_p^p \geqslant \frac{(\|T\|_\infty/2)^p}{n}$, что влечет искомое неравенство (11).

Действуя аналогично с помощью ∞-неравенства Маркова для алгебраических полиномов Д. Джексон доказал, что в пространстве $L^p([-1,1])$

$$\mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{P}_n) \leqslant 2^{1+1/p}n^{2/p}, \quad n \geqslant 1, \quad p \geqslant 1.$$

Д. Джексон использовал данные результаты для оценки равномерного приближения непрерывной функции полиномами наилучшего приближения из других метрик L^p (см. п. 6.2).

Из (12) для $p = 1$ вытекает оценка

$$c_n = \mathcal{C}_{1\infty}(\mathcal{T}_n) \leqslant 2n,$$

однако, как мы увидим далее, она точная только по порядку. Мы выделяем эту проблему, поскольку она и родственные ей задачи сейчас активно исследуются в приложениях (см. разд. 6).

Я.Л. Геронимус [48] в 1938 г. получил следующий замечательный результат: величина c_n является наибольшим положительным корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \mu_0 \\ \overline{\mu_0} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\mu_1} & \overline{\mu_0} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\mu_n} & \overline{\mu_{n-1}} & \dots & \overline{\mu_0} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где числа $\mu_k = \mu_k(c_n)$ определяются из разложения

$$\operatorname{tg}\Big\{\frac{1}{4c_n}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} z^k\Big)\Big\} = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + \ldots .$$

Это красивый результат, однако, к сожалению, не очевидно, как из него получить простые оценки константы c_n по n, включая ее асимптотику при $n \to \infty$. Для доказательства Я.Л. Геронимус существенно использовал сведения из теории функций комплексного переменного.

Он отмечал, что проблема нахождения c_n является обобщением задач Чебышева. Результаты Я.Л. Геронимуса на случай неравенства Маркова с чебышевским весом переносились И.Е. Симоновым и П.Ю. Глазыриной [116].

В 1961 г. С.Б. Стечкин показал, что существует константа $c > 0$, такая что

$$c_n = cn + o(n), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Этот результат не был им опубликован и был сформулирован без доказательства в работе Л.В. Тайкова [119], в которой даны оценки

$$\frac{n}{\pi \operatorname{Si} \pi} + O(1) \leqslant c_n \leqslant \frac{2Gn}{\pi^2} + O(1), \quad \operatorname{Si} \pi = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt, \tag{14}$$

где G — постоянная Каталана. Отсюда следует, что $c \in (0.17187, 0.18562)$. Оценка снизу получена на полиномах Рогозинского. Для доказательства оценки сверху Л.В. Тайков применяет интерполяционную формулу Рисса в соотношении двойственности, восходящем к С.Н. Бернштейну и близком к неравенству Бору. Далее мы покажем, как двойственность помогает при решении более общих задач (см. п. 4.11). Впоследствии Л.В. Тайков приводит доказательство С.Б. Стечкина равенства (13) в работе [121], посвященной приближению ядер Дирихле ортогональными тригонометрическим полиномам функциями.

Здесь мы сделаем перерыв и вернемся к константе c_n далее, поскольку необходимо сказать о результатах для целых функций экспоненциального типа. Данная тематика стала активно развиваться приблизительно с 1930-х годов прошлого века стараниями С.Н. Бернштейна, М.Г. Крейна, Н.И. Ахиезера, Р. Пэли, Н. Винера, Р.Ф. Боаса, Б.Я. Левина, Д. Полиа, Г. Сеге и многих других математиков. Во многом она шла параллельно задачам для тригонометрических полиномов. Многие классические результаты можно найти в книгах [20, 125, 1, 89].

Пусть $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma^\infty$ — множество всех целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на $\mathbb{R}$. Для таких функций $f(z)$ справедлива оценка $|f(z)| \leqslant \|f\|_{\infty;\mathbb{R}} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. [89]). Наименьшее σ называется типом функции. Множество $\mathcal{E}_\sigma$ часто называется классом Бернштейна. В действительном анализе и теории приближений особую роль играют классы L^p-ограниченных на оси функций $\mathcal{E}_\sigma^p = \mathcal{E}_\sigma \cap L^p(\mathbb{R})$. Все эти классы при $p > 0$ содержатся в $\mathcal{E}_\sigma$, поскольку $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_p$, где C зависит только от p и σ (следствие теоремы Планшереля–Полиа [89]). Эта константа как раз уточняется неравенством Никольского.

Имеет место следующий аналог интерполяционной формулы Рисса (10) (см. [1]): для произвольной функции $f \in \mathcal{E}_\sigma$

$$f'(x) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(\pi k - \pi/2)^2}\, f\Big(x + \frac{\pi k - \pi/2}{\sigma}\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда применением неравенства Гёльдера, инвариантности $L^p(\mathbb{R})$-нормы относительно сдвига и равенства $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\pi k - \pi/2)^2} = 1$ выводится точное неравенство Бернштейна в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, \infty]$ для производных целых функций экспоненциального типа:

$$\|f^{(r)}\|_p \leqslant \sigma^r \|f\|_p, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

На сложный случай $p \in (0, 1)$ оно было перенесено Q.I. Rahman и G. Schmeisser [111]. Для дробных $r \geqslant 1$ и производной Лиувилля при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ неравенство Бернштейна вида (15) доказано П.И. Лизоркиным [97].

Аналог тригонометрического неравенства Джексона (11) для целых функций экспоненциального типа был установлен в 1949 г. J. Korevaar [84] в таком виде:

$$\|f\|_\infty \leqslant (A_p p\sigma)^{1/p} \|f\|_p, \quad f \in \mathcal{E}_\sigma^p, \tag{16}$$

где $A_1 = \frac{1}{\pi}$, $A_p = \frac{2^k}{p\pi} < \frac{1}{\pi}$, $2^k < p \leqslant 2^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для наилучшей константы A_p^* были даны границы $\frac{1}{2p\pi} \leqslant A_p^* \leqslant \frac{1}{p\pi}$ для $1 \leqslant p < 2$, $\frac{1}{p\pi} < A_p^* < \frac{1}{\pi}$ для $p > 2$, $A_2^* = \frac{1}{2\pi}$ — точное значение.

3.3. Эпоха Никольского

Важный шаг в теории неравенств для полиномов и целых функций экспоненциального типа был сделан С.М. Никольским в 1951 г. [102] (см. также книгу [103]). Собственно, после его работ мы получили термин неравенства Никольского. С.М. Никольский рассмотрел многомерные варианты неравенства Джексона–Кореваара и дал оценку сверху не только для супремум-нормы функции, но и для произвольных норм L^q.

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Если $x, y \in \mathbb{R}^d$, то $xy = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ — скалярное произведение векторов x, y, $|x| = (xx)^{1/2}$ — евклидова длина вектора x. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — некоторый компакт (тело), $n \geqslant 0$, $\mathcal{T}_n(\Omega)$ — множество тригонометрических полиномов $T(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\cap n\Omega} c_k e^{ikx}$ от d переменных с комплексными коэффициентами и спектром в множестве $n\Omega$. Мы ограничимся только случаем выпуклых 0-симметричных тел Ω, из которых основными будут куб $\Omega = [-1,1]^d$ и единичный евклидов шар $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| \leqslant 1\}$. Однако случай невыпуклых тел Ω, например гиперболических крестов, не менее важен и в нем до сих пор много загадок. Неравенства Бернштейна — Никольского и их приложения для гиперболических крестов изучался в работах К.И. Бабенко, С.А. Теляковского, Б.С. Митягина и, особенно, В.Н. Темлякова (см. [122, 123] и библиографию там).

Похожим образом вводятся классы целых функций экспоненциального типа со спектром в множестве $\sigma\Omega$ для $\sigma > 0$ (см., например, [117, 103, 47, 101], весовой вариант [59]). Именно, через $\mathcal{E}_\sigma(\Omega) = \mathcal{E}_\sigma^\infty(\Omega)$ обозначим множество целых функций f от d комплексных переменных, таких что их сужения на $\mathbb{R}^d$ ограничены и их d-мерное преобразование Фурье

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ixy}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

(понимаемое здесь как распределение) имеет носитель в $\sigma\Omega$. Такие функции оцениваются как $f(z) = O(e^{\sigma\|\mathrm{Im}\,z\|_{\Omega^*}})$ для $z \in \mathbb{C}^d$, где $\|z\|_{\Omega^*} = \sup\{|zx| \colon x \in \Omega\}$, Ω^* — поляра тела Ω. Также как в одномерном случае класс $\mathcal{E}_\sigma(\Omega)$ для $p > 0$ содержит подклассы $\mathcal{E}_\sigma^p(\Omega) = \mathcal{E}_\sigma(\Omega) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$. При этом $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_p$, где C зависит от d, p, $\sigma\Omega$. Точная константа как раз дается неравенством Никольского. В случае шара $\Omega = B^d$ следуя С.М. Никольскому говорим о целых функциях экспоненциального сферического типа.

С.М. Никольский доказал, что для $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{pq}(\mathcal{T}_n([-1,1]^d)) \leqslant (2n)^{d(1/p-1/q)}, \\ &\mathcal{C}_{pq}(\mathcal{E}_\sigma([-1,1]^d)) \leqslant (2\sigma)^{d(1/p-1/q)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Для доказательства этих результатов он вывел многомерные интерполяционные формулы типа Рисса. Основное приложение данные результаты нашли в теории приближений, включая обратные теоремы Джексона, описания классов Никольского–Бессова (см. п. 6.1, [103]). С.М. Никольский рассматривал задачи для параллелепипедов, однако при помощи аффинной замены переменного все сводится к случаю куба. Аналогичная ситуация наблюдается для случая шара и общего эллипсоида. Мы здесь не концентрируемся на этом вопросе.

Заметим, что при $q \leqslant p$ для компактных M работает неравенство Гёльдера, поэтому в теории констант Никольского интересно рассматривать случай $q > p$. Для некомпактных M условие $q > p$ также по-существу. Действительно, при $q = p$ константа равна 1, а при $q < p$ можно взять пример нормированной функции Бесселя $j_\alpha(x) = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(x)}{x^\alpha}$ на $M = \mathbb{R}$ при $\alpha \geqslant -1/2$ (ее свойства компактно изложены, например, в [53]). Функция j_α является четной целой функций экспоненциального типа 1 и $j_\alpha(x) = C_1 x^{-\alpha-1/2}(\cos(x - C_2) + O(x^{-1}))$ при $x \to \infty$. Поэтому при $q < p$ нетрудно подобрать α, так чтобы $j_\alpha \in L^p(\mathbb{R})$, но $j_\alpha \notin L^q(\mathbb{R})$. А вот для неравенств Бернштейна значения $q \leqslant p$ интересны. Случай $q = p$ — классический, а $q < p$ на примере тригонометрических полиномов см., например, в [120].

С.М. Никольский также показал, что второе неравенство в (17) точно в смысле порядка по σ. Для оценки снизу он использовал ядро Фейера $f_\sigma(x) = \prod_{i=1}^d \Bigl(\frac{\sin\frac{\sigma x_i}{2}}{x_i}\Bigr)^2$, для которого заменой переменного получаем $\frac{\|f_\sigma\|_q}{\|f_\sigma\|_p} = \sigma^{d(1/p-1/q)}\frac{\|f_1\|_q}{\|f_1\|_p}$. На самом деле, если D — однородный дифференциальный оператор порядка $r \geqslant 0$, то для целых функций экспоненциального типа функционал $\frac{\|Df\|_q}{\|f\|_p}$ также будет однородным порядка $\lambda^{r+d(1/p-1/q)}$ относительно растяжения $f(\lambda x)$. Поэтому вместо ядра Фейера можно брать произвольную функцию $f \neq 0$, причем

$$\mathcal{C}_{pq}^D(\mathcal{E}_\sigma(\Omega)) = \sigma^{r+d(1/p-1/q)}\mathcal{C}_{pq}^D(\mathcal{E}_1(\Omega)).$$

Другими словами, в данном случае неравенство Бернштейна — Никольского достаточно изучать для $\sigma = 1$. Чтобы показать точность порядка тригонометрической константы обычно используется периодическое Фейера $\prod_{i=1}^d \Bigl(\frac{\sin\frac{nx_i}{2}}{\sin\frac{x_i}{2}}\Bigr)^2$ (см. разд. 4). Подход к доказательству многомерных вариантов неравенств Бернштейна — Никольского при помощи интерполяционных формул получил развитие в работах И. Песенсона [106, 107].

Неравенства Никольского (17) были уточнены И.И. Ибрагимовым и А.С. Джафаровым в работе [73]:

$$\mathcal{C}_{pq}(\mathcal{E}_\sigma([-1,1]^d)) \leqslant \Bigl(\frac{p_0\sigma}{\pi}\Bigr)^{d(1/p-1/q)}, \quad p_0 = \lceil \tfrac{p}{2} \rceil. \tag{18}$$

При $d = 1$ эта оценка (как и некоторые другие результаты по неравенствам Бернштейна — Никольского) содержится в известной книге по теории приближений А.Ф. Тимана [125]. Она пересекается с оценкой Кореваара (16). В работе [73] также приведены некоторые многомерные неравенства Бернштейна — Никольского для целых функций экспоненциального типа при $1 \leqslant p \leqslant 2$. Мы приведем метод их получения в общей формулировке в п. 4.7. Пока отметим, что порядковые неравенства Бернштейна — Никольского для всех $p \neq q$ можно выводить из оценки $\mathcal{C}_{pq}^D(Y) \leqslant \mathcal{C}_{qq}^D(Y)\mathcal{C}_{pq}(Y)$ (см. п. 4.1). Например, пусть $Y = \mathcal{E}_\sigma([-1,1]^d)$, $D = \partial_{x_1}^r$. Тогда по одномерному неравенству Бернштейна $\mathcal{C}_{qq}^D(Y) \leqslant \sigma^r$. Отсюда и из (18) находим точную по порядку при $\sigma > 0$ оценку $\mathcal{C}_{pq}^D(Y) \leqslant C\sigma^{r+d(1/p-1/q)}$, которая согласуется с (1). К сожалению, данный подход не дает точных констант, поскольку в точных неравенствах Бернштейна и Никольского разные экстремальные функции.

Для тригонометрических полиномов неравенство Никольского уточнялось при $d = 1$ А.Ф. Тиманом [125] и Z. Ziegler [133], для $d \geqslant 1$ И.И. Ибрагимовым [72] и Н.М. Сабзиевым (1965 г., см. [101]):

$$\mathcal{C}_{pq}(\mathcal{T}_n([-1,1]^d)) \leqslant \Bigl(\frac{2p_0 n + 1}{2\pi}\Bigr)^{d(1/p-1/q)}. \tag{19}$$

Это неравенство точное при $p = 2$, $p_0 = 1$.

Исторически работа [133] появилась заметно позже работ И.И. Ибрагимова и А.Ф. Тимана и в ней затрагивается только случай $q = \infty$. Однако Z. Ziegler приводит характеризацию экстремального тригонометрического полинома при $d = 1$. Именно, для $1 \leqslant p < \infty$ экстремальный полином T_n^* для задачи $\mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{T}_n)$ существует и единственный (с точностью до умножения на константу). Он четный, все его $2n$ нулей лежат на $(-\pi, \pi)$ и справедливо соотношение ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} |T_n^*(t)|^{p-1}\operatorname{sign} T_n^*(t)\,(\cos kt - 1)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

Заметим, что данные соотношения вытекают из общих фактов теории приближений, опубликованных приблизительно в тоже время в книгах [114, 85] (см. также п. 4.9). Кроме того, Z. Ziegler установил интересный факт о перемежаемости нулей полиномов T_n^* и T_{n+1}^*, что характерно для ортогональных полиномов [113]. Этот нетривиальный факт был значительно обобщен в работе [108]. Также в работе [133] вычислена константа $\mathcal{C}_{2\infty}(\mathcal{T}_n)$, однако данный результат покрывается (19).

Заметим, что при $p = 1$ характеризацию экстремального полинома использовал еще Я.Л. Геронимус [48]. Соотношения вида (20) можно применять для приближенного вычисления констант Никольского для заданных n, сводя (20) к системе нелинейных уравнений относительно корней экстремального полинома. Данный вопрос кажется частным, однако в свете взаимосвязи между константами для полиномов и функций, а также приложений констант Никольского это начинает приобретать интересный смысл (см. далее п. 3.4, разд. 6). Данный подход получил развитие в серии работ автора и И.А. Мартьянова [61, 62, 99, 64, 65, 66].

Годом ранее в 1976 г. D. Amir и Z. Ziegler [2] доказали родственные результаты для одномерной константы Никольского в случае алгебраических полиномов, включая соотношение ортогональности при $p \geqslant 1$ и оценки, которые далее мы называем базовыми (см. п. 4.7). В частности, для $p = 1$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ в пространстве $L^1([-1,1])$ имеем

$$0.5(n+1)^2 \geqslant M_n \geqslant 0.125 \begin{cases} (n+2)^2, & n \text{ четное,} \\ (n+1)(n+3), & n \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{21}$$

где $M_n = \mathcal{C}_{1\infty}(\mathcal{P}_n)$. Аналогичная оценка сверху получена T.K. Ho (тоже в 1976 г., см. [100]). Эти оценки были усилены в работе [65] (см. (26)).

В некоторой завершенной форме оценки констант Никольского для разных множеств Ω, покрывающие (17), (18), доказали в 1978 г. R.J. Nessel и G. Wilmes в известной работе [101] (в ней также есть хороший обзор предшествующих результатов). В отличие от предыдущих результатов здесь уже включается случай p, q, меньших 1. Пусть $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{pq}(\mathcal{T}_n(\Omega)) &\leqslant \Big(\frac{|p_0 n\Omega \cap \mathbb{Z}^d|}{(2\pi)^d}\Big)^{1/p-1/q}, \\ \mathcal{C}_{pq}(\mathcal{E}_\sigma(\Omega)) &\leqslant \Big(\frac{|p_0\sigma\Omega|}{(2\pi)^d}\Big)^{1/p-1/q}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $|A|$ для множества A обозначает либо число элементов, если A конечное, либо меру, если A измеримо (обычно применяемая мера ясна из контекста). Например, $|p_0\sigma[-1,1]^d| = (2p_0\sigma)^d$ (объем), что влечет (18). Неравенства (22) точные только при $(p,q) = (2,\infty)$. Новым интересным случаем здесь является случай шара $\Omega = B^d$. Например, С.М. Никольский исследовал этот случай, заключая шар в кубы, что приводит к понятным потерям точности в константах по размерности пространства d.

