ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 511.331

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ДИСКРИМИНАНТА

И. Ф. Авдеев (г. Орёл)

Аннотация

В статье получено приближение для дзета-функции квадратичной формы отрицательного дискриминанта. Даны оценки в близи единичной прямой.

Ключевые слова: -функции Римана, квадратичная форма, ряд Дирихле.

APPROXIMATION OF THE ZETA FUNCTION OF QUADRATIC FORMS OF NEGATIVE DISCRIMINANT

I. F. Avdeev (c. Orel)

Abstract

In this article functional approximate equation was get for zeta-function in square form with negative discriminant.

Keywords: Riemann zeta-function, quadratic form, the Dirichlet series

Пусть $\zeta(s, K)$ — дзета-функция квадратичной формы K, определяется равенством

$$\zeta(s, K) = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(K(m, n))^s},$$

где s — комплексное число, $s = \sigma + it$. Мы будем рассматривать задачу вывода простейшего приближенного функционального уравнения для дзета-функции $\zeta(s, K)$, позволяющее продолжить эту функцию и получить нетривиальные оценки модуля этой функции вблизи единичной прямой $\sigma = 1$. Будем считать, что форма $K(m, n)$ представлена в виде

$$K(m, n) = am^2 + bmn + cn^2,$$

Здесь коэффициенты a, b и c предполагаются удовлетворяющими условиям

$$|b| \leqslant c \leqslant a,$$
$$d = 4ac - b^2,$$

где $-d < 0$ дискриминант формы.

Проверим сходимость ряда Дирихле в области $\sigma > 1$.

Имеем

$$\left|\sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{1}{(K(m,n))^s}\right| \leqslant \sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{1}{(K(m,n))^s} \leqslant \sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{2}{(am^2+bmn+cn^2)^\sigma}.$$

Так как $|bmn| \leqslant \frac{|b|}{2}(m^2+n^2)$ и

$$K(m,n) = am^2 + bmn + cn^2 \geqslant am^2 + cn^2 - \frac{|b|}{2}(m^2 - n^2) \geqslant \frac{a}{2}m^2 + \frac{c}{2}n^2.$$

Далее

$$\sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{2}{(am^2+cn^2)^\sigma} \leqslant \sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{2}{(m^2+n^2)^\sigma} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^\sigma}.$$

Здесь $r(n)$ — есть число представления натурального n в виде суммы двух квадратов целых чисел. Известно, что $r(n)$ удовлетворяет неравенству

$$r(n) \leqslant 4\tau(n),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n. С другой стороны, для $\tau(n)$ известна оценка

$$\tau(n) \leqslant n^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon \ln 2}\right)^{2^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

$\varepsilon > 0$ — любое [2]. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^\sigma}$$

сходится при всех $\sigma = 1 + \varepsilon$, что и требовалось доказать. Отметим, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(s,K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{c^s n^{2s}} + \sum_{m>0} \frac{2}{(K(m,n))^s} =$$
$$= \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{2}{(K(m,n))^s} + \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{2}{(K(m,-n))^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{c^s n^{2s}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{a^s m^{2s}} =$$
$$= \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{2}{(K(m,n))^s} + \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{2}{(K(m,-n))^s} + 2(a^{-s} + c^{-s})\zeta(2s).$$

Для каждого из трех слагаемых правой части последнего равенства необходимо вывести приближенное функциональное уравнение. Но для функции $\zeta(s)$ соответствующее уравнение давно известно см. [3], а для каждого из двух других слагаемых оно выводится одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением функции $f(s)$ вида

$$f(s) = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{(K(m,n))^s} = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{2}{(am^2+bmn+cn^2)^s} = 2(4a)^s g(s),$$

где $g(s)$ определена последним равенством. Точнее

$$g(s) = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{2}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Будем искать приближенное функциональное уравнение для функции $g(s)$. Справедливо следующее утверждение теоремы.

Теорема 1. *При $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 0$ для точек $s = \sigma + it$ с условием $t < \pi v$, где v-полуцелое справедливо приближенное функциональное уравнение вида*

$$g(s) = \sum_{m,n\leqslant V} f(m,n) + \int\limits_M f(x,y)dxdy + O\left(a^2 t(a+v\sqrt{d})^{-2\sigma}\right)$$

Здесь $M = M_0/M_1$, где M_0 — область точек с условием $\frac{1}{2} \leqslant x, y < +\infty$, M_1 — область, определенная неравенством $\max(x,y) < V$.

