ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-44-57

Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем биллиардными книжками с потенциалом Гука[1]

В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтов

Ведюшкина Виктория Викторовна — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: arinir@yandex.ru
Кибкало Владислав Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва); Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: slava.kibkalo@gmail.com
Пустовойтов Сергей Евгеньевич — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Аннотация

Рассмотрены системы движения частицы в поле центрального потенциала Гука по биллиардной книжке, склеенной из плоских круговых биллиардов. Важный класс невырожденных фокусных особенностей ранга 0 интегрируемых систем с 2 степенями свободы полностью реализован таким классом биллиардов. А именно, для каждой полулокальной фокусной особенности была построена биллиардная система с особенностью, послойно гомеоморфной данной.

Ключевые слова: интегрируемый биллиард, фокусная особенность, слоение Лиувилля.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:
В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтов. Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем биллиардными книжками с потенциалом Гука. // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 44–57.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01303 в МГУ имени М. В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-44-57

Realization of focal singularities of integrable systems using billiard books with a Hooke potential field

V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo, S. E. Pustovoitov

Vedyushkina Victoria Viktorovna — doctor of physics and mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: arinir@yandex.ru
Kibkalo Vladislav Alexandrovich — candidate of physics and mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow); Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: slava.kibkalo@gmail.com
Pustovoitov Sergey Evgenievich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Abstract

Systems of particle motion in the Hooke central potential field on a billiard book glued from flat circular billiard domains are considered. An important class of nondegenerate focal singularities of the rank 0 of integrable systems with 2 degrees of freedom is completely realized by this class of billiards. Namely, for each semi-local focal singularity the constructed billiard system has a singularity fiberwise homeomorphic to the given one.

Keywords: integrable billiard, focal singularity, Liouville foliation.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo, S. E. Pustovoitov, 2021, "Realization of focal singularities of integrable systems using billiard books with a Hooke potential field" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 44–57.

1. Введение

В последние годы были получены принципиальные продвижения в теории интегрируемых биллиардов. Системы из этого важного класса динамических систем с ударами, напомним, имеют "достаточное количество" первых интегралов. В недавней программной работе А.Т.Фоменко и В.В.Ведюшкиной [1] сделан подробный обзор результатов и открытых задач об интегрируемых биллиардах и топологии слоений на их фазовом пространстве. Такие системы удается успешно исследовать методами теории топологической классификации слоений Лиувилля и их особенностей, разработанной в работах А.Т.Фоменко, его учеников и соавторов и подробно изложенной в монографии А.В. Болсинова и А.Т.Фоменко [2].

Класс интегрируемых биллиардов недавно был существенно расширен В.В.Ведюшкиной [3] благодаря открытию класса биллиардных книжек (многослойных биллиардов). Эти системы задаются на столах-комплексах, склеенных из плоских столов-областей по общим дугам границы. Имеется отображение (проекция) комплекса на плоскость, а ребра комплекса оснащаются перестановками, задающими переход шара с листа на лист.

Если дуги границы всех плоских столов принадлежат одному и тому же семейству квадрик с общими фокусами (возможно, вырожденному: семейству парабол или семейству окружностей и их радиусов), а перестановки на пересекающихся дугах границы коммутируют, то рассмотренные многослойные биллиарды остаются кусочно-гладко интегрируемыми по Лиувиллю. Фазовая топология таких систем, как оказалось, весьма разнообразна: В.В.Ведюшкиной, А.Т.Фоменко и их соавторами были реализованы многие топологические инварианты особенностей и слоений [3]-[6], возможных в гладких и вещественно-аналитических интегрируемых системах.

Как оказалось, эти результаты нетривиально дополняют недавние работы [7]-[9], посвященные гипотезе Биркгофа об интегрируемых биллиардах и доказательству ее различных формулировок. Опуская некоторые детали, основной эффект можно сформулировать так: интегрируемость нескольких классов биллиардов *требует* принадлежности дуг границы стола семейству софокусных квадрик, а не только *следует* из нее. Как следствие, класс плоских интегрируемых биллиардов без потенциала довольно "беден" в смысле послойной гомеоморфности их слоений Лиувилля.

Найденное В. В. Ведюшкиной обобщение оставляет класс интегрируемых биллиардов достаточно разнообразным, не разрушая при этом доказанную в плоском случае связь интегрируемости с софокусными квадриками. Более того, эта конструкция допускает комбинацию с добавлением потенциала, в поле которого интегрируем биллиард на каждом из плоских листов комплекса.

Отметим, что прежде нами, в основном, изучались свойства слоений на неособых 3-мерных поверхностях постоянной энергии в фазовом пространстве. В настоящей работе сделан следующий шаг: показано, что класс 4-мерных невырожденных фокусных особенностей (встречающихся в полуторических интегрируемых системах, во многих системах из приложений: волчке Лагранжа, сферическом маятнике) целиком реализуется многослойными круговыми биллиардами с потенциалом Гука.

Нашу работу мы посвящаем профессору Владимиру Николаевичу Чубарикову в связи с его семидесятилетием.

1.1. Гипотеза А.Т.Фоменко о биллиардах и ее доказательство

В программной статье [1] центральное место занимает гипотеза об интегрируемых биллиардах, сформулированная А.Т. Фоменко. Согласно ней, класс интегрируемых биллиардов "достаточно широк" в классе всех интегрируемых систем. Эквивалентностью систем является послойная гомеоморфность их слоений Лиувилля [2] на неособых уровнях Q^3_h энергии $H = h$. Классифицирующим инвариантом Фоменко–Цишанга, см. [10], является граф с числовыми метками, вершинам которого соответствуют невырожденные особенности ранга 1 в Q^3_h.