Также в работе [101] намечен универсальный подход к получению базовых оценок вида (18), (22) основанный на оценках воспроизводящего ядра подпространства Y (ядра Дирихле). Мы дадим его в п. 4.7. Заметное улучшение базовых оценок по разным параметрам, например, экспоненциальное по размерности d, является весьма нетривиальной проблемой. Один пример приводится далее (см. (32)). В связи с ним напомним, что для целых функций экспоненциального типа в силу однородности функционала в константе Никольского достаточно изучать случай $\sigma = 1$.

Одномерные тригонометрические полиномы можно эквивалентно рассматривать заданными как на торе $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, так и на единичной окружности $\mathbb{S}^1$. При многомерном обобщении возникают уже неэквивалентные конструкции полиномов либо на многомерном торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d = (-\pi,\pi]^d$ (тригонометрические полиномы) либо на многомерной единичной сфере $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \colon |x| = 1\}$ (сферические полиномы). Другими словами, начинает играть роль структуры пространства M и гармонического анализа на нем. С точки зрения теории римановых симметрических многообразий тор $\mathbb{T}^d$ является компактным пространством ранга d, а сфера $\mathbb{S}^d$ относится к классу компактных пространств ранга 1, который включает также проективные пространства (см., например, [70, 87, 29]).

Аналогичная ситуация с двойственностью гармонического анализа возникает для евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 2$, которое, с одной стороны, можно рассматривать как абелеву группу по сложению, а с другой как фактор пространство группы всех движений $\mathbb{R}^d$ по подгруппе собственных вращений $SO(d)$.

Порядковые результаты для констант Никольского в случае сферы $\mathbb{S}^d$ были установлены А.И. Камзоловым [80]. Пусть Π_n^d — подпространство сферических полиномов порядка не выше n — сужений на сферу алгебраических полиномов

$$f(x_1, \ldots, x_{d+1}) = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_{d+1} \in \mathbb{Z}_+ \\ k_1 + \ldots + k_{d+1} \leqslant n}} c_{k_1 \ldots k_{d+1}} x_1^{k_1} \ldots x_{d+1}^{k_{d+1}} \tag{23}$$

степени не выше n. Тогда при фиксированных d, $p, q \geqslant 1$

$$\mathcal{C}_{pq}(\Pi_n^d) \asymp n^{d(1/p-1/q)_+}, \quad n \to \infty.$$

Много порядковых вариантов классических неравенств для многомерной сферы, в том числе с весом, впоследствии было получено F. Dai и Yu. Xu [36]. А.И. Камзоловым также рассмотрел случай сферических гармоник порядка n, который особенно сложен. Подпространство гармоник изучались в работе [31] (см. также библиографию там). Также отметим работу [32], где доказываются неравенства Никольского для лакунарных полиномов на сфере, множество которых, в каком-то смысле, занимают промежуточное положение между гармониками порядка n и всеми сферическими полиномами порядка не выше n. Также отметим работу М.В. Дейкаловой [37], которая получила оценку сверху константы $\mathcal{C}_{1\infty}(\Pi_n^d)$ при $p = 1$, эквивалентную оценке на основе воспроизводящего ядра из п. 4.7. Из результатов работы [17] можно вывести случай общих p. Мы излагаем этот подход в п. 4.7.

Ранее в 1974 г. А.И. Камзолов [78] изучил неравенство Бернштейна для случая d-мерных компактных многообразий $M = M_d$ ранга 1. Пусть $\Pi_n(M) = \bigoplus_{l=0}^n V_l$ — подпространство полиномов степени не выше n на M, V_l — инвариантные подпространства (гармоники), на которых действуют неприводимые представления класса 1 группы движений пространства M, Δ_M — оператор Лапласа–Бельтрами на M, дробная степень которого на $\Pi_n(M)$ определяется как мультипликатор по свойству $\Delta_M V_l = -\lambda_l V_l$, где $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ — собственные значения. Имеем $\dim \Pi_n(M) \asymp n^d$, $\lambda_l \asymp l^2$. А.И. Камзолов доказал аналог интерполяционной формулы Рисса, откуда вывел оценку $\mathcal{C}_{pp}^{\Delta_M}(\Pi_n(M)) \leqslant c_M d n^2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, где $c_M = 1, 2, 4$ соответственно для сферы, комплексного и кватернионного проективного пространства. Причем эта оценка точная для $p = \infty$. А.И. Камзолов также рассмотрел случай евклидова пространства, который мы упомянем далее.

В работе 1983 г. [74] В.А. Иванов доказал общее порядковое неравенство Бернштейна — Никольского при $p, q \geqslant 1$ для компактных многообразий ранга 1: для $r \geqslant 0$ и $n \to \infty$

$$\mathcal{C}_{pq}^{(-\Delta_M)^{r/2}}(\Pi_n(M)) \asymp n^{r+d(1/p-1/q)_+}.$$

Для сферы и $p = q$ этот результат также установлен А.И. Камзоловым [79]. На случай сферы, в том числе с весом, и $p > 0$ данный результат относительно недавно обобщался в работах F. Dai и S. Tikhonov [30, 35].

В 1992 г. В.А. Ивановым [75] были вычислены константы $\mathcal{C}_{pq}(\Pi_n(M), (-\Delta_M)^{r/2})$ для пар $(p, q) = (2, 2)$, (∞, ∞), $(2, \infty)$. В случае $(p, q) = (2, 2)$, $(2, \infty)$ есть общая методика их получения, данная в п. 4.7, поэтому здесь эти значения не приводятся. Также им была вычислена константа Бернштейна $\mathcal{C}_{\infty\infty}^{(-\Delta_M)^{r/2}}(\Pi_n(M))$ для всех целых r и дробных $r \geqslant r_0$ (высказана гипотеза, что $r_0 = 1$). Случай $r = 2$ был установлен в [78]. В отличие от формулы Рисса [78], В.А. Иванов для доказательства с целыми r использовал оригинальную идею, сведя задачу к применению общего неравенства братьев Марковых (4) и замечательного факта, что для всех производных экстремальным является один и тот же полином Чебышева первого рода. Решение выписывается достаточно громоздко, главное что экстремальным полиномом является зональный полином $\cos n\rho(x, o)$, где ρ — метрика на M.

Как отмечает В.А. Иванов [75], в одномерном случае для тригонометрических полиномов и дробных r получается производная Рисса $(-\partial_t)^{r/2}T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} |k|^r c_k e^{ikt}$, которая отличается от дробной производной Вейля $T_n^{(r)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} (ik)^r c_k e^{ikt}$ (они совпадают при четных r). Для производной Вейля точное неравенство Бернштейна $\|T_n^{(r)}\|_p \leqslant n^r \|T_n\|_p$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $r \geqslant 1$, как упоминалось выше, доказано А.И. Козко. Для $0 < r < 1$ известны только оценки наилучшей константы. Случай $p < 1$ для нецелых r открыт (см. обзор результатов в [9]).

Идеи из [75] были использованы в работе [56] для вычисления точной константы Бернштейна в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ для целых функций экспоненциального сферического типа и степени дифференциально-разностного оператора Лапласа–Данкля. В случае первой степени обычного оператора Лапласа и подпространств целых функций экспоненциального типа, отвечающих кубу и шару, это было сделано А.И. Камзоловым в 1974 г. [78]. Данные результаты выводятся из одномерного неравенства Бернштейна, однако им было предложено альтернативное доказательство на основе аналога интерполяционной формулы Рисса. Здесь также стоит отметить последующую работу С.С. Платонова [109], где интерполяционная формула типа Рисса строится для случая полуоси $\mathbb{R}_+$ со степенным весом $x^{2\alpha+1}$, $\alpha \geqslant -1/2$, что также позволяет доказать точное pp-неравенство Бернштейна при $p = 2, \infty$. Для других $p \neq 2, \infty$ в многомерных и весовых вариантах неравенства Бернштейна с точными константами остаются неизвестными. Порядковые одномерные весовые неравенства Бернштейна можно найти в работе D.S. Lubinsky [94]. Общие порядковые неравенства Бернштейна — Никольского в пространстве $L_v^p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом Данкля v для целых функций экспоненциального сферического типа и степени оператора Лапласа–Данкля доказаны в недавних работах автора совместно с В.И. Ивановым и С.Ю. Тихоновым [59, 57].

3.4. Современная эпоха

Теперь вернемся к тригонометрической константе $c_n = \mathcal{C}_{1\infty}(\mathcal{T}_n)$. Пусть $L = \mathcal{C}_{1\infty}(\mathcal{E}_1)$ — константа для целых функций экспоненциального типа не выше 1. В 2005 г. автором в работе [51] было доказано, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$nL \leqslant c_n \leqslant (n+1)L. \tag{24}$$

Отсюда, очевидно, вытекает асимптотика

$$c_n = Ln(1 + O(n^{-1})), \quad n \to \infty, \tag{25}$$

несколько усиливающая результат С.Б. Стечкина (13). Также в [51] показано, что $L = \sup \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\|\varphi\|_1}$, где супремум берется по всем четным функциям $\varphi \in C(\mathbb{R})$, для которых $\operatorname{supp} \varphi \subset [-1, 1]$. В таком виде данная задача изучалась в работе [3] (с исправлением [4]), где доказаны границы $\frac{1}{\pi \operatorname{Si} \pi} \leqslant L \leqslant \frac{\operatorname{Si} \pi}{\pi^2}$, откуда $L \in (0.17187, 0.18765)$ (ср. с границами Тайкова (14)). В [51] нижняя и верхняя граница были уточнены, именно $L \in (0.17218, 0.17471)$. В недавней работе [25] отмечается важность задачи вычисления константы Никольского L в контексте приложений в аналитической теории чисел (см. п. 6.6).

Приближенное значение константы L с несколькими значками было вычислено в 1993 г. L. Hörmander и B. Bernhardsson [71] при выводе двумерного неравенства Бора: $L \approx 0.172182$.

Они планировали найти константу L, однако им это не удалось. Данная задача остается открытой.

Другим методом на основе (24) и (20) константа L была оценена в работе [61]. Именно, по (24) имеем $\frac{c_n}{n+1} \leqslant L \leqslant \frac{c_n}{n}$. Константу c_n можно вычислить приближенно для достаточно больших n из уравнений (20) при $p = 1$, если записать их в виде системы нелинейных уравнений для неизвестных корней экстремального полинома. Вычисляя эти корни, находим c_n по формулам, аналогичным [2, 10]. Данный прием использовался в работах [65, 66] для уточнения тригонометрических и алгебраических констант Бернштейна — Никольского. Например, имеем $M_n = \mathcal{C}_{1\infty}(\mathcal{P}_n) = 2\mathcal{C}^{\partial}_{1\infty}(\mathcal{T}_{n+1})$ и при $n \in \mathbb{Z}_+$

$$n^2\mathcal{C}^{\partial}_{1\infty}(\mathcal{E}_1) \leqslant \mathcal{C}^{\partial}_{1\infty}(\mathcal{T}_n) \leqslant (n+1)^2\mathcal{C}^{\partial}_{1\infty}(\mathcal{E}_1).$$

Отсюда в [65] получены более сильные по сравнению с (21) оценки

$$(n+1)^2 M \leqslant M_n \leqslant (n+2)^2 M, \quad M \in (0.1440, 0.1441), \tag{26}$$

где $M = 2\mathcal{C}^{\partial}_{1\infty}(\mathcal{E}_1)$. Так же как в случае L точная константа M здесь неизвестна. Заметим, что асимптотика $M_n = Mn^2(1 + o(1))$ и включение $M \in (0.141, 0.192)$ были также доказаны в работе [34], посвященной многомерной сфере.

На наш взгляд, большой прогресс в области точных неравенств Бернштейна — Никольского связан с серией результатов по доказательству асимптотических равенств вида (2). В 2015 г. E. Levin и D. Lubinsky в работе [96] (см. также [95]) обобщили результаты С.Б. Стечкина (13) и автора (25) на случай пространств L^p при $p > 0$. Именно, они доказали, что

$$c_{np} = L_p n^{1/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad 0 < p < \infty, \tag{27}$$

где $c_{np} = \mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{T}_n)$, $L_p = \mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{E}_1)$. В какой-то степени данный результат объединяет задачи для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Для сравнения единственный известный точный результат отвечает $p = 2$ и имеет вид $c_{n2} = (n + 1/2)^{1/2} L_2$, где $L_2 = \frac{1}{\pi}$ (см. выше оценку J. Korevaar (16)). Технически доказательство (27) опирается на периодизацию на основе формулы суммирования Пуассона.

Сразу заметим, что в случае $q \neq \infty$ результат типа (27) не доказан (есть только нужная оценка снизу) и это важная открытая проблема, которую E. Levin и D. Lubinsky отмечают специально.

Также обратим внимание на работу D. Lubinsky [93], где доказывается похожий на (27) результат о связи констант в неравенствах Марцинкевича–Зигмунда и Планшереля–Полиа.

По аналогии с (24) данный результат был усилен в работе [61]. Именно для всех $p > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$n^{1/p} L_p \leqslant c_{np} \leqslant (n + \lceil \tfrac{1}{p} \rceil)^{1/p} L_p. \tag{28}$$

Мы приведем доказательство этих неравенств даже в большей общности в разд. 5. В связи с данным результатом отметим доказанное в работе [13] идейно схожее неравенство

$$\alpha_p \leqslant A_{np} \leqslant \alpha_p(1 + n^{-1}), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

где $\alpha_p = \pi\|\cos t\|_{p'}^{-1}$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель, $A_{np} = \inf \|T_n\|_p$ и нижняя грань берется по всем действительным полиномам $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, для которых

$$\|\widehat{T}_n\|_\infty = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|, |b_1|, \dots, |b_n|\} = 1.$$

Кроме того, $A_{np} = \alpha_p$, если $p' = 2, 4, \dots$ и $n \geqslant p' - 1$. Схожесть заключается в том, что $c_{np}^{-1} = \inf \|T_n\|_p$, $\|T_n\|_\infty = 1$ (различие в нормировках).

На случай неравенства Бернштейна — Никольского результат Левина — Любинского был перенесен M. Ganzburg и S. Tikhonov [46]: для всех $r \in \mathbb{Z}_+$

$$c_{np}^{(r)} = L_p^{(r)} n^{r+1/p}(1+o(1)), \tag{29}$$

где $c_{np}^{(r)} = \mathcal{C}_{p\infty}^{\partial^r}(\mathcal{T}_n)$, $L_p^{(r)} = \mathcal{C}_{p\infty}^{\partial^r}(\mathcal{E}_1)$. В этой работе также было доказано существование экстремальных полинома $\tilde{T}_{nr} \in \mathcal{T}_n$ и функции $\tilde{F}_r \in \mathcal{E}_1^p$ с единичными p-нормами, для которых $c_{np}^{(r)} = \tilde{T}_{nr}^{(r)}(0)$ и $L_p^{(r)} = \tilde{F}_r^{(r)}(0)$. Заметим, что вопрос существования иногда нетривиален и в общей ситуации затрагивается в п. 4.3. В [46] были использованы свойства полиномов Левитана, которые конструируются на основе формулы суммирования Пуассона.

В работе [62] и последующем исправлении [63] результат Ганзбурга–Тихонова (29) был уточнен. Пусть для $s \in \mathbb{N}$

$$\Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^{2s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A_{sk}(2\pi x)^{2k}}{(2k)!}, \quad A_{s0} = 1, \quad A_{sk} > 0.$$

Тогда для $s = \lceil \frac{r+1}{2} \rceil$

$$c_{np}^{(r)} \geqslant (n-s+1)^{r+1/p}\Bigg(L_p^{(r)} + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(-1)^i \binom{r}{2i} A_{si}}{n^{2i}}\, \tilde{F}_r^{(r-2i)}(0)\Bigg)$$

и для $s = \lceil \frac{1}{p} \rceil$

$$c_{np}^{(r)} + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{si} \tilde{T}_{nr}^{(r-2i)}(0) \leqslant (n+s)^{r+1/p} L_p^{(r)},$$

где $|\tilde{T}_{nr}^{(r-2i)}(0)| \leqslant n^{r-2i}(n + \lceil \frac{1}{p} \rceil)^{1/p} L_p$. Данные неравенства позволяют оценить остаточные члены в асимптотическом равенстве (29).

В [62, 63] выдвинута открытая гипотеза, что знаки ненулевых коэффициентов Тейлора $\tilde{T}_{nr}^{(j)}(0)$, $\tilde{F}_r^{(j)}(0)$ чередуются. Если она верна, то при всех $p \in (0, \infty]$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geqslant \lceil \frac{r+1}{2} \rceil - 1$ ($n \geqslant 1$ при $r = 1$) будет

$$(n - \lceil \tfrac{r+1}{2} \rceil + 1)^{r+1/p} L_p^{(r)} \leqslant c_{np}^{(r)} \leqslant (n + \lceil \tfrac{1}{p} \rceil)^{r+1/p} L_p^{(r)}.$$

Для случая алгебраической константы Никольского имеем аналогичные результаты, которые вытекают из общих неравенств для веса Гегенбауэра [66] (см. (35) и разд. 5).

Следующий важный шаг в направлении доказательства асимптотических равенств типа Левина — Любинского был сделан в совместной работе автора [33], где изучен случай многомерной сферы $\mathbb{S}^d$ и сферических полиномов. Именно, при фиксированной размерности $d \in \mathbb{N}$ для всех $0 < p < \infty$

$$\mathcal{C}_{p\infty}(\Pi_n^d) = \mathcal{L}_{dp} n^{d/p}(1+o(1)), \quad n \to \infty, \tag{30}$$

где $\mathcal{L}_{dp} = \mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{E}_1(B^d))$ — константа Никольского в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ для целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1.

На сфере неизвестен аналог периодизации по формуле Пуассона, поэтому доказательство (30) технически сложнее случая тора. Оно потребовало нетривиальные результаты из гармонического анализа на сфере, включая специальное приближение воспроизводящего ядра подпространства сферических полиномов, глубокий результат из работы [22] о существовании хорошо распределенных сферических дизайнов, оценки этих распределений и результаты типа Марцинкевича–Зигмунда для сферических полиномов.