Доказательство. Зафиксируем $n \geqslant 1$ и рассмотрим сумму $g_n(s)$ по m вида

$$g_n(s) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{2}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть Q и R — полуцелые числа, удовлетворяющие условию $Q < R$. На функцию $f(x)$ наложим условие, что на отрезке $[Q,R]$ ее вторая производная существует и непрерывна. Тогда при любом натуральном m справедлива следующая формула*

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(n) \int\limits_Q^R f(x)dx + \left.\frac{f'(x)}{12}\right|_Q^R + T_2,$$

где

$$T_2 = \int\limits_Q^R f''(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx$$

Доказательство. См. [4]

В качестве $f(x)$ в этой лемме возьмем функцию вида

$$f(x) = f(x,n) = \frac{1}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Положим так же $Q = V$, а параметр R будем считать большим числом, превосходящим V. Тогда для суммы

$$A_Q(s) = \sum_{V<m\leqslant Q} \frac{1}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}$$

приходим к равенству

$$A_Q(s) = \int\limits_V^B \frac{dx}{((2ax+bn)^2+dn^2)^s} +$$
$$+ \left(\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_x \frac{1}{12}\Bigg|_V^R + T_2,$$

где

$$T_2 = \int\limits_V^B \left(\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx$$

Вычислим явно первые и вторые производные по x указанные выше. Имеем

$$(((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s})'_x = -s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}4a(2ax+bn),$$
$$(-s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}4a(2ax+bn))'_x =$$
$$= s(s+1)((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}\times$$
$$\times 16a^2(2ax+bn)^2 - s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}8a^2.$$

В случае, когда $\sigma > 1$, параметр R можно устремить к бесконечности. В результате приходим к равенству при каждом $n < V$, где V — полуцелое

$$g_n(s) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{2}{((2am+bn)^2+dn^2)^s} =$$
$$= \sum_{1\leqslant m\leqslant V} \frac{2}{((2am+bn)^2+dn^2)^s} + \int\limits_V^{\infty} \frac{dx}{((2ax+bn)^2+dn^2)^s} -$$
$$- \frac{(((2aV+bn)^2+dn^2)^{-s})'_x}{12} +$$
$$+ \int\limits_V^{\infty} (((2aV+bn)^2+dn^2)^{-s})''_{xx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx.$$

В случае $n > V$ будем иметь

$$g_n(s) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s} - \frac{\left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_x}{12} +$$

$$+ \int\limits_{V}^{\infty} \left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx.$$

Далее просуммируем величину $g_n(s)$ по параметру n. Имеем

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \sum_{n<V} g_n(s) + \sum_{n>V} g_n(s) = G_1 + G_2.$$

Оценивая величины G_1 и G_2, приходим к следующему результату

$$g(s) = \sum_{1\leqslant m,n\leqslant V} \frac{1}{((a+bn)^2+dn^2)^s} + \iint\limits_{M} \frac{dxdy}{((2ax+by)^2+dy^2)^s} +$$

$$+O\left(ta^{-2\sigma}V^{-2\sigma} + t^2V^{-1-2\sigma}d^{-\sigma} + td^{\frac{1}{2}}a^{-2\sigma-2}V^{-2\sigma} + ta^{-2\sigma}V^{-1-2\sigma} + \right.$$

$$\left. + td^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1}V^{-2\sigma} + t^2V^{-1-2\sigma}d^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1} + ta^2\left(a+V\sqrt{d}\right)^{-2\sigma}\right).$$

Учитывая, что $\sigma > \frac{1}{2}, d < a^2$ и $t \leqslant V$ остаток в полученной формуле можно преобразовать к виду $O\left(ta^2\left(a+V\sqrt{d}\right)^{-2\sigma}\right)$ что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Избранные труды: математика / Под ред. и вступ. ст. А. А. Карацубы; Рос. акад. наук, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 480 с.

2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН СССР. 1947. Т. 23. 110 с.

3. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: Иностр. лит., 1953. 409 с.

4. Авдеев И. Ф. О некоторых формулах суммирования // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4(40). С. 24–32.

5. Авдеев Ф. С., Авдеев И. Ф. Асимптотическое разложение остаточного члена в приближенном функциональном уравнении для дзета-функции Римана // Ученые записки Орловского государственного университета. Сер. Естественные науки. 2012. № 3(47). С. 6–14.

6. Авдеев И. Ф. Об оценке остаточного члена в приближенном функциональном уравнении Харди—Литтлвуда для дзета-функции Римана // Ученые записки Орловского государственного университета. Сер. Естественные науки. 2012. № 3(47). С. 15–19.

Орловский государственный университет
Поступило 14.09.2013