Ряд положений гипотезы Фоменко уже доказан (см. недавний обзор [11]) в работах В.В.Ведюшкиной, А.Т.Фоменко, И.С.Харчевой и В.А.Кибкало: реализованы все невырожденные особенности ранга 1 (см. [3]), числовые метки инварианта Фоменко-Цишанга (см. [4], [5]) и базы слоений Лиувилля (см. [6]). По остальным пунктам получены значительные продвижения (реализация многих классов гомеоморфности многообразий Q^3 и послойной гомеоморфности слоений на них). Некоторые свойства слоений, как оказалось, не являются сами по себе препятствиями к реализации такого слоения биллиардом (например, среди Q^3_h биллиардов найдены Q^3 из класса многообразий Вальдхаузена, но не многообразий Зейферта).

В основе этих результатов лежит открытая В.В.Ведюшкиной [3] конструкция "биллиардной книжки", т.е. двумерного стола-комплекса, склеенного из плоских столов по общим гладким дугам границы. При этом в качестве каждого листа (2-клетки) книжки берется стол *плоского* интегрируемого софокусного или кругового биллиарда. Тем самым, определена "проекция": отображение CW-комплекса на плоскость, являющееся изометрией в ограничении на каждый

лист CW-комплекса. Переход биллиардного шара с листа на лист после его удара о 1-клетку комплекса (гладкую дугу склейки нескольких листов-столов по их общей граничной дуге) задается перестановкой на множестве склеенных по ней столов. Пусть для каждой вершины (0-клетки) стола-комплекса перестановки на трансверсально пересекающихся в ней дугах коммутируют. Тогда движение частицы непрерывно. Изоэнергетическая поверхность Q^3_h гомеоморфна гладкому многообразию [12].

Софокусные или круговые столы плоских биллиардов принадлежат к одному из конечного числа классов (с точки зрения топологии слоения на Q^3_h), поскольку углы $3\pi/2$ запрещены для непрерывности движения. Согласно недавно доказанной А.А.Глуцюком [7] версии гипотезы Биркгофа, такие и только такие биллиарды будут полиномиально интегрируемыми (на компактном плоском столе, граница которого является кусочно-гладкой, и хоть одна ее гладкая дуга не прямолинейна). Близкий результат верен и для плоских биллиардов в постоянном магнитном поле, см. [8]: стол должен быть диском или круговым кольцом с общим центром окружностей. Отметим также доказательство В.Ю.Калошиным и А.Соррентино локальной версии гипотезы Биркгофа [9].

1.2. Вопрос реализации 4-мерных особенностей биллиардами

С гипотезой Фоменко тесно связан другой вопрос, поставленный в работе [1]: какие 4-мерные особенности топологии слоений Лиувилля интегрируемых систем встречаются в интегрируемых биллиардах (то есть реализуются последними)? Например, чему послойно гомеоморфно слоение в малой 4-мерной окрестности особой точки? Классы эквивалентности слоений в окрестности точки часто называют *локальными особенностями*. Вопрос о послойной гомеоморфности слоений в окрестности всего слоя, содержащего такие точки, также весьма интересен. Уточним, что теперь от окрестности слоя требуется инвариантность при сдвигах вдоль гамильтоновых полей первых интегралов. Классы полученных слоений называют *полулокальными окрестностями*.

Двумя классами особенностей интегрируемых гамильтоновых систем $M^4, \omega, \mathcal{F} = (H, F)$, обнаруженными во многих системах из приложений [2], являются особенности с вырожденными одномерными орбитами (т.е. содержащие на особом слое окружности критических неботтовских точек ранга 1, см. [2]) или с невырожденными точками ранга 0 (положениями равновесия системы, т.е. точками, где $\mathrm{d}H = \mathrm{d}F = \vec{0}$).

Согласно теореме Элиассона [13], каждая локальная невырожденная особенность ранга 0 послойно гомеоморфна (и даже симплектоморфна) ровно одной из четырех модельных особенностей (в [2] они были названы особенностями типов центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус). Классификация *полулокальных* нерасщепляемых особенностей была получена Н.Т.Зунгом [14], см. также [2]. Все точки ранга 0, попавшие на общий слой, обязаны иметь одинаковый локальный тип. Локальная бифуркационная диаграмма Σ этих особенностей состоит из дуг двух трансверсально пересекающихся кривых (в случаях центр-центр, центр-седло, седло-седло) или одной изолированной точки (фокус-фокус). Отметим, что вырожденные особенности ранга 1 обычно находятся в $\mathcal{F}$-прообразах точек касания и возврата кривых Σ.

Реализация невырожденных особенностей ранга 0 биллиардами была начата В.А.Кибкало в работе [15]. Было показано, что локальные и полулокальные невырожденные особенности типов центр-центр, центр-седло и седло-седло действительно встречаются в слоениях Лиувилля софокусных биллиардов с отталкивающим потенциалом Гука на столах-комплексах. Далее было предложено, как реализовать произвольные особенности типа прямого произведения. Затем в работе [16] были построены биллиардные книжки с потенциалом Гука, особенности которых реализует топологический инвариант каждой полулокальной особенности седло-седло с единственной точкой ранга 0 на слое (включая и случай почти прямого произведения) —

круговую молекулу этой особенности.

В основе данного подхода лежит переход от геодезического потока на эллипсоида к биллиарду при устремлении к нулю малой полуоси эллипсоида. Топологические инварианты слоений Лиувилля потока на эллипсоиде с потенциалом Гука были вычислены И.Ф.Кобцевым в работе [17]. Изучение биллиарда с потенциалом Гука на плоских софокусных столах, отличных от эллипса, было выполнено С.Е.Пустовойтовым, см. [18], [19].

В настоящей работе произвольная полулокальная 4-мерная особенность типа фокус-фокус реализована с помощью класса интегрируемых круговых биллиардов с отталкивающим потенциалом Гука на столах-комплексах.