Для многомерных тригонометрических и алгебраических полиномов равенство (30) обобщалось M. Ganzburg в цикле работ [41, 42, 43, 44, 45]. Им получено большое число обобщений равенств Левина — Любинского для многомерных задач Бернштейна — Никольского, включая сдвинутые задачи (см. 4.4). В частности, для тригонометрических полиномов со спектром в шаре имеем аналогичную (30) асимптотику [41]

$$\mathcal{C}_{p\infty}(\mathcal{T}_n(B^d)) = \mathcal{L}_{dp} n^{d/p}(1+o(1)), \quad p>0. \tag{31}$$

Она следует из общего равенства для констант Бернштейна — Никольского

$$\mathcal{C}^{D_s}_{p\infty}(\mathcal{T}_n(\Omega)) = \mathcal{C}^{D_s}_{p\infty}(\mathcal{E}_1(\Omega)) n^{s+d/p}(1+o(1)),$$

где D_s — однородный дифференциальный оператор порядка $s\in\mathbb{Z}_+$ (однородный полином от $\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_d}$ с постоянными коэффициентами).

Аналогичные результаты для сферы и сферических полиномов, куба и алгебраических полиномов можно найти в [40], но только для случая $p\geqslant 1$, когда можно сделать сдвиг максимума — замену при поиске супремума норм $\|Df\|_\infty$ функций значениями в фиксированной точке $|Df(o)|$ (подробнее см. п. 4.4). При $p<1$ со сдвигом максимума возникают проблемы. Поэтому, например, в работе [43] равенство типа Левина — Любинского в пространстве $L^p([-1,1]^d)$ для алгебраических полиномов доказано при $p>0$ только для случая неравенства Маркова для коэффициентов (см. (5)), которая изначально ставится для производных в нуле. Доказательство основных многомерных алгебраических неравенств Маркова–Никольского при $p<1$ является проблемой. Она решена только при $d=1$ (см. [66]).

В свете равенств (30), (31) особую важность приобретают хорошие оценки константы Никольского $\mathcal{L}_{dp}$. Базовая оценка сверху дается (22) при $\sigma=1$ и $\Omega=B^d$:

$$\mathcal{L}_{dp} \leqslant \Bigl(\frac{|B^d|}{(2\pi)^d}\Bigr)^{1/p} \lceil \tfrac{p}{2}\rceil^{d/p}, \quad p>0.$$

Для $p=2$ эта оценка точная. Из результатов работы [52] следует, что при фиксированном $p\geqslant 1$ и $d\to\infty$

$$\mathcal{L}_{dp} \geqslant \Bigl(\frac{|B^d|}{(2\pi)^d}\Bigr)^{1/p} \bigl(\tfrac{p}{2}\bigr)^{d(1+o(1))/p}.$$

Для четных $p\geqslant 2$ верхние и нижние оценки смыкаются. Интригующим является случай $p=1$. Заметим, что $\mathcal{L}_{11}=L$ и здесь можно воспользоваться оценками константы L. В общей ситуации при $d\geqslant 1$ имеем

$$\mathcal{L}_{d1} \leqslant A_d = \frac{|B^d|}{(2\pi)^d}.$$

Из результатов работы [37] следовало, что $\mathcal{L}_{d1}\geqslant e^{-d(1+o(1))}A_d$ при $d\to\infty$. Таким образом, наблюдается экспоненциальное расхождение в оценках $\frac{\mathcal{L}_{d1}}{A_d}$. Данные результаты были значительно усилены в работе [34], где доказано, что для всех $d\geqslant 1$

$$2^{-d} \leqslant \frac{\mathcal{L}_{d1}}{A_d} \leqslant {}_1F_2\Bigl(\frac{d}{2}; \frac{d}{2}+1, \frac{d}{2}+1; -\frac{\beta_d^2}{4}\Bigr) = (\sqrt{2/e})^{d(1+\varepsilon_d)}, \tag{32}$$

где $\sqrt{2/e}=0.857\ldots$ и $\varepsilon_d=O(d^{-2/3})$ при $d\to\infty$. Для $d=1$ имеем оценку $\mathcal{L}_{11}\leqslant 0.18764\ldots$, которая возникала выше.

В работе [34] для доказательства верхней оценки в (32) была решена экстремальная задача о приближении в L^∞ разложениями Фурье–Бесселя воспроизводящего ядра подпространства $\mathcal{E}^1_1(B^d)$. Данная задача вытекает из применения теории двойственности (см. п. 4.11). Доказательство оценки снизу в (32) базируется на решении при помощи квадратурной формулы по нулям воспроизводящего ядра (функции Бесселя) экстремальной задачи Турана. В случае полиномиальной константы Никольского $\mathcal{C}_{p\infty}(\Pi_n^d)$ в [33] предложена родственная оценка снизу, также доказанная методом квадратурных формул, которая с точностью до множителя совпадает со знаменитой оценкой жестких дизайнов Дельсарта–Гёталса–Зейделя (см. п. 6.7). Также в работе [34] сформулированы двойственные задачи Никольского для сферических полиномов и целых функций экспоненциального сферического типа при $1 \leqslant p < \infty$, доказано существование и единственность радиальной экстремальной функции в проблеме $\mathcal{L}_{d1}$. Общие идеи вывода таких результатов даны в разд. 4.

M. Ganzburg в своих общих результатах в числе прочих опирался на идеи, заложенные в работах В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой по сферической константе Никольского и родственным проблемам [10, 11, 12]. Они, наверное, первые начали использовать операторы обобщенного сдвига для получения сдвинутой задачи Никольского (см. п. 4.4). В работе [10] сферическая константа Никольского $\mathcal{C}_{p\infty}(\Pi_n^d)$ была сведена к одномерному весовому варианту (для алгебраического веса Гегебауэра), который оказался связанным с весовой задачей Чебышева. Чтобы сформулировать эти результаты, введем весовое пространство $L_w^p(M)$, полагая $\|f\|_{p,w} = (\int_M |f|^p w\,dx)^{1/p}$ при $p < \infty$, где $w\colon M \to \mathbb{R}_+$ — некоторая весовая функция. Для $p = \infty$ как и прежде вес в норме не учитывается. Через $\mathcal{C}_{pq,w}^D(Y)$ обозначим соответствующую весовую константу Бернштейна — Никольского.

При $1 \leqslant p < \infty$ имеем [10]

$$|\mathbb{S}^{d-1}|^{1/p}\mathcal{C}_{p\infty}(\Pi_n^d) = \mathcal{C}_{p\infty,(1-x^2)^{d/2-1};[-1,1]}(\mathcal{P}_n) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n} \frac{|P(1)|}{\|P\|_{p,(1-x^2)^{d/2-1}}}.$$

Последнее равенство достигается на экстремальном полиноме $P_n^*(x) = x^n + \ldots$, который является единственным экстремальным полиномом в задаче Чебышева для веса Якоби:

$$P_n^* = \operatorname*{argmin}_{P\in\mathcal{P}_{n-1}} \|x^n + P(x)\|_{p,w}, \quad w(x) = (1-x)^{d/2+1}(1+x)^{d/2-1}.$$

Полином P_n^*, рассматриваемый как зональный, является единственным (с точностью до умножения на константу и вращения аргумента) для константы Никольского $\mathcal{C}_{p\infty}(\Pi_n^d)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Мы начали это раздел с задачи Чебышева о полиноме, наименее уклоняющимся от нуля, и вновь пришли к ней, но уже весовому варианту. Точные значения константы Никольского как и решение задачи Чебышева для общего веса Якоби известны только при $p = 2$, когда, как отмечалось выше, решением в весовой задаче Чебышева будет ортогональный по этому весу полином.

Связь с задачей Чебышева, которая является классической задачей теории приближений, позволило авторам [10] воспользоваться накопленными в этой теории фактами о характеризации полинома наилучшего приближения. В частности, они привели следующее соотношение ортогональности, характеризующее экстремальный полином:

$$\int_{-1}^{1} P|P_n^*|^{p-1}\operatorname{sign} P_n^*\, w\,dt = 0, \quad \forall\, P \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Из него, в частности, следует, что все нули P_n^* простые и принадлежат $(-1,1)$. Данные факты обобщают результаты D. Amir и Z. Ziegler [2] ($d = 1$).

В работах [11, 12] В.В. Арестова и М.В. Дейкалова обобщили результаты о взаимосвязи весовых задач Никольского и Чебышева для отрезка $[-1,1]$ на случай произвольного веса Якоби $w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$, что включает случай веса Гегенбауэра $\alpha = \beta$ [11, 12]. Они доказали, что при $1 \leqslant p < \infty$

$$\mathcal{C}_{p\infty,w_{\alpha,\beta}}(\mathcal{P}_n) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n} \frac{|P(1)|}{\|P\|_{p,w_{\alpha,\beta}}}, \tag{33}$$

где равенство достигается на единственном экстремальном полиноме из весовой задачи Чебышева $P_n^* = \operatorname{argmin}_{P\in\mathcal{P}_{n-1}} \|x^n + P(x)\|_{p,w_{\alpha+1,\beta}}$. Существенной сложностью, преодоленной в данных работах, как было упомянуто выше, было доказательство того факта, что при нахождении $p\infty$-константы Никольского для алгебраических полиномов можно заменить норму $\|P\|_\infty$ значением в фиксированной точке $|P(1)|$ (сдвиг максимума). Этот факт, в частности, требуется для характеризации экстремального полинома (33). Его просто установить для случая однородных пространств $M = G/H$, на которых действует группа движений G и определен естественный сдвиг $f(gx)$, относительно которого оказываются инвариантными мера пространства и, соответственно, L^p-норма, а также множество Y (см. п. 4.4). Однако для случая отрезка $[-1,1]$ с общим весом Якоби естественного сдвига нет и В.В. Арестова и М.В. Дейкалова успешно заменили его симметричным положительным оператором обобщенного сдвига Якоби. Этот подход получил развитие в работах [7, 52, 56, 99, 40, 45] (мы приводим его идейно в п. 4.4). Особо отметим случай несимметричных операторов обобщенного сдвига типа Данкля, где возникают дополнительные сложности. В частности, в [52, 99] для $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$ при помощи положительных операторов Гегенбауэра–Данкля и Бесселя–Данкля было установлено, что для $M = \mathbb{T}, \mathbb{R}$ соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p\infty,|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{T}_n) &= \sup_{T\in\mathcal{T}_n^{\mathrm{real,even}}} \frac{|T(0)|}{\|T\|_{p,|\sin x|^{2\alpha+1}}}, \\ \mathcal{C}_{p\infty,|x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{E}_1) &= \sup_{f\in\mathcal{E}_1^{\mathrm{real,even}}\cap L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})} \frac{|f(0)|}{\|f\|_{p,|x|^{2\alpha+1}}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Первое равенство здесь после тригонометрической замены переменного сводится к алгебраической константе Никольского для алгебраического веса Гегенбауэра $(1-x^2)^\alpha$. Случай констант Бернштейна–Маркова–Никольского для $M = \mathbb{T}$, $[-1,1]$ см. в работах [40, 64]. Далее в п. 4.4 мы называем правые части равенств в (34) сдвинутыми задачами Никольского и обозначаем, например, $\mathcal{A}_{p,|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{real,even}};0)$ (их аналоги для $q\neq\infty$ неизвестны).

Сдвиг максимума в $p\infty$-константах Бернштейна–Маркова–Никольского при $p\geqslant 1$, как уже частично упоминалось выше, решает много подзадач, включая сведение к прямо-двойственной выпуклой действительной проблеме, вывод соотношения ортогональности, характеризация экстремальной функции и, как следствие, доказательство ее единственности (см. разд. 4).

Также он потребовался в работе [66], чтобы доказать следующие общие неравенства, обобщающие (28): для $p\in[1,\infty)$, $\alpha\geqslant -1/2$ и всех $n\in\mathbb{Z}_+$

$$n^{(2\alpha+2)/p} \leqslant A_{p\alpha}(n) \leqslant (n+\theta_{p\alpha})^{(2\alpha+2)/p}, \tag{35}$$

где

$$A_{p\alpha}(n) = \frac{\mathcal{C}_{p\infty,|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{T}_n)}{\mathcal{C}_{p\infty,|x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{E}_1)} = \frac{\mathcal{C}_{p\infty,(1-x^2)^\alpha}(\mathcal{P}_n)}{\mathcal{C}_{p\infty,x^{2\alpha+1};\mathbb{R}_+}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}})}, \quad \theta_{p\alpha} = \begin{cases} \lceil \frac{1}{p} \rceil, & \alpha = -1/2, \\ 2\lceil \frac{\alpha+3/2}{p} \rceil, & \alpha > -1/2. \end{cases}$$

Эти границы влекут асимптотические равенства типа Левина — Любинского с оценкой остаточного члена, которые можно найти в [40].

Заметим, что здесь алгебраическая константа для $[-1,1]$ и константа для четных функций на $\mathbb{R}_+$ являются простым следствием (34). В безвесовых тригонометрическом ($\alpha=-1/2$) и алгебраическом ($\alpha=0$) случаях условие $p\geqslant 1$ можно ослабить до $p>0$ (см. [66]). Для остальных α этот факт доказан только для случая, когда вместо ∞-нормы явно используется значение функции в фиксированной точке. Другими словами, чтобы доказать (35) для $p<1$ нужно доказать обобщить результаты типа Арестова–Дейкаловой о сдвиге максимума. Однако здесь уже не работает неравенство Гёльдера, которое применяется для случая $p\geqslant 1$. Поскольку неравенства (35) носят достаточно общий характер, в разд. 5 приводится их вывод.

Применяя взаимосвязь многомерных и одномерных весовых констант Никольского для $\alpha = d/2-1$ [66], получаем следующие универсальные при $d \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ неравенства

$$n^{d/p} \leqslant \frac{\mathcal{C}_{p\infty}(\Pi_n^d)}{\mathcal{L}_{dp}} \leqslant (n+\theta_{p,d/2-1})^{d/p}. \tag{36}$$

Для $p=1$ эти оценки можно продолжить на основе (32). Представляет интерес получить такие оценки для многомерных тригонометрических полиномов со спектром в шаре.

Теория констант Бернштейна–Маркова–Никольского продолжает развиваться, в ней еще много открытых вопросов, некоторые из которых сформулированы в заключении.

4. Базовые приемы оценки констант Бернштейна — Никольского

Приведем некоторые общие сведения об оценке констант Бернштейна–Никольского (как и Маркова–Никольского), которые так или иначе использовали разные авторы (см., например, [12, 52, 40]). Во многом, что не удивительно, эти сведения повторяют классические проблемы теории приближений, включая проблемы существования, единственности, характеризации, скорости приближения (см., например, [125, 114, 85]). Пусть как выше

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y) = \sup_{f\in Y\cap L^p(M)} \frac{\|Df\|_q}{\|f\|_p}.$$

Ограничимся случаем, когда $0<p\leqslant q\leqslant\infty$ (см. мотивацию выше в п. 3.3), Y — подпространство из $C(M)$, D — линейный дифференциальный оператор ($DY\subset Y$), L^p-пространства могут быть весовыми. Требуется оценить (или вычислить по возможности) константу $\mathcal{C}_{pq}^D(Y)$, при этом убедившись, что $\mathcal{C}_{pq}^D(Y)<\infty$. Простой пример оператора $D=\partial$ и подпространства $Y=\operatorname{span}\{\sin x^2\}\subset L^\infty(\mathbb{R})$ показывает, что это не всегда так.

4.1. Сведение pq-неравенств к $p\infty$- и pp-неравенствам

Пусть $f\in Y$. Имеем

$$\|Df\|_q \leqslant \|Df\|_\infty^{1-p/q}\|Df\|_p^{p/q}.$$

Поэтому

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y) \leqslant (\mathcal{C}_{p\infty}^D(Y))^{1-p/q}(\mathcal{C}_{pp}^D(Y))^{p/q},$$

в частности, для $D=I$

$$\mathcal{C}_{pq}(Y) \leqslant (\mathcal{C}_{p\infty}(Y))^{1-p/q}. \tag{37}$$

Если, например, $Y=Y_n$, $\dim Y_n \asymp n^d$ и установлено, что $\mathcal{C}_{p\infty}^D(Y_n)\leqslant Cn^{r+d/p}$, $\mathcal{C}_{pp}^D(Y_n)\leqslant Cn^r$, то придем к оценке сверху вида (1)

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y_n) \leqslant Cn^{r+d(1/p-1/q)}. \tag{38}$$

Другой способ получить qp-неравенство Бернштейна — Никольского из qq-неравенства Бернштейна и pq-неравенства Никольского следующий:

$$\|Df\|_q \leqslant \mathcal{C}_{qq}^D(Y)\|f\|_q \leqslant \mathcal{C}_{qq}^D(Y)\mathcal{C}_{pq}(Y)\|f\|_p,$$

откуда с использованием (37)

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y) \leqslant \mathcal{C}_{qq}^D(Y)\mathcal{C}_{pq}(Y) \leqslant \mathcal{C}_{qq}^D(Y)(\mathcal{C}_{p\infty}(Y))^{1-p/q}.$$

Для примера выше вновь придем к (38). К сожалению, таким способ не удается получить точные константы, поскольку в исследованных случаях экстремальные функции в неравенствах Бернштейна и неравенствах Никольского разные.

4.2. Мультипликативная оценка для констант Никольского

Пусть $D = I$ и подпространство $Y = Y_n$, $n \geqslant 0$, обладает тем свойством, что если $f \in Y_n$, то $f^s \in Y_{sn}$ для $s \in \mathbb{Z}_+$ (мультипликативное свойство). Например, это свойство справедливо для полиномов и целых функций экспоненциального типа. Тогда для произвольной функции $f \in Y_n$ имеем

$$\|f\|_\infty = \|f^s\|_\infty^{1/s} \leqslant (\mathcal{C}_{p/s}(Y_{sn})\|f^s\|_{p/s})^{1/s} = (\mathcal{C}_{p/s}(Y_{sn}))^{1/s}\|f\|_p.$$

Поэтому

$$\mathcal{C}_p(Y_n) \leqslant (\mathcal{C}_{p/s}(Y_{sn}))^{1/s}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad p > 0. \tag{39}$$

Заметим, что, например, для однородных полиномов или сферических гармоник порядка n мультипликативное свойство не выполняется, что заметно усложняет задачу об оценке констант Бернштейна — Никольского на этих подпространствах.

Перенос мультипликативной оценки на константы Бернштейна — Никольского при $D \neq I$ затруднителен, так как в описанном подходе требуется свойство $\|Df\|_\infty \leqslant C\|Df^s\|_\infty^{1/s}$.

4.3. Проблема существования экстремальной функции

В силу линейности D имеем

$$\mathcal{C}_{pq}^D(Y) = \sup_{f \in B} \|Df\|_q, \quad B = \{f \in Y \colon \|f\|_p \leqslant 1\}. \tag{40}$$

Пусть $\mathcal{C}_{pq}^D(Y) < \infty$, тогда функционал $\|Df\|_q$ непрерывен на множестве (шаре) B. Если $\dim Y < \infty$ (полиномиальный случай), то существование экстремальной функции вытекает из компактности B.

Вариант $\dim Y = \infty$ рассмотрим только на примере множества целых функций экспоненциального типа. Пусть $Y = \mathcal{E}_\sigma^p(\Omega)$, $p < \infty$. Тогда существование экстремальной функции будет вытекать из следующего утверждения о компактности [103]: пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{E}_\sigma(\Omega)$ — последовательность целых функций экспоненциального типа, ограниченных на $\mathbb{R}^d$ одной и той же константой C. Тогда найдется подпоследовательность $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, которая сходится равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}^d$ к некоторой функции $f \in \mathcal{E}_\sigma(\Omega)$, ограниченной на $\mathbb{R}^d$ той же константой C.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ — максимизирующая последовательность и $\lim_{n\to\infty} \|Df_n\|_q = \mathcal{C}_{pq}^D(Y)$. Так как $\|f_n\|_\infty \leqslant C\|f_n\|_p \leqslant C$, то найдутся подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$ и функция f как выше. Для произвольного $R > 0$ имеем $\|f\chi_{|x|\leqslant R}\|_p = \lim_{j\to\infty} \|f_{n_j}\chi_{|x|\leqslant R}\|_p \leqslant 1$, где χ_A — характеристическая функция множества A. При $R \to \infty$ получаем $f \in B$. Теперь показывается, что $\lim_{j\to\infty} \|f - f_{n_j}\|_p = 0$, что при $p \geqslant 1$ следует из оценки

$$\|f - f_{n_j}\|_p^{\bar{p}} \leqslant \|(f - f_{n_j})\chi_{|x|\leqslant R}\|_p^{\bar{p}} + \|f\chi_{|x|>R}\|_p^{\bar{p}} + \|f_{n_j}\chi_{|x|>R}\|_p^{\bar{p}},$$

где $\bar{p} = \min\{1, p\}$. Поскольку $\|D(f - f_{n_j})\|_q \leqslant \mathcal{C}_{pq}^D(Y)\|f - f_{n_j}\|_p$, то

$$\|Df\|_q = \lim_{j\to\infty} \|Df_{n_j}\|_q = \mathcal{C}_{pq}^D(Y),$$

поэтому функция f экстремальная.

Далее рассмотрим случай $q = \infty$, опустив ∞ в индексе. В частности, по (40) получаем

$$\mathcal{C}_p^D(Y) = \sup_{f \in B} \|Df\|_\infty. \tag{41}$$

4.4. Сдвиг максимума

Покажем, в каких случаях можно заменить ∞-норму в (41) значением в некоторой фиксированной точке $o \in M$ (см. также [40]). Введем сдвинутый вариант задачи Бернштейна — Никольского

$$\mathcal{A}_p^D(Y;o) = \sup_{f\in Y\cap L^p(M)} \frac{|Df(o)|}{\|f\|_p}.$$

Если $Y = -Y$ (что верно для подпространств), то здесь можно снять модуль в $|Df(o)|$.

Для любого подпространства $Y_0 \subseteq Y$ имеем $\mathcal{A}_p^D(Y_0;o) \leqslant \mathcal{C}_p^D(Y)$. Однако во многих случаях оказывается, что найдется Y_0, такое что $\mathcal{C}_p^D(Y) = \mathcal{A}_p^D(Y_0;o)$. Рассмотрим примеры.

Проще всего сделать сдвиг максимума, если M — абелева группа по сложению, $o = 0$ и Y, D, p-норма инвариантны относительно сдвига $f(x+t)$ (например, нет веса). Действительно, не предполагая существование экстремальной функции, пусть $\varepsilon > 0$ и функция $f_\varepsilon \in B$, такая что $\|Df_\varepsilon\|_\infty = |Df_\varepsilon(x_\varepsilon)| = \mathcal{C}_p^D(Y) - \varepsilon$. Тогда функция $F(x) = f_\varepsilon(x+x_\varepsilon) \in B$, $|DF(0)| = |Df_\varepsilon(x_\varepsilon)|$ и

$$\mathcal{A}_p^D(Y;0) \leqslant \mathcal{C}_p^D(Y) = |DF(0)| + \varepsilon \leqslant \mathcal{A}_p^D(Y;0) + \varepsilon.$$

Поэтому $\mathcal{C}_p^D(Y) = \mathcal{A}_p^D(Y;0)$. Заметим, что здесь мы не предполагаем существование точки максимума для ∞-нормы произвольной функции из Y. Хотя это верно для компактных M, а для целых функций экспоненциального типа из классов $\mathcal{E}_\sigma^p(\Omega)$ для $p < \infty$ можно пользоваться их стремлением к нулю на $\mathbb{R}^d$ при $|x| \to \infty$. Для $1 \leqslant p < \infty$ это верно по [103], а для $p < 1$ используем вложение в $\mathcal{E}_\sigma^1(\Omega)$.

Если M — однородное пространство с транзитивной группой движений G и инвариантной относительно G мерой, то действуем как выше, только предполагаем, что Y, D, p-норма инварианты относительно сдвига $f(gx)$, $g \in G$. Точка $o \in M$ выбирается произвольно, назовем ее началом координат на M. Например, для сферы $\mathbb{S}^d$ можно взять северный полюс $o = e_d = (0,\dots,0,1)$. Для сдвига максимума в точку o полагаем $F(x) = f_\varepsilon(g_\varepsilon x)$, где движение g_ε выбрано, так чтобы $g_\varepsilon o = x_\varepsilon$.

Пусть теперь оба случая не выполняются. Например, пусть $M = \mathbb{T}$ и Y — множество четных тригонометрических полиномов порядка не выше n. Тогда Y не инвариантно относительно сдвига $f(x+t)$. В этом случае на помощь часто приходят инвариантные операторы обобщенного сдвига $T^t f(x)$. Их общую теорию см., например, в книге [91]. Однако там нет фактов L^p-ограниченности и мало примеров операторов, связанных с сингулярными задачами Штурма–Лиувилля. Поэтому много важных примеров операторов обобщенного сдвига с нужными свойствами в контексте точных констант Никольского см. в работах [11, 12, 7, 52, 56, 59, 99] (там же приведена дополнительная библиография).

Продемонстрируем идею использования операторов обобщенного сдвига при $p \geqslant 1$, продолжив пример $Y = \mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}$. Для четных функций естественным инвариантным оператором обобщенного сдвига является симметричный оператор $T^t f(x) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$. Такой выбор обусловлен, в том числе, действием на базисные функции $T^t \cos kx = \cos kt \cos kx$. Оказывается, что это общий факт, называемый теоремой умножения, и которая часто используется для построения интегрального представления оператора T. Пусть $D = \partial^r$. Оператор D инвариантен относительно T только для четных r. Для общих r его нужно определять как мультипликатор. Если как выше $\|Df_\varepsilon\|_\infty = |Df_\varepsilon(x_\varepsilon)|$, то полагаем $F(t) = T^t f_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Ясно, что $DF(0) = Df_\varepsilon(x_\varepsilon)$, $F \in Y$ и при $p \geqslant 1$ по неравенству треугольника $\|F\|_p \leqslant \|f_\varepsilon\|_p \leqslant 1$. Поэтому функция $F \in B$ и $\mathcal{C}_p^D(Y) = \mathcal{A}_p^D(Y;0)$. Здесь случай $p < 1$ представляет особую сложность.

Если в качестве Y взять все подпространство полиномов $\mathcal{T}_n$ и действовать как выше, то для четных r получаем

$$\mathcal{C}_p^{\partial^r}(\mathcal{T}_n) = \mathcal{C}_p^{\partial^r}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}) = \mathcal{A}_p^{\partial^r}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}};0).$$

Для нечетных r можно рассмотреть нечетные полиномы и инвариантный на них несимметричный оператор обобщенного сдвига $T^t f(x) = \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}$. Подобные утверждения о взаимосвязи констант Бернштейна — Никольского на разных классах функций справедливы и в общей ситуации. В том числе, таким образом удается сводить многомерные задачи к одномерным весовым вариантам (см., например, [75, 10]), однако пока только при $p \geqslant 1$.

Рассмотрим еще пример однородного пространства M ранга 1 с метрикой ρ, для простоты компактного. Пусть Y_n — подпространство полиномов порядка не выше n. В качестве оператора обобщенного сдвига берем оператор среднего значения $T^t f(x) = \frac{1}{w(t)} \int_{\rho(x,\xi)=t} f(\xi)\, d\xi$, где $w(t) = |\{\xi\colon \rho(x,\xi) = t\}|$ — зональный вес (он не зависит от x). Можно считать $t \in [0,\pi]$. Пусть для простоты $D = I$, хотя можно взять степень оператора Лапласа–Бельтрами как в п. 3.3. Оператор T здесь несимметричный. Однако пусть $o \in M$ — начало координат. Для удобства отождествим зональные функции $f(x) = f(\rho(x,o))$ как с функциями $f(x)$ на M, так и одномерными функциями $f(t)$ на $\mathbb{R}$. Положим $F(t) = T^t f(o)$, где $f \in Y_n$. Тогда зональная функция $F(x) = F(\rho(x,o))$ принадлежит Y_n (следствие гармонического анализа на M, см. [128]). Множество зональных полиномов образует подпространство $Y_{n0} \subset Y_n$. Его можно отождествить с подпространством четных тригонометрических полиномов полиномов $\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}$ или после тригонометрической замены переменного подпространством алгебраических полиномов $\mathcal{P}_n$.

Справедлива интегральная формула

$$\int_M f(x)\, dx = a \int_0^\pi T^t f(o) w(t)\, dt, \quad a = \frac{|M|}{\int_0^\pi w(t)\, dt},$$

из которой и неравенства Гёльдера при $p \geqslant 1$ следует, что

$$\|F\|_p^p = a \int_0^\pi |F(t)|^p w(t)\, dt = \|F\|_{p,aw}^p \leqslant a \int_0^\pi T^t |f(o)|^p w(t)\, dt = \|f\|_p^p, \tag{42}$$

где безвесовая норма берется в $L^p(M)$.

Теперь пусть как выше $\|f_\varepsilon\|_\infty = |f_\varepsilon(x_\varepsilon)|$. Вновь положим $F(t) = T^t f_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Получим полином $F \in \mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}$ и, одновременно, зональный полином $F \in Y_{n0}$. Имеем $F(0) = F(o) = f_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Из (42) следует, что $\|F\|_p = \|F\|_{p,aw} \leqslant \|f_\varepsilon\|_p \leqslant 1$. В итоге, при $p \geqslant 1$ получаем

$$\mathcal{C}_p(Y_n) = \mathcal{C}_p(Y_{n0}) = \mathcal{C}_{p,aw}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}) = \mathcal{A}_{p,aw}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}; 0),$$

где присутствуют многомерные и одномерные весовые константы. Описанный подход работает и для локально компактных пространств M. Например, для $\mathbb{R}^n$ имеем $w(t) = |\mathbb{S}^{d-1}| t^{d-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, зональными будут радиальные функции $F(|x|)$, Y_n — подпространство целых функций экспоненциального сферического типа не выше n, Y_{n0} можно ассоциировать с одномерными четными целыми функциями экспоненциального типа не выше n. Гармонический анализ на гиперболических пространствах ранга 1 см. в [70, 83].

Если на M задано весовое пространство L^p, то ситуация усложняется. Возникают вопросы о существовании инвариантных операторов обобщенного сдвига с нужной оценкой p-норм. Здесь применяется техника на основе интегрального представления оператора обобщенного сдвига, свойств его инвариантности, положительности, локальности, сопряженности. Определенный прогресс здесь достигнут в упомянутых в этом пункте работах, где рассмотрены симметричные и несимметричные положительные операторы обобщенного сдвига Гегенбауэра, Якоби, Бесселя, Гегенбауэра–Данкля, Бесселя–Данкля, Данкля.

4.5. Сведение к действительному случаю

Сдвиг максимума позволяет сводить задачи для комплексных полиномов и целых функций экспоненциального типа к действительным вариантам. Действительно, пусть, например,

$\mathcal{C}_p^D(Y) = \mathcal{A}_p^D(Y;0)$ и подпространство Y инвариантно относительно операции

$$Rf(z) = \frac{f(z) + \overline{f(\overline{z})}}{2},$$

что характерно для аналитических функций. Пусть как выше $\|Df_\varepsilon\|_\infty = |Df_\varepsilon(x_\varepsilon)|$, где теперь $x_\varepsilon = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $Df_\varepsilon(0) \in \mathbb{R}$. Тогда функция $f = Rf_\varepsilon$ действительная и $f \in Y$. Для нее $Df(0) = Df_\varepsilon(0)$, $|f(x)| \leqslant |f_\varepsilon(x)|$ для $x \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $\|f\|_p \leqslant \|f_\varepsilon\|_p$ при $p > 0$, что влечет искомое утверждение.

4.6. Единственность экстремальной функции

Продолжим пример из п. 4.5 выше. Сдвиг максимума позволяет доказать единственность экстремальной функции при $1 < p < \infty$, когда пространство L^p строго нормировано. Действительно, пусть найдутся две экстремальные функции $f_1 \neq f_2$, для которых $Df_1(0) = Df_2(0)$ (мы сняли модуль) и $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$. Положим $f = \frac{f_1+f_2}{2}$. Тогда функция $f \in Y$, $Df(0) = Df_1(0)$ и $\|f\|_p < \|f_1\|_p$. Поэтому $\frac{|Df(0)|}{\|f\|_p} > \frac{|Df_1(0)|}{\|f_1\|_p}$, что противоречит экстремальности f_1.

Случаи $p = 1, \infty$ обычно разбираются при помощи характеризации экстремальных функций. В частности, при $p = 1$ для доказательства единственности экстремальной функции можно применить соотношение ортогональности (51) из п. 4.9 (см., например, [34]). Следует также учесть, что функция f может быть единственной на множестве $Y_0 \subset Y$ в задаче $\mathcal{A}_p^D(Y_0;o)$, решение которой дает $\mathcal{C}_p^D(Y)$ (см. п. 4.4), но будет ли она единственной на всем классе Y заранее неясно.

4.7. Базовые оценки на основе воспроизводящего ядра

Приведем общий метод получения оценок типа (22) для констант Никольского ($D = I$). Он основан на оценке воспроизводящего ядра подпространства Y. Функция $K(x, y)$ будет таким ядром, если она принадлежит Y по обоим аргументам и

$$f(x) = \int_M K(x,y)f(y)\,dy, \quad \forall\, f \in Y. \tag{43}$$

Например, для $M = \mathbb{T}$, $Y = \mathcal{T}_n$ имеем $f(x) = \int_{\mathbb{T}} D_n(x-y)f(y)\,dy$, где D_n — ядро Дирихле:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leqslant n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\pi\sin\frac{x}{2}}.$$

Если M — компактное риманово многообразие ранга 1 размерности d и $Y = \Pi_n(M)$, то $K(x, y)$ выражается через зональный полином Якоби $P_n^{(\alpha_d,\beta_d)}(\cos\rho(x,y))$. См., например, [29], где даны значения параметров α_d, β_d (например, для сферы $\alpha_d = d/2$, $\beta_d = d/2-1$). Для случая $M = \mathbb{R}^d$, $Y = \mathcal{E}_\sigma^p(\Omega)$ при $0 < p \leqslant 2$ имеем $K(x,y) = \widehat{\chi}_{\sigma\Omega}(x-y)$. В данных примерах интегральный оператор (43) является проектором из $L^2(M)$ на подпространство Y.

Пусть $o \in M$ — начало координат (как в п. 4.4) и $K(x) = K(o, x)$. В приведенных примерах воспроизводящее ядро обладает тем свойством, что для произвольного $x \in M$

$$\|K(x,\cdot)\|_2^2 = K(x,x) = \sup_{x,y\in M}|K(x,y)|, \tag{44}$$

в частности, $\|K\|_2^2 = \|K\|_\infty = K(o)$. Первое равенство в (44) вытекает из (43), а второе равенство для однородных пространств M является следствием гармонического анализа на M

(см. [128]). В общей ситуации требуется проверка. Также обратим внимание, что для конечномерных Y имеем $\|K\|_2^2 = C\dim Y$, например, $\|D_n\|_2^2 = \frac{\dim \mathcal{T}_n}{2\pi}$.

Пусть (44) выполнено. Тогда при $0 < p \leqslant 2$ из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\|f\|_\infty = \sup_x \left|\int_M K(x,\cdot) f\,dy\right| \leqslant \|f\|_\infty^{1-p/2} \sup_x \int_M |K(x,\cdot)|\,|f|^{p/2}\,dy \leqslant \|f\|_\infty^{1-p/2}\|K\|_2\|f\|_p^{p/2},$$

откуда $\|f\|_\infty \leqslant (\|K\|_2^2)^{1/p}\|f\|_p$ и

$$\mathcal{C}_p(Y) \leqslant (\|K\|_2^2)^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant 2. \tag{45}$$

Эта оценка точная при $p = 2$, поскольку по (44) экстремальной функцией будет само воспроизводящее ядро $K \in Y$.

Заметим, что при $1 \leqslant p \leqslant 2$ можно напрямую воспользоваться неравенством Гёльдера и оценивать константы Бернштейна — Никольского для самосопряженных на Y операторов D мультипликаторного типа, для которых верно $\|D^2K\|_\infty = \|DK\|_2^2$. Например, это легко проверяется для производных ядра Дирихле D_n. В этом случае

$$\|Df\|_\infty = \sup_x \left|\int_M K(x,\cdot) Df\,dy\right| = \sup_x \left|\int_M D_yK(x,\cdot) f\,dy\right| \leqslant \|D_yK(x,\cdot)\|_{p'}\|f\|_p, \tag{46}$$

где $\|D_yK(x,\cdot)\|_{p'} = \|DK\|_{p'}$ для однородных пространств M. Работать с этой нормой сложно, поэтому она оценивается как

$$\|DK\|_{p'} \leqslant \|DK\|_\infty^{1-2/p'}\|DK\|_2^{2/p'} = (\|DK\|_2^2)^{1/p}.$$

Отсюда и из (46) выводим родственное (45) неравенство

$$\mathcal{C}_p^D(Y) \leqslant (\|DK\|_2^2)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

Эта оценка точная при $p = 2$ и реализуется на функции $DK \in Y$. Для $D = I$ имеем (45).