Рассмотрим прямое произведение открытого диска D^2 на тор T^2 и выберем на одном из торов n гомотопных друг другу нестягиваемых окружностей. Перейдем к фактор-пространству, отождествив точки каждой окружности друг с другом. Полученное слоение с одним особым слоем (тор с n перетяжками, гомотопически эквивалентный букету n сфер S^2) послойно гомеоморфно особенности типа фокус-фокус сложности b. То же самое число n возникает и как топологический инвариант следующего 3-мерного объекта, не содержащего точек ранга 0. Рассмотрим 3-мерную границу 4-мерной полулокальной особенности фокус-фокус. Ее круговая меченая молекула, т.е. инвариант слоения Лиувилля на этой 3-мерной границе (с базой окружность S^1 и слоем тор T^2), полностью определяется натуральным числом. Это есть числовая метка монодромии, отвечающая за класс сопряженности матрицы монодромии особенности.

2. Фокусные особенности и круговые биллиарды с потенциалом

В данном разделе для произвольной невырожденной фокусной особенности (возможной в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы) построен биллиард на столе-комплексе (склеенном из круговых столов) с отталкивающим потенциалом Гука, имеющий особенность, топологически эквивалентную данной.

2.1. Биллиард с потенциалом Гука в круге

Рассмотрим биллиардный стол $D \subset \mathbb{R}^2(x,y)$, являющийся замкнутым кругом радиуса $R = 1$ с центром в точке $(0,0)$. Фазовое пространство M^4 задается отождествлением пар точка-вектор (x, v_i) из T^*D для точек $x\ in \partial D$ граничной окружности и векторов скорости v_1 и v_2, удовлетворяющих закону "угол падения равен углу отражения". Матрица симплектической структуры Ω имеет стандартный вид в координатах $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ для точки (x, y), не лежащей в малой окрестности границы.

Введем на этом столе центральный отталкивающий потенциал Гука $k(x^2+y^2)/2$, где $k < 0$. Гамильтониан H такого биллиарда на столе D (который также обозначим D) имеет вид

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2), \qquad k < 0.$$

Следующая функция F является первым интегралом биллиарда, т.е. $\omega(\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} F) = 0$:

$$F = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Отражение от границы является упругим и сохраняет функцию F. Такая система является кусочно-гладко интегрируемой по Лиувиллю согласно определению А.Т.Фоменко [1].

Утверждение 1. *Образ фазового пространства $\mathcal{F}(M^4)$ биллиарда D при отображении момента $\mathcal{F} = (H, F)$ и бифуркационная диаграмма Σ изображены на рис. 1б. Она состоит из параболы и изолированной точки: начала координат. В прообразе этой точки есть*

критическая точка ранга 0 типа фокус-фокус. В прообразе точки параболы лежит по одной окружности, и соответствующий 3-атом имеет тип A. Прообраз любой другой точки, лежащей между ветвями параболы, гомеоморфен двумерному тору T^2.

Доказательство. 1. Каждая точка из Σ принадлежит к одному из двух классов. Первыми являются $\mathcal{F}$-образы критических точек $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ отображения $\mathcal{F}$, лежащих на удалении от границы D, т.е. при $x^2+y^2 < 1$. Вторые являются $\mathcal{F}$-образами точек, где фазовое пространство было склеено по отражению от границы.

Вычислим дифференциалы dH, dF и косые градиеты по формуле $\operatorname{sgrad} g = \Omega^{-1}\,\mathrm{d}g$.

$$\mathrm{d}H \;=\; kx\,\mathrm{d}x \,+\, ky\mathrm{d}y \,+\, \dot{x}\,\mathrm{d}\dot{x} \,+\, \dot{y}\,\mathrm{d}\dot{y}, \qquad \operatorname{sgrad} H = -k\dot{x}\,\mathrm{d}x \,-\, k\dot{y}\,\mathrm{d}y \,+\, x\,\mathrm{d}\dot{x} \,+\, y\,\mathrm{d}\,\dot{y},$$

$$\mathrm{d}F \;=\; \dot{y}\mathrm{d}x \,-\, \dot{x}\,\mathrm{d}y \,-\, y\,\mathrm{d}\dot{x} \,+\, x\,\mathrm{d}\dot{y}, \qquad \operatorname{sgrad} F \;=\; y\,\mathrm{d}x \,-\, x\,\mathrm{d}y \,+\, \dot{y}\,\mathrm{d}\dot{x} \,-\, \dot{x}\,\mathrm{d}\dot{y}.$$

В точке $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0, 0, 0, 0)$ имеем $\mathrm{d}H = \mathrm{d}F = \vec{0}$, т.е. это критическая точка ранга 0. Несложно проверить, что при $k < 0$ других критических точек у системы нет.

Определим тип локальной особенности в точке $(0, 0, 0, 0)$, следуя см. [2]; т. 1, гл. 1] . Вычислим линеаризации A_H и A_F векторных полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} F$:

$$A_H = \omega^{-1}\mathrm{d}^2H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_F = \omega^{-1}\mathrm{d}^2F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию $\lambda A_H + \mu A_F$ этих операторов. При $\lambda = \mu = 1$ ее собственные значения имеют вид $\pm i \pm \sqrt{-k}$ для каждой возможной пары знаков. Они попарно различны, отличны от нуля и не являются вещественными или чисто мнимыми при $k < 0$. Следовательно, данная критическая точка является невырожденной и имеет тип фокус-фокус при $k < 0$. Ее образом при отображении $\mathcal{F} = (H, F)$ является начало координат.

2. Для каждой фиксированной пары значений (h, f) отображения момента $\mathcal{F} = (H, F)$ опишем траектории биллиарда на столе D и область возможного движения, т.е. проекцию слоя Лиувилля на D. В полярных координатах (r, ϕ) имеем

$$H = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{kr^2}{2}, \qquad F = r^2\dot{\phi}.$$

При $f > 0$ частица движется против часовой стрелки, а при $f < 0$ — по часовой стрелке. В случае $f = 0$ имеем два случая. В первом случае $\dot{\phi} = 0$, и частица движения по диаметру круга D. Во втором случае $r = 0$: частица находится в центре стола D, где координаты r, ϕ не регулярны.