Неравенство (45) распространяется на все $p > 0$ для подпространств $Y = Y_n$, удовлетворяющих мультипликативному свойству (все примеры выше). Пусть $K = K_n$ и $I_n = \|K_n\|_2^2$. Воспользуемся (39) и положим $s = p_0 = \lceil \frac{p}{2} \rceil$. Тогда $p/s \leqslant 2$, поэтому

$$\mathcal{C}_p(Y_n) \leqslant (\mathcal{C}_{p/s}(Y_{sn}))^{1/s} \leqslant I_{p_0 n}^{1/p}. \tag{47}$$

Если воспользоваться (37), получаем

$$\mathcal{C}_{pq}(Y_n) \leqslant (\mathcal{C}_p(Y_n))^{1-p/q} \leqslant I_{p_0 n}^{1/p-1/q}.$$

Например, для ядра Дирихле имеем $I_n = \frac{2n+1}{2\pi}$, поэтому $\mathcal{C}_{pq}(\mathcal{T}_n) \leqslant (\frac{2p_0n+1}{2\pi})^{1/p-1/q}$, что отвечает оценке (19) при $d = 1$. Во всех примерах $I_n \asymp n^d$. Для конечномерных Y_n это также следствие гармонического анализа. Поэтому $\mathcal{C}_{pq}(Y_n) \leqslant C(p_0n)^{d(1/p-1/q)}$, где константа C эффективно оценивается. Отсюда выводятся базовые неравенства типа (22).

Чтобы доказать асимптотическую точность оценки (47) обычно берутся функции типа ядер Фейера–Джексона $F_n = K_{n/s}^s$, где $s = \lceil \frac{2}{p} \rceil$ (для простоты целые n предполагаются кратными s). Тогда $F_n \in Y_n$, $\|F_n\|_\infty = \|K_{n/s}\|_\infty^s$,

$$\|F_n\|_p = \left(\int_M |K_{n/s}|^2 |K_{n/s}|^{sp-2}\,dx\right)^{1/p} \leqslant \|K_{n/s}\|_\infty^{s-2/p}\|K_{n/s}\|_2^{2/p},$$

откуда в силу $\|K_{n/s}\|_\infty = \|K_{n/s}\|_2^2$ имеем

$$\frac{\|F_n\|_\infty}{\|F_n\|_p} \geqslant \|K_{n/s}\|_\infty^{2/p}\|K_{n/s}\|_2^{-2/p} = (\|K_{n/s}\|_2^2)^{1/p}.$$

Таким образом,

$$I_{n/s}^{1/p} \leqslant \mathcal{C}_p(Y_n) \leqslant I_{p_0 n}^{1/p}, \quad s = \lceil \tfrac{2}{p} \rceil, \quad p_0 = \lceil \tfrac{p}{2} \rceil.$$

При $p = 2$ данные оценки смыкаются. Для $p = 1$ имеем

$$I_{n/2} \leqslant \mathcal{C}_p(Y_n) \leqslant I_n. \tag{48}$$

Если $I_n \asymp n^d$ при $n \to \infty$, то

$$\mathcal{C}_p(Y_n) \asymp n^{d/p}.$$

Действуя как выше, получаем эквивалентные оценки для сдвинутой задачи $\mathcal{A}_p(Y; o)$. Здесь свойства типа (44) достаточно иметь при $x = o$.

Мы рассмотрели случай однородных пространств M, которые можно реализовать как фактор-пространство $M = G/H$, где H — стационарная подгруппа точки o. В работе [104] данные оценки обобщены на случай компактных групп Ли G. Однако G можно реализовать как однородное пространство $(G \times G)/G$, поэтому описанная схема напрямую переносится на случай групп.

Результаты также обобщаются на весовой случай, где гармонический анализ связан с операторами обобщенного сдвига.

4.8. Константа Никольского для неотрицательных функций

Во многих случаях для однородных пространств M с действительным зональным воспроизводящим ядром K_n оценка снизу в (48) имеет экстремальный характер. Пусть Y_{n0} — подпространство зональных функций из Y_n. Рассмотрим сдвинутую задачу Никольского на неотрицательных функциях: найти

$$\mathcal{A}_1^+(Y_{n0}; 0) = \sup_{0 \leqslant f \in Y_{n0} \cap L^1(M)} \frac{f(0)}{\|f\|_1},$$

В работе [33] для решения этой задачи было предложено использовать гауссовские квадратурные формулы на классе Y_{n0}. Для простоты пусть n четное, если $\dim Y_n < \infty$. В исследованных случаях справедлива квадратурная формула Маркова–Гаусса вида

$$\int_M f(\rho(x, o))\, dx = \gamma_0 f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f(t_k), \tag{49}$$

где веса $\gamma_k > 0$, t_k — нули ядра $K_{n/2}$ и сумма конечна для $\dim Y_n < \infty$. Эта формула точная для ядра Фейера $F_n = K_{n/2}^2$, поэтому $\|K_{n/2}^2\|_1 = \gamma_0 K_{n/2}^2(0)$, что равносильно $\|K_{n/2}\|_2^2 = \gamma_0 \|K_{n/2}\|_\infty^2$, откуда $\gamma_0 = \|K_{n/2}\|_2^{-2}$. Для произвольной неотрицательной функции $f \in Y_{n0}$ из квадратурной формулы (49) отбрасыванием суммы, которая неотрицательна, получаем $\|f\|_1 \geqslant \gamma_0 f(0)$, что влечет $\frac{f(0)}{\|f\|_1} \leqslant \gamma_0^{-1} = \|K_{n/2}\|_2^2$. Эта оценка точная для F_n. Таким образом,

$$\mathcal{A}_1^+(Y_{n0}; 0) = I_{n/2}.$$

Нужные квадратурные формулы для зональных функций известны для случаев сферы $\mathbb{S}^d$ и проективных пространств (где они совпадают с классическими весовыми квадратурами Гаусса–Маркова), евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ и гиперболических пространств (см. [53, 54, 55] и библиографию там).

4.9. Соотношения ортогональности

Продолжим пример выше и для простоты рассмотрим задачу

$$\mathcal{A}_p(Y_{n0};0)=\sup_{f\in Y_{n0}\cap L^p(M)}\frac{|f(0)|}{\|f\|_p},$$

где Y_{n0} — замкнутое подпространство зональных функций, $1\leqslant p<\infty$. Тогда имеем выпуклую задачу

$$(\mathcal{A}_p(Y_{n0};0))^{-1}=\inf\{\|f\|_p\colon f\in Y_{n0},\ f(0)=1\}. \tag{50}$$

Предположим, что экстремальная функция $f_*\in Y_{n0}$ существует. Тогда задачу (50) можно переписать как

$$0=\operatorname{argmin}\{\|f_*+h\|_p\colon h\in H\},$$

где $H\subset Y_{n0}$ — замкнутое подпространство с условием $h(0)=0$. Необходимым и достаточным условием экстремальности нулевого элемента в задаче наилучшего приближения функции f_* замкнутым подпространством является условие ортогональности функции $|f_*|^{p-1}\operatorname{sign}f_*$ подпространству H (см. [114]). При $p=1$ надо еще потребовать, чтобы f_* не обращалась в нуль на множестве положительной меры (что верно для аналитических функций). Таким образом, получаем соотношение ортогональности

$$\int_M h|f_*|^{p-1}\operatorname{sign}f_*\,dx=0,\quad \forall\, h\in H, \tag{51}$$

которое является характеризацией экстремальной функции f_*. Для произвольной $f\in Y_{n0}$, полагая $h=f-f(0)f_*$, также находим эквивалентную характеризацию

$$f(0)=\|f_*\|_p^{-p}\int_M f|f_*|^{p-1}\operatorname{sign}f_*\,dx. \tag{52}$$

Соотношения (51), (52) можно переписать для весовых пространств L^p_w с зональным весом w на $[0,\pi]$, если $\dim Y_{n0}<\infty$, или на $\mathbb{R}_+$ иначе.

Соотношения ортогональности позволяют доказывать единственность экстремальных функций в нестрого выпуклом случае $p=1$, см., например, [2, 11] для случая алгебраических полиномов. В работе [34] таким образом была доказана единственность радиальной экстремальной функции в задаче Никольского $\mathcal{L}_{d1}$.

В общей ситуации для констант Бернштейна — Никольского действуем аналогично, см., например, [64].

4.10. Связь с задачей Чебышева

Продолжим пример из предыдущего п. 4.9 для случая $\dim Y_{n0}<\infty$ и зонального веса w. Тогда можно считать $Y_{n0}=\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}$. Введем вес $W(t)=(1-\cos t)w(t)$ и рассмотрим тригонометрическую задачу Чебышева в пространстве $L^p_W([0,\pi])$:

$$T_*=\operatorname{argmin}\{\|T\|_{p,W}\colon T(t)=\cos nt+S(t),\ S\in Y_{n-1,0}\}.$$

Как и выше экстремальный полином характеризуется соотношением ортогональности

$$\int_0^\pi S|T_*|^{p-1}\operatorname{sign}T_*\,W\,dt=0,\quad \forall\, S\in Y_{n-1,0}. \tag{53}$$

Но $SW=\tilde{S}w$, где полином $\tilde{S}(t)=S(t)(1-\cos t)\in Y_{n0}$, $\tilde{S}(0)=0$. Поэтому соотношение ортогональности (53) эквивалентно $\int_0^\pi\tilde{S}|T_*|^{p-1}\operatorname{sign}T_*\,w\,dt=0$ для любого $\tilde{S}\in H$. Отсюда и из (51) следует, что полиномы f_* в задаче Никольского и T_* в задаче Чебышева удовлетворяют одному и тому же соотношению ортогональности, которое характеризует экстремальный полином единственным образом. Поэтому они совпадают с точностью до константы. Тригонометрическая подстановка сводит задачу Чебышева к алгебраической. Дальнейшие свойства тригонометрических и алгебраических полиномов, включая информацию о нулях, можно вывести как в [2, 10].

4.11. Двойственные проблемы

Рассмотрим сдвинутую выпуклую задачу Никольского (50). В выпуклом анализе и его приложениях в теории приближений активно применяется двойственность. Двойственную проблему можно вывести как из общих результатов, изложенных, например, в [114], так и напрямую из равенства $f(0)=\int_M K_n(x)f(x)\,dx$ и характеризации экстремальной функции (52). Действительно, пусть $Y_{n0}^{\perp}$ — подпространство в $L^{p'}(M)$, ортогональное подпространству $Y_{n0}\cap L^p(M)$. Тогда для любой функции $g\in Y_{n0}^{\perp}$ по неравенству Гёльдера

$$|f(0)|=\left|\int_M (K_n(x)-g(x))f(x)\,dx\right|\leqslant \|K_n-g\|_{p'}\|f\|_p.$$

Отсюда получаем двойственную оценку $\mathcal{A}_p(Y_{n0};0)\leqslant \inf_{g\in Y_{n0}^{\perp}}\|K_n-g\|_{p'}$. Чтобы показать ее точность возьмем функцию $g_*=K_n-c|f_*|^{p-1}\operatorname{sign} f_*$, где $c=\|f_*\|_p^{-p}$. Тогда

$$\|K_n-g_*\|_{p'}=c\||f_*|^{p-1}\|_{p'}=\|f_*\|_p^{-1}=\mathcal{A}_p(Y_{n0};0)$$

и для произвольной функции $f\in Y_{n0}$ по (52)

$$\int_M fg_*\,dx=\int_M fK_n\,dx-c\int_M f|f_*|^{p-1}\operatorname{sign} f_*\,dx=f(0)-f(0)=0.$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}_p(Y_{n0};0)=\inf_{g\in Y_{n0}^{\perp}}\|K_n-g\|_{p'}=\|K_n-g_*\|_{p'}.$$

Другими словами, двойственная задача Никольского эквивалентна наилучшему приближению воспроизводящего ядра подпространства ортогональным к нему дополнением.

Приведем на примере константы $L=\mathcal{C}_1(\mathcal{E}_1^1)$ (см. разд. 3.4) приложение двойственной проблемы. Для L можно рассмотреть сдвинутую задачу, поэтому в $L^\infty(\mathbb{R})$

$$L=\inf_{g\in(\mathcal{E}_1^1)^{\perp}}\left\|\frac{\sin t}{\pi t}-g(t)\right\|_\infty.$$

Данная задача сложная, поэтому рассмотрим ее вариант на подпространстве косинус-рядов из $(\mathcal{E}_1^1)^{\perp}$ (ортогональность проверяется, например, по теореме Пэли–Винера):

$$L\leqslant \inf_{a_0,a_1,\ldots\in\mathbb{R}}\left\|\frac{\sin t}{\pi t}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt\right\|_\infty=I. \tag{54}$$

В [51] предложено такое решение этой задачи. Косинус-ряд однозначно задается на $[0,\pi]$, поэтому выберем a_k^*, так чтобы

$$h_*(t)=\frac{\sin t}{\pi t}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*\cos kt\equiv c,\quad x\in[0,\pi].$$

Интегрируя по $[0,\pi]$, находим константу $c=\frac{\mathrm{Si}}{\pi^2}$. Таким образом, функция $h_*(t)=c$ для $t\in[0,\pi]$, а вне этого промежутка проверяется, что $|h_*(t)|\leqslant c$, $t\in[0,\infty)$ (это сделано в [3, 4]). Если теперь найдется другая функция $h(t)=\frac{\sin t}{\pi t}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt$, такая что $\|h\|_\infty<\|h_*\|_\infty=c$, то разность $h_*(t)-h(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_k^*)\cos kt>0$ для $t\in[0,\pi]$, что невозможно (интеграл от разности равен нулю). Потому $I=\frac{\mathrm{Si}}{\pi^2}=0.18764\ldots$.

В работе [34] похожим приемом, но в более сложном окружении, решен d-мерный вариант этой проблемы, который сводится к экстремальной задаче в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\inf_{a_0,a_1,\ldots\in\mathbb{R}}\Bigl\|j_{\alpha+1}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}a_kj_\alpha\bigl(\tfrac{q_{\alpha+1,k}}{q_{\alpha+1,1}}\,t\bigr)\Bigr\|_\infty, \tag{55}$$

где $0<q_{\alpha1}<q_{\alpha2}<\ldots$ — нули нормированной функции Бесселя j_α, $\alpha=d/2-1$. Например, при $d=1$ имеем $j_{-1/2}(t)=\cos t$, $j_{1/2}(t)=\frac{\sin t}{t}$, $q_{1/2,k}=\pi k$ и мы приходим к решенной выше задаче (54). В [34] проблема (55) решена для всех $\alpha\geqslant-0.272$, следовательно, все размерности d обработаны и это влечет верхнюю оценку в (32) из п. 3.4 (подробнее см. [34]).

5. Оценка Левина — Любинского с явными границами

В этом разделе докажем явные универсальные границы (35), из которых вытекают асимптотические разложения типа Левина — Любинского для сферы $\mathbb{S}^d$, тора $\mathbb{T}$ с периодическим весом Гегенбауэра $|\sin x|^{2\alpha+1}$, отрезка $[-1,1]$ с алгебраическим весом Гегенбауэра $(1-x^2)^\alpha$ (см. [33, 40, 66]).

Напомним (см. (35)), что эти границы имеют вид

$$n^{(2\alpha+2)/p}\leqslant A_{p\alpha}(n)\leqslant(n+\theta_{p\alpha})^{(2\alpha+2)/p},\quad n\in\mathbb{Z}_+,\quad 1\leqslant p<\infty,\quad \alpha\geqslant-1/2,$$

где

$$A_{p\alpha}(n)=\frac{\mathcal{C}_{p\infty,|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{T}_n)}{\mathcal{C}_{p\infty,|x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{E}_1)}=\frac{\mathcal{C}_{p\infty,(1-x^2)^\alpha}(\mathcal{P}_n)}{\mathcal{C}_{p\infty,x^{2\alpha+1};\mathbb{R}_+}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}})},\quad \theta_{p\alpha}=\begin{cases}\lceil\frac{1}{p}\rceil, & \alpha=-1/2,\\ 2\lceil\frac{\alpha+3/2}{p}\rceil, & \alpha>-1/2.\end{cases}$$

Отправной точкой является использование сдвинутых задач Никольского

$$A_{p\alpha}(n;0)=\frac{\mathcal{A}_{p,|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{T}_n;0)}{\mathcal{A}_{p,|x|^{2\alpha+1}}(\mathcal{E}_1;0)}.$$

Тогда по схеме, изложенной в п. 4.4 (подробнее см. [66]), доказывается, что $A_{p\alpha}(n)=A_{p\alpha}(n;0)$ при $p\geqslant1$. Таким образом, достаточно оценить $A_{p\alpha}(n;0)$. Сделаем это, причем для всех значений $0<p<\infty$. Обозначим для краткости $\nu=2\alpha+1\geqslant0$.

5.1. Оценка снизу

Для $n=0$ оценка снизу очевидна, поэтому пусть $n\geqslant1$ и $f\neq0$ — произвольная функция из класса $\mathcal{E}_1\cap L^p_{|x|^\nu}(\mathbb{R})$. Степенной вес $|x|^\nu$ на оси является частным случаем веса Данкля, поэтому по весовому неравенству Никольского [59] заключаем, что f ограничена на оси.

Рассмотрим интегральное ядро Фейера

$$\varphi(x)=\Bigl(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\Bigr)^2,\quad \widehat{\varphi}(y)=(1-|y|)_+,\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Имеем тождество $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x+2\pi k)=1$ для всех $x\in\mathbb{R}$, что, например, следует из формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x+2\pi k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}=\widehat{\varphi}(0)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2\pi k)=1.$$

Положим $g(x)=f(nx)\varphi(x)$. Тогда $g\in\mathcal{E}_{n+1}$ и $g(x)=O((1+x^2)^{-1})$ на оси. Отсюда следует, что преобразование Фурье $\widehat{g}$ функции g непрерывно на $\mathbb{R}$ и по теореме Пэли–Винера $\widehat{g}(y)=0$ при $|y|\geqslant n+1$. Поэтому для периодизации функции g имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(x+2\pi k)=\sum_{|k|\leqslant n}\widehat{g}(k)e^{ikx}=T(x)\in\mathcal{T}_n.$$

Оценим сверху весовую норму

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^{\nu}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\biggl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(x+2\pi k)\biggr|^p|\sin x|^{\nu}\,dx$$

полинома T, где

$$\biggl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(x+2\pi k)\biggr|^p\leqslant\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|\varphi(x+2\pi k)\biggr)^p=B.$$

Покажем, что

$$B\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p.$$

При $p<1$ имеем

$$B\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p\varphi^p(x+2\pi k)\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p.$$

При $p\geqslant 1$ по неравенству Гёльдера

$$B\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^{p'}(x+2\pi k)\biggr)^{p/p'}\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p,$$

где мы воспользовались оценкой

$$\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^q(x+2\pi k)\biggr)^{1/q}\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x+2\pi k)=1,\quad q\geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}A&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p|\sin x|^{\nu}\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi n(k-1/2)}^{2\pi n(k+1/2)}|f(x)|^p|\sin\tfrac{x}{n}|^{\nu}\,dx\\&=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p|\sin\tfrac{x}{n}|^{\nu}\,dx\leqslant\frac{1}{n^{\nu+1}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p|x|^{\nu}\,dx.\end{aligned}$$

Отсюда и из

$$T(0)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(2\pi kn)\varphi(2\pi k)=f(0)$$

получаем

$$n^{(\nu+1)/p}\,\frac{f(0)}{\|f\|_{p,|x|^{\nu}}}\leqslant\frac{T(0)}{\|T\|_{p,|\sin x|^{\nu}}}\leqslant\mathcal{A}_{p,|\sin x|^{\nu}}(\mathcal{T}_n;0),$$

что в силу произвольности f влечет искомую оценку снизу.