Вычислим $\dot{r}$ при $r > 0$. Выразив $\dot{\phi}$ из вида функции F и подставив в уравнение для H, имеем

$$\dot{r}^2 \;=\; 2h - kr^2 - f^2/r^2 \;\geqslant\; 0.$$

Следовательно, область возможного движения задается неравенствами на r

$$-kr^4 + 2hr^2 - f^2 \geq 0, \qquad r \leq 1.$$

Дискриминант левой части $4h^2 - 4kf^2 \geqslant 0$ всегда, поскольку $k < 0$. При этом меньший корень $\left(-h - \sqrt{h^2 - kf^2}\right)/(-k) \leqslant 0$. Следовательно, область возможного движения является пересечением стола D, заданного условием $r \leq 1$, и внешности круга $r \geq r_0 := \sqrt{(-h + \sqrt{h^2 - kf^2})/(-k)}$. При следующем условии она непуста и является круговым кольцом (или диском D целиком, в случае $f = 0, h \geq 0$), см. рис 1а:

$$-h + \sqrt{h^2 - kf^2} \leq -k \qquad \Longleftrightarrow \qquad h \geq (f^2 + k)/2.$$

Правое неравенство задает образ отображения момента $\mathcal{F}$. Его границей является парабола $h = (f^2+k)/2$. Диаграмма Σ состоит из нее и точки $(0,0)$ — образа критической точки фокус-фокус. Прообраз любой другой точки, лежащей между ветвями этой параболы, гомеоморфен тору. Это несложно проверить, следуя анализу биллиарда без потенциала в круге, см. [20].

В случае равенства $h = (f^2+k)/2$ имеем, что область возможного движения одномерна и является окружностью – границей биллиарда. Над каждой ее точкой висит один касательный к ней вектор скорости фиксированной длины, причем его направление зависит от знака f. Утверждение доказано. □

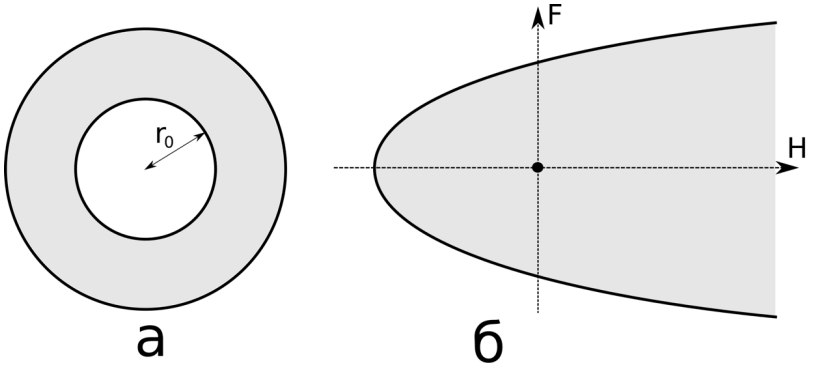

Рис. 1: (а) область возможного движения биллиарда D при фиксированных $h > (f^2+k)/2$, (б) образ отображения момента (H,F) для биллиарда D и его бифуркационная диаграмма: парабола $h = (f^2+k)/2$ и образ $(0,0)$ точки фокус-фокус.

Заметим, что область возможного движения является всем биллиардным столом D (т. е. $r_0 = 0$), если и только если $h \geq 0$ и $f = 0$. Тогда точка движется вдоль диаметра, пролетая через центр. В случае $h < 0$ и $f = 0$ точка движется вдоль радиуса, не долетая до центра. В случае $f \neq 0$ траектория не лежит на диаметре и является кусочно-гладкой регулярной кривой. При этом направление обхода точки вокруг центра биллиарда (по или против часовой стрелке) определяется знаком $F = f$.

2.2. Метка монодромии для биллиардов в круге D и на комплексах Ω_n= nD

Для определения полулокального типа особенности в прообразе начала координат у биллиарда D и книжки Ω_n, склеенной из n экземпляров такого стола по циклической перестановке $(1, 2 \dots n)$, мы выполним два независимых вычисления. В данном разделе мы вычислим числовую метку монодромии на круговой молекуле этой особенности, т.е. целочисленный инвариант матрицы перехода между базисами на торе до и после обхода вокруг нее. Для этого мы найдем допустимые базисы и инварианты Фоменко–Цишанга для двух изоэнергетических поверхностей, на которых $H = \pm\varepsilon$ (более точно, вместо левой прямой $H = -\varepsilon$ мы возьмем некоторую параболу на плоскости Ohf, на которой $f'_h > 0$).

В следующем разделе мы покажем, что инвариантная окрестность особого слоя слоения биллиарда будет послойно гомеоморфна прямому произведению двумерного тора на двумерный открытый диск, в котором один из торов имеет n перетяжек. Иначе говоря, n замкнутых кривых на торе, гомологичных друг другу и не гомологичных нулю в $\pi_1(T^2)$, стянуты в n точек.

Замечание. Теоремы 1 и 2 из данного и следующего разделов весьма тесно связаны друг с другом, но используют несколько разные подходы к своим доказательствам. Одной из основных целей наших исследований является расширение набора методов, применяемых для иследования топологии систем биллиардов. Ранее В.В.Ведюшкиной были разработаны эффек-

тивные и оригинальные методы изучения топологии, вообще говоря, кусочно-гладких слоений Лиувилля систем биллиардов на 3-уровнях энергии Q^3_h. Представляет интерес развитие таких методов в 4-мерном случае. Кроме того, активное расширение класса изучаемых биллиардов (введение систем на столах-комплексах, добавление потенциала или магнитного поля, переход к метрике Минковского, добавление проскальзывания, а также их комбинации, см. [1]) часто дополнительно затрудняет адаптацию и строгое обоснование применимости ряда известных общих методов из теории интегрируемых систем (отметим, например, конструкцию гамильтонова сглаживания В.Ф.Лазуткина, см. [21]).