5.2. Оценка сверху

Пусть $n \geqslant 0$ и $T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}$ — произвольный тригонометрический полином. Ясно, что одновременно $T \in \mathcal{E}_n$.

Пусть вначале $\nu > 0$. Возьмем другое ядро Фейера $\psi(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ и пусть $s \geqslant 1$ — целое число, которое выберем позже. Положим $g(x) = \psi^s(x)T(x)$. Тогда $g \in \mathcal{E}_{n+2s}$.

Оценим сверху весовую норму g. На оси имеем

$$|g(x)|^p|x|^\nu = |\psi^s(x)T(x)|^p|x|^\nu = |T(x)|^p|\sin x|^\nu\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{2sp-\nu} = |T(x)|^p|\sin x|^\nu\psi^{sp-\nu/2}(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^\nu\,dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi(k-1/2)}^{2\pi(k+1/2)}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\psi^{sp-\nu/2}(x)\,dx\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x+2\pi k)|^p|\sin(x+2\pi k)|^\nu\psi^{sp-\nu/2}(x+2\pi k)\,dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi^{sp-\nu/2}(x+2\pi k)\,dx.\end{aligned}$$

Теперь выберем наименьшее s, такое что $sp-\nu/2 \geqslant 1$. Тогда $s = \lceil\frac{1+\nu/2}{p}\rceil$ и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi^{sp-\nu/2}(x+2\pi k) \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x+2\pi k)\Big)^{sp-\nu/2}.$$

Так как ψ — положительно определенная функция, то ее периодизация также будет положительно определенной функцией, поэтому для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x+2\pi k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(2\pi k) = \psi(0) = 1.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^\nu\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\,dx.$$

Сделаем замену $g(x) = f((n+2s)x)$. Тогда функция $f \in \mathcal{E}_1$,

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p|x|^\nu\,dx = (n+2s)^{\nu+1}\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^\nu\,dx \leqslant (n+2s)^{\nu+1}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\,dx$$

и $f(0) = g(0) = T(0)$. Следовательно,

$$\frac{T(0)}{\|T\|_{p,|\sin x|^\nu}} \leqslant (n+2s)^{(\nu+1)/p}\,\frac{f(0)}{\|f\|_{p,|x|^\nu}} \leqslant (n+2s)^{(\nu+1)/p}\mathcal{A}_{p,|x|^\nu}(\mathcal{E}_1;0).$$

В силу произвольности T это влечет искомую оценку сверху.

Если $\nu = 0$, то можно взять ядро Фейера $(\frac{\sin(x/2)}{x/2})^2$. Тогда вместо $n+2s$ получим $n+s$, где $s = \lceil\frac{1}{p}\rceil$.

6. Приложения констант Бернштейна — Никольского

Здесь мы приведем некоторые приложения констант Бернштейна — Никольского из разных разделов математики, в частности, сформулируем утверждения, где они участвуют.

6.1. Теория приближений

Порядковые неравенства Бернштейна — Никольского активно применяются в теории приближений, например, для доказательства обратных теорем. Здесь доказано большое число результатов. В качестве примера сошлемся на недавние работы [59, 58], где изучаются вопросы наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа в пространстве $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом Данкля v. В частности, доказаны следующие варианты классических обратных теорем теории приближений. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной функции $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\omega_r\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_p \leqslant C\frac{1}{n^r}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{r-1}E_j(f)_p, \tag{56}$$

где $\omega_r(\cdot)_p$ — модуль непрерывности функции f и $E_j(\cdot)_p$ — ее наилучшее приближение порядка j целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше j. Для $1 < p < \infty$, $q = \min\{p, 2\}$

$$\omega_r\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_p \leqslant C\,\frac{1}{n^r}\bigg(\sum_{j=1}^{n}j^{qr-1}E_j^q(f)_p\bigg)^{1/q} + \frac{\|f\|_p}{n^r},$$

что уточняет (56). Для доказательства этих неравенств были использованы предварительно установленные авторами приведенных работ порядковые неравенства Бернштейна и Никольского в пространстве $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ для целых функций экспоненциального сферического типа и дробной степени лапласиана Данкля.

Отметим, что в работе [58] применяются весовые неравенства Фурье–Данкля. В этих неравенствах также оцениваются весовые pq-нормы операторов, что роднит их с неравенствами Бернштейна — Никольского. Однако в теории последних принято изучать функции с ограниченным спектром преобразования Фурье, что вносит соответствующую специфику.

6.2. Свойство L^p-аппроксиманта при $p \geqslant 1$

В пионерской работе [77] Д. Джексон для тора и отрезка решал задачу об оценке уклонения от непрерывной функции в метрике C ее полинома наилучшего приближения (называемого аппроксимантом), взятого из метрики L^p при $1 \leqslant p < \infty$. Мотивация постановки данной задачи такая. В отличие от C, в метрике L^2 аппроксимант эффективно строится, например методом наименьших квадратов. Однако, если дальше он используется в метрике C, то в ней и нужно оценить его уклонение. Идея такой оценки следующая. Пусть многообразие M компактное с нормированной мерой ($|M| = 1$) и $Y \subset C(M)$ — некоторое полиномиальное подпространство. Через

$$A_pf = \operatorname*{argmin}_{u\in Y\cap L^p(M)} \|f-u\|_p$$

обозначим один из аппроксимантов функции f в метрике L^p (единственный при $1 < p < \infty$). Тогда для $f \in C(M)$

$$\|f - A_pf\|_\infty \leqslant (2\mathcal{C}_p(Y)+1)\|f - A_\infty f\|_\infty. \tag{57}$$

Действительно,

$$\|f - A_pf\|_\infty \leqslant \|f - A_\infty f\|_\infty + \|A_\infty f - A_pf\|_\infty \leqslant \|f - A_\infty f\|_\infty + \mathcal{C}_p(Y)\|A_\infty f - A_pf\|_p,$$

где

$$\|A_\infty f - A_pf\|_p \leqslant \|f - A_\infty f\|_p + \|f - A_pf\|_p \leqslant 2\|f - A_\infty f\|_p \leqslant 2\|f - A_\infty f\|_\infty.$$

Если $\dim Y \asymp n^d$ и $\mathcal{C}_p(Y) \asymp n^{d/p}$ при $n \to \infty$, то $\|f - A_pf\|_\infty \leqslant Cn^{d/p}\|f - A_\infty f\|_\infty$. Если $\|f - A_\infty f\|_\infty = o(n^{-d/p})$, то аппроксимант A_pf будет приближать функцию f в C.

6.3. Свойство L^1-аппроксиманта при $p<1$

Продолжим пример выше, но положим $0<p<1$. В этом случае в 1994 г. L.G. Brown и B.J. Lucier [24] доказали следующее утверждение, которое можно считать некоторым аналогом результата Джексона (57). Аппроксимант $A_1 f$ находится по критерию наилучшего приближения в L^1, который позволяет расширить действие оператора A_1 на все измеримые функции $f\in L^0(M)$ (см. детали в [24]). Тогда при $0<p<1$

$$\|f-A_1f\|_p\leqslant(2\mathcal{C}_1(Y)+1)^{1/p}\|f-A_pf\|_p.$$

В работе [24] сформулировано более сильное неравенство с константой $(2\mathcal{C}_1(Y))^{1/p-1}$ вместо $(2\mathcal{C}_1(Y)+1)^{1/p}$. Тогда части неравенства будут согласованы при $p=1$. Однако оно осталось не доказанным.

6.4. Проблема Ремеза

Рассмотрим вариант экстремальной задачи Ремеза о концентрации нормы функций из $Y\subset C(M)\cap L^p(M)$ на множестве малой меры (см., например, [98, 123, 124]). Спрашивается, сколь мала может быть мера измеримого множества $E\subset M$, такого что найдется функция $f\in Y$, для которой

$$\frac{1}{2}\int_M|f|^p\,dx\leqslant\int_E|f|^p\,dx$$

($\frac{1}{2}$ можно заменить на другое число). Известен следующий прием для оценки $|E|$ (см., например, [123]). Продолжим неравенство выше:

$$\int_E|f|^p\,dx\leqslant|E|\,\|f\|_\infty^p\leqslant|E|(\mathcal{C}_p(Y))^p\|f\|_p^p.$$

Поэтому

$$|E|\geqslant\frac{1}{2(\mathcal{C}_p(Y))^p}. \tag{58}$$

Проблема Ремеза решена в C для алгебраического и только недавно тригонометрического случаев (см. [124]). В метрике L^1 для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа данная проблема решена в работе [98]. Другие случаи автору неизвестны. В частности, в работе [98] доказано, что для $Y=\mathcal{T}_n$ в пространстве $L^1(\mathbb{T})$ при больших n справедливо точное неравенство $|E|\geqslant\frac{\pi}{n+1}$ (равенство достигается для полинома Рогозинского). Из оценки (58) и результатов раздела 3 (см. (24) и $L\approx0.172$) следует, что

$$|E|\geqslant\frac{1}{2c_n}\geqslant\frac{1}{2(n+1)L}\approx\frac{2.9}{n+1},$$

что, конечно, несколько слабее точного результата.

Еще один пример дают работы [123, 124]. Пусть $T\in\mathcal{T}_n$, $E\subset\mathbb{T}$. Тогда точное неравенство Ремеза $\|T\|_\infty\leqslant R\|T\|_{\infty;\mathbb{T}\setminus E}$ влечет неравенство Никольского $\|T\|_\infty\leqslant\frac{R}{|E|}\,\|T\|_1$. При $s=|E|\to0$ имеем $R=1+\frac{(ns)^2}{8}+O(s^4)$. Если взять $s=\frac{1}{n}$, то получим $\|T\|_\infty\leqslant(\frac{9}{8}+o(1))n\|T\|_1$. Здесь константа точная порядку, но слабее $c_n\approx0.172\,n$.

В связи с неравенством (58) представляют интерес все случаи, когда верхняя оценка $|E|$ будет совпадать по порядку с нижней оценкой, задаваемой константой Никольского. В некоторых случаях хорошая оценка следует на экстремальной функции в экстремальной задаче Логана (см. [60, 34]), где требуется функция с нулевым средним значением и малой мерой положительности как ниже.

Интересно еще отметить похожие результаты в задаче об оценке меры положительности функций из Y с нулевым средним значением (см., например, [130, 131]). Пусть $p = 1$, $f \in Y \setminus \{0\}$ и $\int_M f\,dx = 0$. Спрашивается, сколь мала может быть мера множества $E = \{x \in M\colon f(x) > 0\}$. В [131] использовался прием как выше:

$$\int_M |f|\,dx = \int_E f\,dx - \int_{M\setminus E} f\,dx = 2\int_E f\,dx \leqslant 2|E|\,\|f\|_\infty \leqslant 2|E|\mathcal{C}_1(Y)\|f\|_1,$$

откуда получаем неравенство вида (58) при $p = 1$

$$|E| \geqslant \frac{1}{2\mathcal{C}_1(Y)}. \tag{59}$$

Здесь вновь возникает вопрос о хороших верхних оценках $|E|$. Данная задача особенно сложная, например, для подпространства гармоник порядка n на сфере. Данное подпространство является собственным для оператора Бельтрами Δ_0. Данная задача изучается в контексте общей проблемы распределения нодальных областей собственных подпространств степеней оператора Лапласа. Здесь много открытых сложных проблем (см., например, [92]).

6.5. L^1-аппроксимация

В работе [18] авторы рассмотрели следующий вопрос L^1-аппроксимации. В окружении п. 6.4 выше, пусть функция $f \in L^1(M)$ равна тождественно нулю вне множества $E \subset M$. Сколь большой может быть мера $|E|$, чтобы аппроксимант $A_1 f = 0$. Применяя упомянутый в п. 6.3 критерий для $A_1 f$ авторы доказали, что для $q > 1$

$$|E| \geqslant \frac{1}{(2\mathcal{C}_{1q}(Y))^{q'}} \geqslant \frac{1}{2^{q'}\mathcal{C}_1(Y)}.$$

где для второго неравенства мы применили (37). Вновь получаем оценку, родственную (58) и (59). Здесь также возникает сложный вопрос о правильной оценке сверху, на который в [18] дан частичный ответ.

На примере константы Никольского $L = \mathcal{C}_1(\mathcal{E}_1)$ покажем еще одну связь с проблемой наилучшей весовой L^1-аппроксимации. Имеем

$$L^{-1} = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}} |f|\,dx\colon f \in \mathcal{E}_1^{1,\mathrm{even}},\ f(0) = 1\right\}.$$

Представим f в виде $f(x) = 1 - x^2 g(x)$, где $g \in \mathcal{E}_1 \cap L^1_{x^2}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |1 - x^2 g(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |x^{-2} - g(x)|\,x^2\,dx.$$

Таким образом, вычисление константы L сводится к задаче наилучшей L^1-аппроксимации функции x^{-2} целыми функциями экспоненциального типа не выше 1 в весовом пространстве $L^1_{x^2}(\mathbb{R})$ (см. [129, 90]). Функция x^{-2} не принадлежит этому пространству, что не является препятствием [129]. В работах [129, 90] получено решение задачи приближения индивидуальных функций целыми функциями экспоненциального типа не выше σ в пространстве $L^1_{|E|^{-2}}(\mathbb{R})$, где E — целая функция Эрмита–Билера экспоненциального типа $\sigma/2$ [88]. Однако как отмечается в [90] вес x^2 не вкладывается в эту схему, что пока не позволяет вывести отсюда решение проблемы Никольского L.

6.6. Теория чисел

В недавней работе E. Carneiro, M. B. Milinovich, K. Soundararajan [25] доказали, что если справедлива гипотеза Римана о нулях дзета-функции, то для для простых чисел p_n имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{p_n}\log p_n} \leqslant \frac{21}{25}. \tag{60}$$

До этого существование конечной константы в правой части было доказано H. Cramér в 1920 г., а A. Dudek в 2015 г. установил, что она не больше 1. В работе [25] доказано еще несколько родственных результатов из теории чисел. Авторы использовали следующие экстремальные задачи одномерной оптимизации Фурье, одна из которых сводится к константе L (см. выше и п. 3.4). Пусть преобразование Фурье определяется как $\widehat{F}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixt}F(x)\,dx$. Тогда для $1\leqslant A<\infty$ нужно найти

$$\mathcal{C}(A)=\sup_{F\in C(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{\|F\|_1}\biggl(|F(0)|-A\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\widehat{F}(t)|\,dt\biggr),$$

$$\mathcal{C}^+(A)=\sup_{F\in C^{\mathrm{real}}(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{\|F\|_1}\biggl(F(0)-A\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} (\widehat{F}(t))_+\,dt\biggr),$$

Константа $\frac{21}{25}$ в правой части неравенства (60) получена из оценки $\mathcal{C}^+(\frac{36}{11})>\frac{25}{21}$. В пределе $A\to\infty$ получаем константу Никольского $\mathcal{C}(\infty)=2\pi L$.

6.7. Метрическая геометрия

В п. 4.4 рассмотрена сдвинутая задача Никольского для неотрицательных функций

$$\mathcal{A}_1^+(Y_{n0};0)=\sup_{0\leqslant f\in Y_{n0}\cap L^1(M)} \frac{f(0)}{\|f\|_1}$$

и показано, как получить ее решение при помощи квадратурных формул. Оказывается, что данная задача и ее варианты активно изучаются в гармоническом анализе в связи с приложениями, например, в метрической геометрии.

Приведем примеры. Пусть $M=\mathbb{S}^d$. Тогда из результатов п. 4.8 (см. также [33]) получаем

$$|\mathbb{S}^d|\mathcal{A}^+_{1;\mathbb{S}^d}(\Pi_n^d;e_d)=\mathcal{A}^+_{1,w_d;[-1,1]}(\mathcal{P}_n^{\mathrm{real}};1)=\sup_{0\leqslant P\in\mathcal{P}_n} \frac{P(1)}{\int_{-1}^1 P(t)w_d(t)\,dt}=I_d,$$

где e_d — северный полюс сферы, $w_d=\frac{(1-t)^{d/2-1}}{\int_{-1}^1(1-t)^{d/2-1}\,dt}$ — нормированный алгебраический вес Гегенбауэра. Оказывается решение экстремальной задачи I_d для полиномов дает известную оценку жестких дизайнов Дельсарта–Гёталса–Зейделя [69]. Конечное множество точек $x_1,\dots,x_N\in\mathbb{S}^d$ называется n-дизайном, если квадратурная формула

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^d|}\int_{\mathbb{S}^d} f(x)\,dx=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(x_i)$$

справедлива для любого алгебраического полинома степени не выше n от $d+1$ переменного (как в (23)). Фундаментальной проблемой метрической геометрии (и ее приложений, например, в теории кодирования) является нахождение n-дизайнов с наименьшим числом узлов $N(d,n)$. Оказывается, что [69, 87]

$$N(d,n)\geqslant I_d=\binom{d+[\frac{n+1}{2}]-1}{d}+\binom{d+[\frac{n}{2}]}{d},$$

что является оценкой жестких дизайнов. Данная оценка обобщена на компактные римановы многообразия ранга 1 [87].