Теорема 1. *Числовая метка монодромии особенности в прообразе точки* $(0,0)$ *равна* n *для биллиардной системы с отталкивающим потенциалом Гука на столе* Ω_n*, склеенном из* n *экземпляров стола* Ω_1 *плоского биллиарда внутри круга* D *по перестановке* $(1,2,\dots,n)$ *на их окружности склейки.*

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим самый простой случай биллиарда Ω_1 (плоский биллиард). Зафиксируем значение гамильтониана $H = h = -\varepsilon < 0$. На рис. 2 изображено изменение области возможного движения и поведение траектории с ростом интеграла F. Такой перестройке соответствует молекула $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$, а соответствующее Q^3 гомеоморфно $S^1 \times S^2$. Здесь гладкая дуга траектории для $F < 0$ стягивается на отрезок радиуса и разворачивается в дугу для $F > 0$.

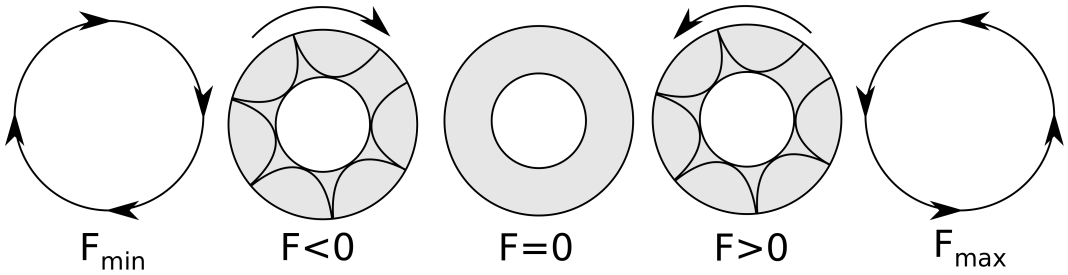

Рис. 2: Область возможного движения и поведение траекторий биллиарда $\Omega_1 = D$ при фиксированном значении $h = -\varepsilon < 0$ энергии H в зависимости от значения f интеграла F.

2. Зафиксируем теперь значение $h = \varepsilon > 0$ гамильтониана H. В отличие от предыдущего случая, область возможного движения при $f = 0$ становится всей биллиардной областью, а гладкие дуги траектории распрямляются в диаметры и затем снова искривляются. Направление обхода точки также определяется знаком $F = f$. Теперь на каждом торе Лиувилля выберем цикл γ, проекция которого на биллиарде лежит на соседних дугах траектории движения и дуге внутренней границы области возможного движения (голубой цикл на рис. 3). Несложно заметить, что при изменении параметра f соответствующий цикл γ также меняется непрерывно. Но при $f < 0$ получим $\gamma = \lambda_-$ (т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория A), а при $f > 0$ получим $\gamma = \lambda_+ + \mu_+$ (сумма исчезающего цикла и дополняющего его до базиса на граничном торе другого полнотория A). При этом для дополняющих циклов μ, гомологичных внутри полноторий A критическим траекториям (движениям по и против часовой стрелки) выполнено соотношение $\mu_+ = -\mu_-$. Таким образом, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix}\lambda_+\\ \mu_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-\\ \mu_-\end{pmatrix}$. Следовательно, такой перестройке соответствует молекула $A - A$ с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$, а соответствующее изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3.

Покажем, что полный прообраз точки $(h, f) = (0, 0)$ является "тором с перетяжкой". Рассмотрим близкий тор со значениями $h > 0, f = 0$. Этот тор отвечает движению вдоль диаметров исходного круга. При стремлении h к нулю скорость шара вблизи центра круга уменьшается. В пределе $h = 0$ получаем неподвижную точку $(0, 0, 0, 0)$ и некомпактные траектории,

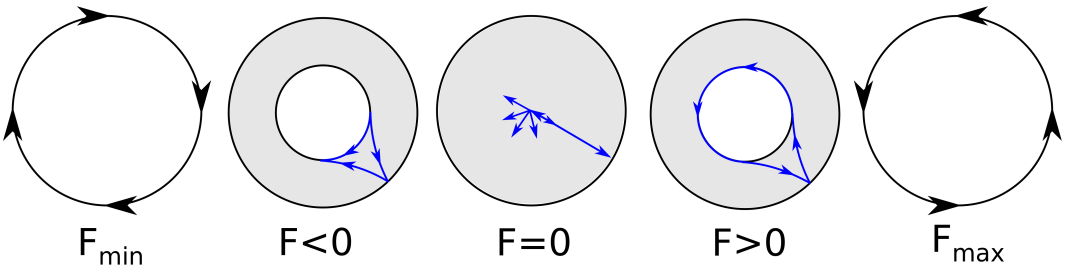

Рис. 3: Область возможного движения и поведение траекторий биллиарда $\Omega_1 = D$ при фиксированном значении $h = \varepsilon > 0$ энергии H в зависимости от значения f интеграла F.

направленные к ней или от нее. При $h = 0$ прообразом точки $(0, 0)$ является не окружность (соответсвующая единичным векторам скорости), а одна точка. Стягиваемый в точку при $h \to +0$ цикл был нетривиальным на торе Лиувилля. В результате получен искомый "тор с перетяжкой".

3. Теперь сделаем небольшое отступление. Найдем множество значений h, f интегралов H и F, для которых радиус внутренней границы равен заданному числу $r_0 = c$, где $0 < c < 1$. В этом случае решаем уравнение $\left(-h + \sqrt{h^2 - kf^2}\right)/(-k) = c$ и получаем параболу $h = (f^2 + c^2k)/(2c)$. Теперь в качестве контура обхода вокруг точки фокус-фокус выберем контур, состоящий из дуги этой параболы и отрезка вертикальной прямой (рис. 4, а). Изменение траектории движения при обходе этого контура изображено на рис. 4, б. На торе

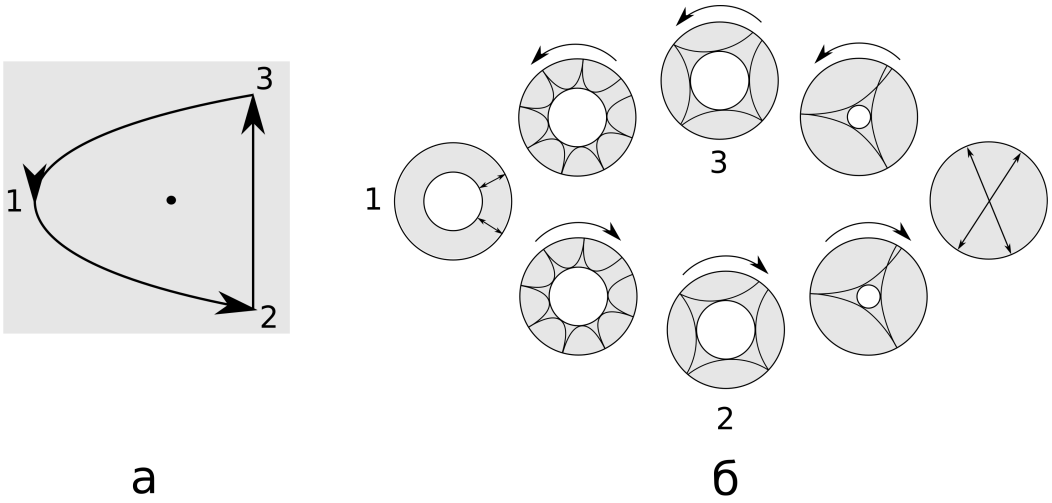

Рис. 4: (а) кривая в $\mathbb{R}^2(h, f)$, обходящая особую точку Σ, (б) движения частицы в ее прообразе.

Лиувилля, соответствующем точке 1, выберем базис следующим образом: образ цикла λ лежит на границе биллиарда, а образ цикла μ идет по радиусу. Теперь воспользуемся тем же трюком, каким мы пользовались для подсчета матрицы склейки для случая $h > 0$, а именно рассмотрим цикл γ, выбранный аналогично. В точке 1 $\gamma = \mu$ и остается таким при движении от 1 к 2. При движении от 2 к 3 цикл γ изменяется тем же образом, что и раньше, и при переходе от 3 к 1 становится равен $\lambda + \mu$. При этом цикл λ при таком же обходе не изменился. Следовательно, матрица монодромии имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Мы рассмотрели обычный биллиард в диске с потенциалом. Склеим теперь биллиардную книжку Ω_n из n копий такого биллиарда по их общей граничной окружности с циклической перестановкой $(1, 2 \dots n)$. Отметим, что в силу того, что область возможного движения

всегда ограничена границей биллиарда, такая склейка не добавит системе новых бифуркаций. Следовательно, бифуркационная диаграмма останется прежней.

Тем не менее, прообраз точки $(h, f) = (0, 0)$ теперь устроен сложнее. Рассмотрим тор Лиувилля, соответствующий значениям $h > 0,\ f = 0$. Он склеен из n торов Лиувилля для каждого листа биллиардной книжки, разрезанных и склеенных в единый тор по фиксированным циклам — прообразам границы кругового биллиарда. Без ограничения общности будем считать эти циклы параллелями торов. Заметим, что эти циклы гомологичны окружностям, проекция которых на биллиард попадает в центр круга. Поэтом при стремлении h к нулю необходимо стянуть каждую из n параллелей в одну точку. В результате получим тор с n "перетяжками".

Как и ранее, значениям $h < 0$ соответствует следующий инвариант слоения Лиувилля на такой изоэнергетической поверхности Q^3_h: молекула $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$, а Q^3 гомеоморфно $S^1 \times S^2$. Для $h > 0$ зададим цикл γ аналогично, но теперь он будет проходить по каждому плоскому листу книжки. Таким образом, при $F > 0$ этот цикл равен $\lambda_+ + n\mu_+$ (он обходит вокруг каждого из n центров кругов). Следовательно, этому случаю соответствует молекула $A - A$ с метками $r = 1/n$ и $\varepsilon = 1$, а Q^3 гомеоморфно $L(1, n)$. Из тех же рассуждений следует, что матрица монодромии при таком же выборе базиса для тора в точке 1 имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. Теорема доказана □

2.3. Класс послойной гомеоморфности 4-особенности для биллиарда Ω_n

.

Теорема 2. *Система биллиарда на книжке Ω_n, склеенной из n экземпляров биллиарда в круге D по перестановке $(1, 2, \ldots, n)$, имеет в своем слоении Лиувилля полулокальную особенность (содержащую точки $(0, 0, 0, 0)$ из T^*D для каждого из плоских листов), послойно гомеоморфную полулокальной особенности фокус-фокус с n критическими точками на особом слое.*

Доказательство. 1. Из отсутствия отражений (склеек фазового пространства) в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ в T^*D следует, что система вблизи нее является гладкой. Ранг отображения момента в ней равен нулю, ее невырожденность проверена, и определен тип собственных значений. Иначе говоря, биллиард на столе D_n имеет n локальных особенностей фокус-фокус. Все эти особые точки лежат на одном особом слое, который имеет тип тора с n перетяжками.