Пусть $M = \mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — как ранее выпуклое тело,

$$\mathcal{A}^{+}_{1;\mathbb{R}^d}(\mathcal{E}_1(\Omega); 0) = \sup_{0 \leqslant f \in \mathcal{E}_1(\Omega) \cap L^1(\mathbb{R}^d)} \frac{f(0)}{\int_{L^1(\mathbb{R}^d)} f(x)\, dx} = I(\Omega),$$

где, если перейти к преобразованию Фурье,

$$I(\Omega) = \sup\Big\{\frac{\widehat{f}(0)}{f(0)} \colon f \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d),\ \operatorname{supp} f \subset \Omega,\ \widehat{f} \geqslant 0\Big\}. \tag{61}$$

Получили так называемую экстремальную задачу Турана для положительно определенных функций с малым носителем. Решению этой задачи и ее вариантов посвящено сейчас большое число работ, в том числе автора в соавторстве (см., например, [67, 68, 55] и библиографию там). В настоящее время проблема $I(\Omega)$ решена только для заполняющих пространство тел (многогранников Вороного, спектральных тел) и евклидова шара, где результат доказывался разными авторами [115, 126, 50, 8, 81, 19]. В этих случаях $I(\Omega) = \frac{|\frac{1}{2}\Omega|}{(2\pi)^d}$ и экстремальной функцией является свертка $\chi_{\frac{1}{2}\Omega} * \chi_{\frac{1}{2}\Omega}$, преобразованию Фурье которой отвечает ядро Фейера. Открытой сложной проблемой является доказательство экстремальности данной функции для других выпуклых тел Ω.

Если в задаче (61) положить $\Omega = B^d$ и расширить класс функций, разрешив им принимать неположительные вне B^d значения, то получим известную оценку линейного программирования плотности сферической упаковки евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ одинаковыми шарами радиуса 1/2 (см. работы [49, 26]). Соответствующая проблема в этом случае также называется задачей Дельсарта. Недавно она была решена при помощи модулярных форм и шварцовских функций в размерностях $d = 8, 24$ [127, 28], что дало в этих размерностях решение проблемы Кеплера сферической упаковки. Данный выдающийся результат подчеркивает необходимость изучения вариантов задач Никольского. Теория задачи Дельсарта развивается в разных направлениях. Одно из них связано с принципом неопределенности J. Bourgain, L. Clozel, J.-P. Kahane [23], где также недавно получен прогресс в работах [27, 39], а также [60] для функций с ограниченным спектром.

7. Заключение

В заключении этого обзора естественно привести некоторые открытые проблемы из теории точных неравенств Бернштейна — Никольского, которые возникли при изложении. Некоторые из них сложные, другие представляют частный интерес, но все по своему важны. Мы не будем напоминать определения, см. текст выше.

1. Доказать результат типа Левина — Любинского при $q \neq \infty$.
2. Привести примеры сдвига максимума в весовом случае при $p < 1$.
3. В (33) выяснить асимптотическое поведение $\|P_n^*\|_{p,w_{\alpha,\beta}}$ при $n \to \infty$.
4. Доказать оценки типа (36) для случая $\mathcal{T}_n(B^d)$.
5. Вычислить константу $L = \mathcal{L}_{11}$, например, как корень явно выписываемого трансцендентного уравнения.
6. Можно ли в оценке (32) для многомерной константы $\mathcal{L}_{d1}$ уточнить верхнюю и нижнюю границы экспоненциально по d?

7. Доказать, что радиальная экстремальная функция в проблеме $\mathcal{L}_{d1}$ единственная не только среди радиальных функций.

8. Доказать, что знаки ненулевых коэффициентов Тейлора экстремальных функций в проблемах $c_{np}^{(r)}$, $L_p^{(r)}$ чередуются.

9. Решить задачу (55) для $-1/2 < \alpha < -0.272$.

10. Развить изложенную в разд. 4 теорию для случая гиперболических пространств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

2. Amir D., Ziegler Z. Polynomials of extremal L_p-norm on the L_∞-unit sphere // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 18. P. 86–98.

3. Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю. Экстремальные задачи для функций с малым носителем // Матем. заметки. 1996. Том 60, № 3. С. 323–332.

4. Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю. Письмо в редакцию // Матем. заметки. 2000. Том 68, № 3. С. 479.

5. Андреев Н.Н., Юдин В.А. Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены и кубатурные формулы чебышевского типа // Труды МИАН. 2001. Том 232. С. 45–57.

6. Арестов В.В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Том 45, № 1. С. 3–22.

7. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, № 1. P. 21–42.

8. Arestov V.V., Berdysheva E.E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.

9. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Том 20, № 1. С. 17–31.

10. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.

11. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, № 4. P. 689–708.

12. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Anal. Math. 2016. Vol. 42, № 2. P. 91–120.

13. Ash J.M., Ganzburg M. An extremal problem for trigonometric polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 127, № 1. P. 211–216.

14. Attila M., Nevai P.G. Bernstein's inequality in L^p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ bounds for orthogonal polynomials // Ann. of Math. 1980. Vol. 111, № 1. P. 145–54.

15. Бабенко А.Г. Неравенства слабого типа для тригонометрических полиномов // Сборник научных трудов. Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Том 2. С. 34–41.

16. Бари Н.К. Обобщение неравенств С.Н. Бернштейна и А.А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Том 18, № 2. С. 159–176.

17. Belinsky E., Dai F., Ditzian Z. Multivariate approximating averages // J. Approx. Theory. 2003. Vol. 125, № 1. P. 85–105.

18. Benyamini Y., Kroó A., Pinkus A. L^1-approximation and finding solutions with small support // Constr. Approx. 2012. Vol. 36, № 3. P. 399–431.

19. Bianchi G., Kelly M. A Fourier analytic proof of the Blaschke–Santalo inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 143, № 11. P. 4901–4912.

20. Boas R.P. Entire functions. N.Y.: Academic Press, 1954.

21. Богатырев А.Б. Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для нескольких отрезков // Матем. сб. 1999. Том 190, № 11. С. 15–50.

22. Bondarenko A., Radchenko D., Viazovska M. Well-separated spherical designs // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 1. P. 93–112.

23. Bourgain J., Clozel L., Kahane J.-P. Principe d'Heisenberg et fonctions positives // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2010. Vol. 60, № 4. P. 1215–1232.

24. Brown L.G., Lucier B.J. Best approximations in L^1 are near best in L^p, $p < 1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 120, № 1. P. 97–100.

25. Carneiro E., Milinovich M.B., Soundararajan K. Fourier optimization and prime gaps // Comment. Math. Helv. 2019. Vol. 94. P. 533–568.

26. Cohn H., Elkies N. New upper bounds on sphere packings. I // Ann. of Math. (2). 2003. Vol. 157, № 2. P. 689–714.

27. Cohn H., Goncalves F. An optimal uncertainty principle in twelve dimensions via modular forms // Invent. math. 2019. Vol. 217. P. 799–831.

28. Cohn H., Kumar A., Miller S.D., Radchenko D., Viazovska M. The sphere packing problem in dimension 24 // Ann. of Math. 2017. Vol. 185, № 3. P. 1017–1033.

29. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. I. М.: Мир, 1990.

30. Dai F. Multivariate polynomial inequalities with respect to doubling weights and A_∞ weights // J. Funct. Anal. 2006. Vol. 235, № 1. P. 137–170.

31. Dai F., Feng H., Tikhonov S. Reverse Hölder's inequality for spherical harmonics // Proc. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 144, № 3. P. 1041–1051.

32. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii inequality for lacunary spherical polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 2020. Vol. 148, № 3. P. 1169–1174.

33. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, № 1. P. 161–185.

34. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. 101553.

35. Dai F., Tikhonov S. Weighted fractional Bernstein's inequalities and their applications // J. d'Anal. Math. 2016. Vol. 129. P. 33–68.

36. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. N.Y.: Springer, 2013.

37. Дейкалова М.В. О точном неравенстве Джексона–Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Том 15, № 1. С. 122–134.

38. Erdelyi T. Arestov's theorems on Bernstein's inequality // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 250. 105323.

39. Goncalves F., Oliveira e Silva D., Ramos J.P.G. On regularity and mass concentration phenomena for the sign uncertainty principle // J. Geom. Anal. 2021. Vol. 31. P. 6080–6101.

40. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. II. Invariance theorems and certain multivariate inequalities of different metrics // Constr. Approx. 2019. Vol. 50. P. 543–577.

41. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // J. Fourier Anal. Appl. 2020. Vol. 26, № 11.

42. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 252. 105351.

43. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. V. An asymptotic equality related to polynomials with given Newton polyhedra // J. Math. Anal. Appl. 2021. Vol. 499, № 1. 125026.

44. Ganzburg M.I. Asymptotics of sharp constants in Markov–Bernstein–Nikolskii type inequalities with exponential weights // J. Approx. Theory. 2021. Vol. 265. 105550.

45. Ganzburg M. Sharp constants of approximation theory. VI. Multivariate inequalities of different metrics for polynomials and entire functions // arXiv:2103.09368. 2021.

46. Ganzburg M., Tikhonov S. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, № 3. P. 449–466.

47. Genchev T.G. Entire functions of exponential type with polynomial growth on $\mathbb{R}^n_x$ // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 60. P. 103–119.

48. Геронимус Я.Л. Об одной экстремальной задаче Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Том 2, № 4. С. 445–456.

49. Горбачев Д.В. Экстремальная задача для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. 2000. Том 6, № 1. С. 71–78.

50. Горбачев Д.В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Том 69, № 3. С. 346–352.

51. Горбачев Д.В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.

52. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79.

53. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Мат. сб. 2015. Том 206, № 8. С. 63–98.

54. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Turán's and Fejér's extremal problems for Jacobi transform // Anal. Math. 2018. Vol. 44, № 4. P. 419–432.

55. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Экстремальные задачи Турана, Фейера, Бомана для многомерного преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Матем. сб. 2019. Том 210, № 6. С. 56–81.

56. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Константы Никольского–Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Том 25, № 2. С. 75–87.

57. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Fractional smoothness in L^p with Dunkl weight and its applications // Math. Notes. 2019. Vol. 106, № 4. P. 537–561.

58. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 258. 105462.

59. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, № 3. P. 555–605.

60. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. Uncertainty principles for eventually constant sign bandlimited functions // SIAM J. Math. Anal. 2020. Vol. 52, № 5. P. 4751–4782.

61. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89.

62. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 143–153.

63. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Письмо в редакцию // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 3. С. 336–338.

64. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Константы Маркова–Бернштейна — Никольского для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 29–44.

65. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Новые границы алгебраической константы Никольского // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 45–55.

66. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

67. Gorbachev D.V., Tikhonov S.Y. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Zeit. 2018. Vol. 289, № 3–4. P. 859–874.

68. Gorbachev D., Tikhonov S. Doubling condition at the origin for non-negative positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 147. P. 609–618.

69. Delsarte P., Goethals J.M., Seidel J.J. Spherical codes and design // Geom. Dedicata. 1977. Vol. 6, № 3. P. 363–388.

70. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

71. Hörmander L., Bernhardsson B. An extension of Bohr's inequality // Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math. 1993. Vol. 29. P. 179–194.

72. Ибрагимов И.И. Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Том 121, № 3. С. 415–417.

73. Ибрагимов И.И., Джафаров А.С. О некоторых неравенствах для целой функции конечной степени и ее производных // Докл. АН СССР. 1961. Том 138, № 4. С. 755–758.

74. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна — Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3 (231). С. 179–180.

75. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна — Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР. 1992. Том 194. С. 111–119.

76. Иванов В.И. Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Матем. заметки. 1975. Том 18, № 4. С. 489–498.

77. Jackson D. Certain problems of closest approximation // Bull. Am. Math. Soc. 1933. Vol. 39. P. 889–906.

78. Камзолов А.И. Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах // Матем. заметки. 1974. Том 15, № 6. С. 967–978.

79. Камзолов А.И. Неравенство Бернштейна для дробных производных полиномов по сферическим гармоникам // УМН. 1984. Том 39, № 2 (236). С. 159–160.

80. Камзолов А.И. О приближении функций на сфере S^n // Сердика. 1984. Том 84, № 1. С. 3–10.

81. Kolountzakis M.N., Ré*vé*sz Sz.Gy. On a problem of Tur*á*n about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.

82. Конягин С.В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Том 243, № 5. С. 1116–1118.

83. Koornwinder T.H. Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // In “Special functions: Group theoretical aspects and applications”, R.A. Askey, T.H. Koornwinder and W. Schempp (eds.), Dordrecht: Reidel, 1984. P. 1–85.

84. Korevaar J. An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde (2). 1949. Vol. 23. P. 55–62.

85. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.

86. Лебедев В.И. Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Матем. сб. 2004. Том 195, № 10. С. 21–66.

87. Levenshtein V.I. Universal bounds for codes and designs // In “Handbook of coding theory”, V.S. Pless and W.C. Huffman Eds. Amsterdam: Elsevier, 1998.

88. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

89. Levin B.Ya. Lectures on entire functions. English revised edition. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.

90. Levitan, B.M. 1973. “Theory of generalized shift operators”, Nauka, Moscow. (In Russ.)

91. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. Littmann F., Spanier M. Extremal signatures // Constr. Approx. 2018. Vol. 47. P. 339–356.

92. Logunov A. Nodal sets of Laplace eigenfunctions: Polynomial upper estimates of the Hausdorff measure // Ann. of Math. 2018. Vol. 187, № 1. P. 221–39.

93. Lubinsky D.S. On sharp constants in Marcinkiewicz–Zygmund and Plancherel-Polya inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 2014. Vol. 142, № 10. P. 3575–3584.

94. Lubinsky D.S. Weighted Markov–Bernstein inequalities for entire functions of exponential type // Publications de l’Institut Mathématique. 2014. Vol. 96 (110). P. 181–192.

95. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. d’Anal. Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

96. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, № 3. P. 459–468.

97. Лизоркин П.И. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Том 29, № 1. С. 109–126.

98. Малыхин Ю.В., Рютин К.С. О концентрации L_1-нормы тригонометрических полиномов и целых функций // Матем. сб. 2014. Том 205, № 11. С. 95–124.

99. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.

100. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.

101. Nessel R., Wilmes G. Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type // J. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 25, № 1. P. 7–18.

102. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Том 38. С. 244–278.

103. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

104. Nursultanov E.D., Ruzhansky M.V., Tikhonov S.Y. Nikolskii inequality and functional classes on compact lie groups // Funct. Anal. Its Appl. 2015. Vol. 49. P. 226–229.

105. Песенсон И.З. Неравенство Бернштейна в представлениях групп Ли // Докл. АН СССР. 1990. Том 313, № 4. С. 803–806.

106. Pesenson I. Bernstein–Nikolskii inequalities and Riesz interpolation formula on compact homogeneous manifolds // J. Approx. Theory. 2008. Vol. 150, № 2. P. 175–198.

107. Pesenson I. Bernstein–Nikolskii and Plancherel–Polya inequalities in L_p-norms on non-compact symmetric spaces // Math. Nachr. 2009. Vol. 282, № 2. P. 253–269.

108. Pinkus A., Ziegler Z. Interlacing properties of the zeros of the error functions in best L^p-approximations // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 27, № 1. P. 1–18.

109. Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Том 71, № 5. С. 149–196.

110. Queffélec H., Zarouf R. On Bernstein's inequality for polynomials // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9. P. 1181–1207.

111. Rahman Q.I., Schmeisser G. L_p inequalities for entire functions of exponential type // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320. P. 91–103.

112. Runovski K., Schmeisser H.-J. Inequalities of Calderon–Zygmund type for trigonometric polynomials // Georgian J. of Math. 2001. Vol. 8, № 1. P. 165–179.

113. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.

114. Shapiro H. Topics in approximation theory. Lecture notes in mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1971. Vol. 187,

115. Siegel C.L. Über gitterpunkte in convexen körpern and ein damit zusammenhängendes extremalproblem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

116. Simonov I.E., Glazyrina P.Y. Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 192. P. 69–81.

117. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

118. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. 1975. Том 98 (140), № 3 (11). С. 395–415.

119. Тайков Л.В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // УМН. 1965. Том 20, № 3. С. 205–211.

120. Тайков Л.В. Одно обобщение неравенства С.Н. Бернштейна // Тр. МИАН СССР. 1965. Том 78. С. 43–47.

121. Тайков Л.В. О наилучшем приближении ядер Дирихле // Матем. заметки. 1993. Том 53, № 6. С. 116–121.

122. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР, ред. С.М. Никольский. 1986. Том 178. С. 1–112.

123. Temlyakov V., Tikhonov S. Remez-type and Nikol'skii-type inequalities: General relations and the hyperbolic cross polynomials // Constr. Approx. 2017. Vol. 46. P. 593–615.

124. Tikhonov S., Yuditskii P. Sharp Remez inequality // Constr. Approx. 2020. Vol. 52.

125. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960.

126. Vaaler J.D. Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, № 2. P. 183–216.

127. Viazovska M.S. The sphere packing problem in dimension 8 // Ann. of Math. 2017. Vol. 185, № 3. P. 991–1015.

128. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.

129. Виноградов О.Л., Гладкая А.В. Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной метриках с весом // Алгебра и анализ. 2014. Том 26, № 6. С. 10–28.

130. Юдин В.А. Положительные значения полиномов // Матем. заметки. 2002. Том 72, № 3. С. 477–480.

131. Юдин В.А. О положительных значениях сферических гармоник и тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 2004. Том 75, № 3. С. 476–480.

132. Заставный В.П., Манов А.Д. Положительная определенность комплексной кусочно-линейной функции и некоторые ее применения // Матем. заметки. 2018. Том 103, № 4. С. 519–535.

133. Ziegler Z. Minimizing the $L_{p,\infty}$-distortion of trigonometric polynomials // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61, № 2. P. 426–431.

REFERENCES

1. Akhiezer, N.I. 1965. “Lectures in the theory of approximation”, Second revised and enlarged edition, Nauka, Moscow. (In Russ.)

2. Amir, D. & Ziegler, Z. 1976. “Polynomials of extremal L_p-norm on the L_∞-unit sphere”, *J. Approx. Theory*, vol. 18, pp. 86–98.

3. Andreev, N.N., Konyagin, S.V. & Popov, A.Yu. 1996. “Extremum problems for functions with small support”, *Math. Notes*, vol. 60, no. 3, pp. 241–247.

4. Andreev, N.N., Konyagin, S.V. & Popov, A.Yu. 2000. “Letter to the editor: Extremum problems for functions with small support”, *Math. Notes*, vol. 68, no. 3, pp. 415.

5. Andreev, N.N. & Yudin, V.A. 2001. “Polynomials of least deviation from zero and Chebyshev-type cubature formulas”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 232, pp. 39–51.

6. Arestov, V.V. 1982. “On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 18, no. 1, pp. 1–17.

7. Arestov, V., & Babenko, A., & Deikalova, M., & Horváth, Á. 2018. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line”, *Anal. Math.*, vol. 44, no. 1, pp. 21–42.