2. Остается изучить его 4-мерную окрестность. Она имеет вид $\mathcal{F}^{-1}(V)$ для некоторой малой окрестности $V_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2(h, f)$ начала координат $(0, 0)$, гомеоморфной диску. Это верно, поскольку прообраз каждой точки (h, f) связен.

Зафиксируем $y \in [0, 1]$. Для точки $a = (0, y) \in D$ рассмотрим подмножество $A \subset \mathbb{R}^2(\dot{x}, \dot{y})$ точек, образ которых при $\mathcal{F}$ попадает в V. Тогда в точке a имеем $2H(a) = ky^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, $F(a) = -y\dot{x}$.

Пусть $y \neq 0$ и V есть прямоугольник $-\varepsilon < h < \varepsilon, \delta < f < \delta$. Тогда фигура A ограничена, поскольку $\dot{y}^2 = -ky^2 + 2h + f^2/y^2$:

$$0 \leqslant |\dot{x}| < -\delta/y \qquad \sqrt{-ky^2 - 2\varepsilon} < |\dot{y}| < \sqrt{-ky^2 + 2\varepsilon + \delta^2/y^2}$$

Так как $k < 0$, то для некоторого $y > 0$ фигура A состоит из двух компонент связности, симметричных относительно прямой $\dot{y} = 0$ и имеющих $\dot{y} > 0$ или $\dot{y} < 0$. При малых ε, δ указанный y можно взять меньшим радиуса 1 круга D.

3. Тем самым, пересечение границы T^*D с полулокальной особенностью в полном прообразе $\mathcal{F}^{-1}(V)$ окрестности $V \subset \mathbb{R}^2(h, f)$ имеет две компоненты связности (соответствующие знаку $\dot{y}$, т.е. направлению вектора скорости внутрь круга или наружу). Каждая из них гомеоморфна

полноторию $V \times S^1$, где слой S^1 над точкой $(h, f) \in V$ есть пересечение слоя Лиувилля $\xi_{h,f}$ с указанной границей.

Склейка двух экземпляров T^*D по паре полноторий (с направлением вектора скорости внутрь круга и наружу соответственно) порождает ориентируемое многообразие: стандартные ориентации этих многообразий согласованы, что легко видеть, например, в склеиваемых точках $x = 0, y = 1, \dot{x}, \pm\dot{y}$.

4. Поскольку T^*D обладает гладкой и симплектической структурой, а также инвариантна относительно вращений, то на $\mathcal{F}^{-1}(V) \subset T^*D$ есть гладкое S^1-действие. Оно является гамильтоновым с гамильтонианом F. Следовательно, указанное подмножество послойно гомеоморфно элементарному 4-блоку, из n компонент которого склеивается полулокальная особенность типа фокус–фокус, см. [2], т.1, гл.9. При этом на множество склейки это действие доопределяется по непрерывности из упомянутого выше гамильтонова действия интеграла F на любом из двух склеиваемых по полноторию 4-блоков.

Следовательно, полулокальная особенность биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука на биллиардной книжке Ω_n, склеенной из n экземпляров биллиарда в круге D по перестановке $(1, 2, \ldots, n)$, послойно гомеоморфна особенности фокус-фокус с n положениями равновесия. Тем самым произвольная полулокальная особенность фокус-фокус реализована в классе биллиардных книжек с потенциалами. Теорема 2 доказана. □.

3. Заключение

Таким образом, один из важных классов полулокальных особенностей — невырожденные фокусные особенности — удалось полностью реализовать в топологической категории интегрируемыми биллиардами. Развитие решенной нами задачи возможно, например, по следующим направлениям.

Во-первых, особенности фокус-фокус в интегрируемых системах имеют нетривиальные гладкие и симплектические инварианты. Они устроены сложнее, чем топологические. Так гладкие инварианты фокусных особенностей с двумя положениями равновесия на одном слое описаны в работе А.В.Болсинова и А.М.Изосимова [22]. Симплектические инварианты фокусных особенностей полуторических интегрируемых систем ввел S. Vũ Ngọc в случае одной особой точки на слое [23] и (совместно с A. Pelayo) в общего случае для того же класса систем [24]. Вопрос о наличии их аналогов для кусочно-гладких биллиардов на столах-комплексах с потенциалом требует отдельного изучения.

Другим обобщением может являться проблема реализации особенностей систем с большим чем 2 числом степеней свободы с помощью многомерных софокусных биллиардов с потенциалом. Такие топологические инварианты изучались, например, Н.Т.Зунгом [14] и А.А.Ошемковым [25], [26], см. также [2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. Унив., Серия Мат. и Мех. 2019. №3. 15–25.

2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2, Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.

3. Ведюшкина В.В., Харчева И.С., Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, №12. 17–56.

4. Ведюшкина В.В., В.А. Кибкало В.А., Фоменко А.Т., Топологическое моделирование интегрируемых систем биллиардами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. 2020. **493**. 9–12.

5. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2020. №4, 22–28.

6. Ведюшкина В.В., Харчева И.С., Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2021. **212**, №8. 89–150.

7. Glutsyuk A., On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature // Journal of the European Mathematical Society. 2021. **23**, №3. 995–1049.

8. Bialy M., Mironov A.E., Algebraic non-integrability of magnetic billiards // J. Phys. A. 2016. 49, №45. 455101.

9. Kaloshin V., Sorrentino A., On the local Birkhoff conjecture for convex billiards // Ann. of Math. 2018. **188**, №1. 315–380.

10. Фоменко А.Т., Цишанг Х., Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, №3. 546–575.

11. Кибкало В.А., Фоменко А.Т., Харчева И.С., Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками // Тр. ММО. 2021. **82**, №1. 49–78.

12. Харчева И.С., Изоэнергетические многообразия бильярдных книжек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2020. №4. 12–22.

13. Eliasson L.H., Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Commentarii Mathematici Helvetici. 1990. **65**. 4–35.

14. Zung N.T., Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities. Compositio Math. 1996. **101**, №2. 179–215.

15. Кибкало В. А., Биллиарды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем, Совр. пробл. матем. мех. Матер. межд. конф. посвящ. 80-летию акад. РАН В.А. Садовничего, Т.2. М. 2019. 563–566.

16. Fomenko A.T., Kibkalo V.A., Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms // Contemp. Appr. Meth. in Fund. Math. Mech., Understanding Complex Systems, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham. 2021. 1–24.

17. Кобцев И. Ф., Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. №2. 27–33.

18. Пустовойтов С.Е., Топологический анализ биллиарда в эллиптическом кольце в потенциальном поле // Фунд. прикл. матем. 2019. **22**, №6. 201–225.

19. Пустовойтов С.Е., Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // Матем. сб. 2021. **212**, №2. 81–105.

20. Ведюшкина В.В., Интегрируемые биллиарды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы, Докт. дисс. МГУ, М. 2020.

21. Lazutkin V., KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions, Springer, Berlin. 1993.

22. Bolsinov A., Izosimov A., Smooth invariants of focus-focus singularities and obstructions to product decomposition, J. of Symplectic Geom., 17:6 (2019), 1613–1648.

23. S. Vũ Ngọc, On semi-global invariants for focus-focus singularities. Topology 42 (2003), 365–380.

24. A. Pelayo, S. Vũ Ngọc, Semitoric integrable systems on symplectic 4-manifolds. Invent. Math. 177 (2009), 571–597.

25. А. А. Ошемков, "Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем. Матем. сб., 201:8 (2010), 63–102

26. Козлов И.К., Ошемков А.А., Классификация особенностей типа седло-фокус // Чебышевский сборник. 21:2 (2020), 228–243.

REFERENCES

1. A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, "Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential", Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2019, no. 3, 15–25; Moscow University Mathematics Bulletin, 74:3 (2019), 98–107

2. A.V.Bolsinov, A.T.Fomenko. Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2004).

3. V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, "Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems", Mat. Sb., 209:12 (2018), 17–56; Sb. Math., 209:12 (2018), 1690–1727

4. Vedyushkina V. V., Kibkalo V. A., Fomenko A. T. Topological modeling of integrable systems by billiards: Realization of numerical invariants // Doklady Mathematics. — 2020. — Vol. 102, no. 1. — P. 269–271

5. V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo, "Realization of numerical invariant of the Siefert bundle of integrable systems by billiards", Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2020, no. 4, 22–28

6. V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, "Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems", Mat. Sb., 212:8 (2021), 89–150; Sb. Math., 212:8 (2021), 1122–1179

7. Glutsyuk A., On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature // Journal of the European Mathematical Society. 2021. **23**, №3. 995–1049.

8. Bialy M., Mironov A.E., Algebraic non-integrability of magnetic billiards // J. Phys. A. 2016. 49, №45. 455101.

9. Kaloshin V., Sorrentino A., On the local Birkhoff conjecture for convex billiards // Ann. of Math. 2018. **188**, №1. 315–380.

10. A. T. Fomenko, H. Zieschang, "A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 54:3 (1990), 546–575; Math. USSR-Izv., 36:3 (1991), 567–596

11. Kibkalo V.A., Fomenko A.T., Kharcheva I.S., Realization of integrable Hamiltonial systems by billiard books// Transactions of the Moscow Mathematical Society, 2021, **80**

12. I. S. Kharcheva, "Isoenergy manifolds of integrable billiard books", Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2020, no. 4, 12–22

13. Eliasson L.H., Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Commentarii Mathematici Helvetici. 1990. **65**. 4–35.

14. Zung N.T., Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities. Compositio Math. 1996. **101**, №2. 179–215.

15. Kibkalo V.A. "Billiards with potential model four-dimensional singularities of integrable systems", Books of Abstracts Int. Sc. Conf. "Contemporary Problems of Mathematics and Mechanics". Moscow, 2019, vol. 2, pp. 563-566. (In Russ.)

16. Fomenko A.T., Kibkalo V.A., Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms // Contemp. Appr. Meth. in Fund. Math. Mech., Understanding Complex Systems, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham. 2021. 1–24.

17. I. F. Kobtsev, "Geodesic flow of a 2D ellipsoid in an elastic stress field: topological classification of solutions", Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2018, no. 2, 27–33; Moscow University Mathematics Bulletin, 73:2 (2018), 64–70

18. S. E. Pustovoytov, "Topological analysis of a billiard in elliptic ring in a potential field", Fundam. Prikl. Mat., 22:6 (2019), 201–225

19. S. E. Pustovoitov, "Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field", Mat. Sb., 212:2 (2021), 81–105; Sb. Math., 212:2 (2021), 211–233

20. Vedyushkina V.V., Integrable billiards on CW-complexes and integrable Hamiltonian systems, Habilitation thesis (Dr. of Phys. Math.). Moscow. MSU. 2020

21. Lazutkin V., KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions, Springer, Berlin. 1993.

22. Bolsinov A., Izosimov A., Smooth invariants of focus-focus singularities and obstructions to product decomposition, J. of Symplectic Geom., 17:6 (2019), 1613–1648.

23. S. Vũ Ngọc, On semi-global invariants for focus-focus singularities. Topology 42 (2003), 365–380.

24. A. Pelayo, S. Vũ Ngọc, Semitoric integrable systems on symplectic 4-manifolds. Invent. Math. 177 (2009), 571–597.

25. A. A. Oshemkov, "Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems", Sb. Math., 201:8 (2010), 1153–1191

26. Kozlov I.K., Oshemkov A.A., Classification of saddle-focus singularities. Chebyshevskii Sbornik. 21:2 (2020), 228–243. (In Russ.)

Получено 12.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.