8. Arestov, V.V. & Berdysheva, E.E. 2002. “The Turán problem for a class of polytopes”, *East J. Approx.*, vol. 8, no. 3, pp. 381–388.

9. Arestov, V.V. & Glazyrina, P.Yu. 2015. “Bernstein–Szegö inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, vol. 288, no. suppl. 1, pp. 13–28.

10. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. “Nikol’skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, vol. 284, no. suppl. 1, pp. 9–23.

11. Arestov, V. & Deikalova, M. 2015. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 689–708.

12. Arestov, V. & Deikalova, M. 2016. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval”, *Anal. Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 91–120.

13. Ash, J.M. & Ganzburg, M. 1999. “An extremal problem for trigonometric polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 127, no. 1, pp. 211–216.

14. Attila, M. & Nevai, P.G. 1980. “Bernstein’s inequality in L^p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ bounds for orthogonal polynomials”, *Ann. of Math.*, vol. 111, no. 1, pp. 145–54.

15. Babenko, A.G. 1992. “Weak-type inequalities for trigonometric polynomials”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 2, pp. 34–41. (In Russ.)

16. Bari, N.K. 1954. “Generalization of inequalities of S.N. Bernshtein and A.A. Markov”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 18, no. 2, pp. 159–176. (In Russ.)

17. Belinsky, E., Dai, F. & Ditzian, Z. 2003. “Multivariate approximating averages”, *J. Approx. Theory*, vol. 125, no. 1, pp. 85–105.

18. Benyamini, Y., & Kroó, A. & Pinkus, A. 2012. “L^1-approximation and finding solutions with small support”, *Constr. Approx.*, vol. 36, no. 3, pp. 399–431.

19. Bianchi, G. & Kelly, M. 2015. “A Fourier analytic proof of the Blaschke–Santalo inequality”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 143, no. 11, pp. 4901–4912.

20. Boas, R.P. 1954. “Entire functions”, Academic Press, N.Y.

21. Bogatyrev, A.B. 1999. “Effective computation of Chebyshev polynomials for several intervals”, *Sb. Math.*, vol. 190, no. 11, pp. 1571–1605.

22. Bondarenko, A., Radchenko, D. & Viazovska, M. 2015. “Well-separated spherical designs”, *Constr. Approx.*, vol. 41, no. 1, pp. 93–112.

23. Bourgain, J., & Clozel, L., & Kahane, J.-P. 2010. “Principe d’Heisenberg et fonctions positives”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 60, no. 4, pp. 1215–1232.

24. Brown, L.G. & Lucier, B.J. 1994. “Best approximations in L^1 are near best in L^p, $p < 1$”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 120, no. 1, pp. 97–100.

25. Carneiro, E., Milinovich, M.B. & Soundararajan, K. 2019. “Fourier optimization and prime gaps”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 94, pp. 533–568.

26. Cohn, H. & Elkies, N. 2003. “New upper bounds on sphere packings. I”, *Ann. of Math. (2)*, vol. 157, no. 2, pp. 689–714.

27. Cohn, H., & Goncalves, F. 2019. “An optimal uncertainty principle in twelve dimensions via modular forms”, *Invent. math.*, vol. 217, pp. 799–831.

28. Cohn, H., & Kumar, A., & Miller, S.D., Radchenko, D. & Viazovska, M. 2017. “The sphere packing problem in dimension 24”, *Ann. of Math.*, vol. 185, no. 3, pp. 1017–1033.

29. Conway, J.H. & Sloane, N.J.A. 1999. “Sphere packings, lattices and groups”, Third edition, Springer-Verlag, N.Y.

30. Dai, F. 2006. “Multivariate polynomial inequalities with respect to doubling weights and A_∞ weights”, *J. Funct. Anal.*, vol. 235, no. 1, pp. 137–170.

31. Dai, F., Feng, H. & Tikhonov, S. 2016. “Reverse Hölder’s inequality for spherical harmonics”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 144, no. 3, pp. 1041–1051.

32. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii inequality for lacunary spherical polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 148, no. 3, pp. 1169–1174.

33. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

34. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2021. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, *Journal of Complexity*, vol. 65, 101553.

35. Dai, F. & Tikhonov, S. 2016. “Weighted fractional Bernstein’s inequalities and their applications”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 129, pp. 33–68.

36. Dai, F. & Xu, Yu. 2013. “Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls”, Springer, N.Y.

37. Deikalova, M.V. 2009. “About the sharp Jackson–Nikol’skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, vol. 265, no. suppl. 1, pp. S129–S142.

38. Erdelyi, T. 2020. “Arestov’s theorems on Bernstein’s inequality”, *J. Approx. Theory*, vol. 250, 105323.

39. Goncalves, F., & Oliveira e Silva, D. & Ramos, J.P.G. 2021. “On regularity and mass concentration phenomena for the sign uncertainty principle”, *J. Geom. Anal.*, vol. 31, pp. 6080–6101.

40. Ganzburg, M.I. 2019. “Sharp constants of approximation theory. II. Invariance theorems and certain multivariate inequalities of different metrics”, *Constr. Approx.*, vol. 50, pp. 543–577.

41. Ganzburg, M.I. 2020. “Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities”, *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 26, no. 11.

42. Ganzburg, M.I. 2020. “Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets”, *J. Approx. Theory*, vol. 252, 105351.

43. Ganzburg, M.I. 2021. “Sharp constants of approximation theory. V. An asymptotic equality related to polynomials with given Newton polyhedra”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 499, no. 1, 125026.

44. Ganzburg, M.I. 2021. “Asymptotics of sharp constants in Markov–Bernstein–Nikolskii type inequalities with exponential weights”, *J. Approx. Theory*, vol. 265, 105550.

45. Ganzburg, M. 2021. “Sharp constants of approximation theory. VI. Multivariate inequalities of different metrics for polynomials and entire functions”, *arXiv:2103.09368.*

46. Ganzburg, M. & Tikhonov, S. 2017. “On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities”, *Constr. Approx.*, vol. 45, no. 3, pp. 449–466.

47. Genchev, T.G. 1977. “Entire functions of exponential type with polynomial growth on $\mathbb{R}^n_x$”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 60, pp. 103–119.

48. Geronimus, J. 1938. “Sur un problème extrémal de Tchebycheff”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 2, no. 4, pp. 445–456. (In Russ.)

49. Gorbachev, D.V. 2000. “Extremal problem for entire functions of exponential spherical type, connected with the Levenshtein bound on the sphere packing density in $\mathbb{R}^n$”, *Izvestiya of the Tula State University Ser. Mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 71–78. (In Russ.)

50. Gorbachev, D.V. 2001. “Extremum problem for periodic functions supported in a ball”, *Math. Notes*, vol. 69, no. 3, pp. 313–319.

51. Gorbachev, D.V. 2005. “An integral problem of Konyagin and the (C,L)-constants of Nikol’skii”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. Suppl. 2, pp. S117–S138.

52. Gorbachev, D.V. & Dobrovolskii, N.N. 2018. “Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R},|x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 67–79. (In Russ.)

53. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2015. “Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type”, *Sbornik: Math.*, vol. 206, no. 8, pp. 1087–1122.

54. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2018. “Turán’s and Fejér’s extremal problems for Jacobi transform”, *Anal. Math.*, vol. 44, no. 4, pp. 419–432.

55. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2019. “Turán, Fejér and Bohman extremal problems for the multivariate Fourier transform in terms of the eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem”, *Sb. Math.*, vol. 210, no. 6, pp. 809–835.

56. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2019. “Nikol’skii–Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no. 2, pp. 75–87. (In Russ.)

57. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2019. “Fractional smoothness in L^p with Dunkl weight and its applications”, *Math. Notes*, vol. 106, no. 4, pp. 537–561.

58. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2020. “Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting”, *J. Approx. Theory*, vol. 258, 105462.

59. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2019. “Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications”, *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

60. Gorbachev, D., Ivanov, V. & Tikhonov, S. 2020. “Uncertainty principles for eventually constant sign bandlimited functions”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 52, no. 5, pp. 4751–4782.

61. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2018. “On interrelation of Nikolskii constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 80–89. (In Russ.)

62. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2019. "Interrelation between Nikolskii–Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153. (In Russ.)

63. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. "Letter to the Editor", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 336–338. (In Russ.)

64. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. "Markov–Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials in L^p-space with the Gegenbauer weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 29–44. (In Russ.)

65. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. "Novel bounds of algebraic Nikol'skii constant", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 45–55. (In Russ.)

66. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

67. Gorbachev, D.V. & Tikhonov, S.Y. 2018. "Wiener's problem for positive definite functions", *Math. Zeit.*, vol. 289, no. 3–4, pp. 859–874.

68. Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. "Doubling condition at the origin for non-negative positive definite functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 147, pp. 609–618.

69. Delsarte, P., Goethals, J.M. & Seidel, J.J. 1977. "Spherical codes and design", *Geom. Dedicata*, vol. 6, no. 3, pp. 363–388.

70. Helgason, S. 1962. "Differential geometry and symmetric spaces", Academic Press, N.Y.–London.

71. Hörmander, L. & Bernhardsson, B. 1993. "An extension of Bohr's inequality", *Boundary value problems for partial differential equations and applications, RMA Res. Notes Appl. Math.*, vol. 29, pp. 179–194.

72. Ibragimov, I.I. 1958. "Extremum problems in the class of trigonometric polynomials", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 121, no. 3, pp. 415–417.

73. Ibragimov, I.I. & Dzhafarov, A.S. 1961. "Some inequalities for an entire function of finite degree and its derivatives", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 138, no. 4, pp. 755–758. (In Russ.)

74. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

75. Ivanov, V.A. 1993. "Precise results in the problem of the Bernstein–Nikol'skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124.

76. Ivanov, V.I. 1975. "Certain inequalities in various metrics for trigonometric polynomials and their derivatives", *Math. Notes*, vol. 18, no. 4, pp. 880–885.

77. Jackson, D. 1933. "Certain problems of closest approximation", *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 39, pp. 889–906.

78. Kamzolov, A.I. 1974. "On Riesz's interpolational formula and Bernshtein's inequality for functions on homogeneous spaces", *Math. Notes*, vol. 15, no. 6, pp. 576–582.

79. Kamzolov, A.I. 1984. “Bernstein’s inequality for fractional derivatives of polynomials in spherical harmonics”, *Russian Math. Surveys*, vol. 39, no. 2, pp. 163–164.

80. Kamzolov, A.I. 1984. “Approximation of functions on the sphere S^n”, *Serdica*, vol. 84, no. 1, pp. 3–10. (In Russ.)

81. Kolountzakis, M.N., & Révész, Sz.Gy. 2003. “On a problem of Turán about positive definite functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 3423–3430.

82. Konyagin, S.V. 1978. “Bounds on the derivatives of polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 243, no. 5, pp. 1116–1118. (In Russ.)

83. Koornwinder, T.H. 1984. “Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups”, In “Special functions: Group theoretical aspects and applications”, R.A. Askey, T.H. Koornwinder and W. Schempp (eds.), Reidel, Dordrecht, pp. 1–85.

84. Korevaar, J. 1949. “An inequality for entire functions of exponential type”, *Nieuw Arch. Wiskunde (2)*, vol. 23, pp. 55–62.

85. Korneichuk, N.P. 1976. “Extremal problems of approximation theory”, Nauka, Moscow. (In Russ.)

86. Lebedev, V.I. 2004. “Extremal polynomials and methods of optimization of numerical algorithms”, *Sb. Math.*, vol. 195, no. 10, pp. 1413–1459.

87. Levenshtein, V.I. 1998. “Universal bounds for codes and designs”, *In “Handbook of coding theory”*, V.S. Pless and W.C. Huffman Eds. Elsevier, Amsterdam.

88. Levin, B.Ya. 1980. “Distribution of zeros of entire functions”, Providence, RI, Amer. Math. Soc.

89. Levin, B.Ya. 1996. “Lectures on entire functions”, English revised edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

90. Levitan, B.M. 1973. “Theory of generalized shift operators”, Nauka, Moscow. (In Russ.)

91. Littmann, F. & Spanier, M. 2018. “Extremal signatures”, *Constr. Approx.*, vol. 47, pp. 339–356.

92. Logunov, A. 2018. “Nodal sets of Laplace eigenfunctions: Polynomial upper estimates of the Hausdorff measure”, *Ann. of Math.*, vol. 187, no. 1, pp. 221–39.

93. Lubinsky, D.S. 2014. “On sharp constants in Marcinkiewicz–Zygmund and Plancherel-Polya inequalities”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 142, no. 10, pp. 3575–3584.

94. Lubinsky, D.S. 2014. “Weighted Markov–Bernstein inequalities for entire functions of exponential type”, *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 96 (110), pp. 181–192.

95. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. “L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 125, pp. 243–283.

96. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. “Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.

97. Lizorkin, P.I. 1965. “Bounds for trigonometrical integrals and an inequality of Bernstein for fractional derivatives”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, no. 1, pp. 109–126. (In Russ.)

98. Malykhin, Yu.V. & Ryutin, K.S. 2014. “Concentration of the L_1-norm of trigonometric polynomials and entire functions”, *Sb. Math.*, vol. 205, no. 11, pp. 1620–1649.

99. Martyanov, I.A. 2020. “Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247–258. (In Russ.)

100. Milovanović, G.V., & Mitrinović, D.S. & Rassias, Th.M. 1994. “Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros”, World Scientific Publ. Co., Singapore.

101. Nessel, R. & Wilmes, G. 1978. “Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type”, *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 25, no. 1, pp. 7–18.

102. Nikol'skii, S.M. 1951. “Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 38, pp. 244–278. (In Russ.)

103. Nikolskii, S.M. 1975. “Approximation of functions of several variables and imbedding theorems”, Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y.

104. Nursultanov, E.D., Ruzhansky, M.V. & Tikhonov, S.Y. 2015. “Nikolskii inequality and functional classes on compact lie groups”, Funct. Anal. Its Appl. vol. 49, pp. 226–229.

105. Pesenson, I.Z. 1991. “The Bernstein inequality in representations of Lie groups”, *Dokl. Math.*, vol. 42, no. 1, pp. 87–90.

106. Pesenson, I. 2008. “Bernstein–Nikolskii inequalities and Riesz interpolation formula on compact homogeneous manifolds”, *J. Approx. Theory*, vol. 150, no. 2, pp. 175–198.

107. Pesenson, I. 2009. “Bernstein–Nikolskii and Plancherel–Polya inequalities in L_p-norms on non-compact symmetric spaces”, *Math. Nachr.*, vol. 282, no. 2, pp. 253–269.

108. Pinkus, A. & Ziegler, Z. 1979. “Interlacing properties of the zeros of the error functions in best L^p-approximations”, *J. Approx. Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 1–18.

109. Platonov, S.S. 2007. “Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line”, *Izvestiya: Math.*, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048.

110. Queffélec, H. & Zarouf, R. 2019. “On Bernstein's inequality for polynomials”, *Anal. Math. Phys.*, vol. 9, pp. 1181–1207.

111. Rahman, Q.I. & Schmeisser, G. 1990. “L_p inequalities for entire functions of exponential type”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 320, pp. 91–103.

112. Runovski, K., & Schmeisser, H.-J. 2001. “Inequalities of Calderon–Zygmund type for trigonometric polynomials”, *Georgian J. of Math.*, vol. 8, no. 1, pp. 165–179.

113. Szegö, G. 1975. “Orthogonal polynomials”, 4th ed., Providence, RI, Amer. Math. Soc.

114. Shapiro, H. 1971. “Topics in approximation theory”, Lecture notes in mathematics, vol. 187, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg.

115. Siegel, C.L. 1935. “Über gitterpunkte in convexen körpern and ein damit zusammenhängendes extremalproblem”, *Acta Math.*, vol. 65, pp. 307–323.

116. Simonov, I.E. & Glazyrina, P.Y. 2015. “Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight”, *J. Approx. Theory*, vol. 192, pp. 69–81.

117. Stein, E. & Weiss, G. 1971. “Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces”, Princeton Univ. Press.

118. Storozhenko, É.A., & Krotov, V.G. & Oswald, P. 1975. “Direct and converse theorems of Jackson type in L^p spaces, $0 < p < 1$”, *Math. USSR-Sb.*, vol. 27, no. 3, pp. 355–374.

119. Taikov, L.V. 1965. “A group of extremal problems for trigonometric polynomials”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 20, no. 3 (123), pp. 205—211. (In Russ.)

120. Taikov, L.V. 1967. “A generalization of an inequality of S.N. Bernshtein”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 78, pp. 43–48.

121. Taikov, L.V. 1993. “On the best approximation of Dirichlet kernels”, *Math. Notes*, vol. 53, no. 6, pp. 640–643.

122. Temlyakov, V.N. 1989. “Approximation of functions with bounded mixed derivative”, *English transl. in Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 1, pp. 1–112.

123. Temlyakov, V. & Tikhonov, S. 2017. “Remez-type and Nikol’skii-type inequalities: General relations and the hyperbolic cross polynomials”, *Constr. Approx.*, vol. 46, pp. 593–615.

124. Tikhonov, S. & Yuditskii, P. 2020. “Sharp Remez inequality”, *Constr. Approx.*, vol. 52.

125. Timan, A.F. 1963. “Theory of approximation of functions of a real variable”, Pergamon Press, MacMillan, N.Y.

126. Vaaler, J.D. 1985. “Some extremal functions in Fourier analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*, vol. 12, no. 2, pp. 183–216.

127. Viazovska, M.S. 2017. “The sphere packing problem in dimension 8”, *Ann. of Math.*, vol. 185, no. 3, pp. 991–1015.

128. Vilenkin, N.J. 1978. “Special functions and the theory of group representations”, Translations of mathematical monographs, vol. 22, Providence, RI, Amer. Math. Soc.

129. Vinogradov, O.L. & Gladkaya, A.V. 2015. “Entire functions with the least deviation from zero in the uniform and the integral metrics with a weight”, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 26, no. 6, pp. 867–879.

130. Yudin, V.A. 2002. “Positive values of polynomials”, *Math. Notes*, vol. 72, no. 3, pp. 440–443.

131. Yudin, V.A. 2004. “On positive values of spherical harmonics and trigonometric polynomials”, *Math. Notes*, vol. 75, no. 3, pp. 447–450.

132. Zastavnyi, V.P. & Manov, A. 2018. “Positive definiteness of complex piecewise linear functions and some of its applications”, *Math. Notes*, vol. 103, no. 4, pp. 550–564.

133. Ziegler, Z. 1977. “Minimizing the $L_{p,\infty}$-distortion of trigonometric polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 61, no. 2, pp. 426–431

Получено 14.06.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.