ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-25-43

Алгоритмы псевдослучайного поиска в задачах оптимального выбора параметров сложных эконометрических моделей¹

Т. Н. Аверина, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Аверина Татьяна Николаевна — кандидат экономических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: aver-kot@yandex.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

Рассмотренный в данной работе метод псевдослучайного поиска достаточно универсален и позволяет решать сложные эконометрические задачи дискретным методом наименьших квадратов. В работе рассмотрена задача нахождения параметров линейной комбинации функции Кобба – Дугласа – Тинбергена и третьей производственной функции, которая является её обобщением. Если выбор параметров функции Кобба – Дугласа – Тинбергена, или третьей производственной функции после логарифмирования и применения метода наименьших квадратов сводится к линейной задаче, которая решается в конечном виде, то линейная комбинация этих двух моделей требует решения оптимизационной задачи от 10 или 11 переменных с трансцендентной функцией, что делает задачу трудно решаемой.

В литературе хорошо известны, по крайней мере, 10 различных типов классических теоретико-числовых сеток. С точки зрения организации псевдослучайного поиска наиболее хорошо изучены сетки и ЛП-последовательности, предложенные И. М. Соболев. Ранее применялись параллелепипедальные сетки Коробова при решении задач текстурного анализа в геофизике. В этих работах использовались 6-мерные сетки.

В нашей работе приходится работать с 10-мерными и 11-мерными сетками с гораздо большим количеством точек, чтобы преодолеть известное "проклятие размерности". Частично удастся понизить размерность до 9-ой за счет использования свойств рассматриваемых моделей, которые подробно изучены в данной работе.

В результате исследования обнаружилось, что три параметра нельзя определить однозначно из первоначальной математической модели. Возникает дополнительная оптимизационная задача на метод наименьших квадратов, если постулировать близость технологических коэффициентов. Последнее предположение требует дополнительной экономической интерпретации и будет предметом дальнейших уже экономических исследований.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ №19-41-710004_p_a при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

Интересно было бы сравнить результаты расчётов для разных регионов страны и для страны в целом. Проблема связана с доступностью данных, но предполагаем в последующих работах рассмотреть данную постановку задачи.

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Т. Н. Аверина, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Алгоритмы псевдослучайного поиска в задачах оптимального выбора параметров сложных эконометрических моделей // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 25–43.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-25-43

Pseudorandom search algorithms in problems of optimal choice of parameters of complex econometric models²

T. N. Averina, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Averina Tatyana Nikolaevna — candidate of economic sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: aver-kot@yandex.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

The pseudorandom search method considered in this paper is quite universal and allows solving complex econometric problems using the discrete least squares method. The paper considers the problem of finding the parameters of a linear combination of the Cobb-Douglas-Tinbergen function and the third production function, which is its generalization. If the choice of parameters of the Cobb-Douglas-Tinbergen function, or the third production function after logarithmization and the application of the least squares method is reduced to a linear problem that is solved in the final form, then a linear combination of these two models requires solving an optimization problem of 10 or 11 variables with a transcendental function, which makes the problem difficult to solve.

At least 10 different types of classical number-theoretic grids are well known in the literature. From the point of view of the organization of the pseudorandom belt, the grids and LP sequences proposed by I. M. Sobol are the most well studied. Previously, Korobov parallelepipedal grids

²The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

were used in solving problems of textural analysis in geophysics. 6-dimensional grids were used in these works.

In our work, we have to work with 10-dimensional and 11-dimensional grids with a much larger number of points in order to overcome the well-known "curse of dimensionality". It is partially possible to reduce the dimension to the 9th by using the properties of the models under consideration, which are studied in detail in this paper. As a result of the study, it was found that three parameters cannot be determined unambiguously from the original mathematical model. An additional optimization problem arises for the least squares method if we postulate the proximity of technological coefficients.

The latter assumption requires additional economic interpretation and will be the subject of further economic research.

It would be interesting to compare the results of calculations for different regions of the country and for the country as a whole. The problem is related to the availability of data, but we expect to consider this formulation of the problem in subsequent works.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions..

Bibliography: 15 titles.

For citation:

T. N. Averina, N. N. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovolskii, 2021, "Pseudorandom search algorithms in problems of optimal choice of parameters of complex econometric models", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 25–43.

1. Введение

Выявление факторов, определяющих рост эффективности ресурсопотребления в условиях цифровой экономики, позволяет сформировать стратегию ее развития и обеспечивает прикладное значение задачи построения производственной функции. Величины средней и предельной эффективности использования ресурсов, эластичность результирующего показателя по факторным признакам, предельная норма замещения ресурсов могут использоваться в системе индикаторов сложного процесса развития постиндустриальной экономики.

В научной литературе кроме классических трехфакторных производственных функций с трудом, основным и интеллектуальным капиталом представлены и пятифакторные, дополнительно учитывающие роль социальных институтов и уровень развития инфраструктуры для оценки экономического роста, энергоэкономические модели стран мира [7] и другие. Для технической инфраструктуры используют плотность железных и автомобильных дорог и уровень обеспеченности электроэнергией занятого населения. Цифровизация экономики, мощные инновационные процессы приводят к необходимости совершенствования инструментального аппарата моделирования на макро- и мезоуровнях.

Российские специалисты в области экономико-математического моделирования накопили значительный опыт в построении многокритериальных оценок эффективности и ранжировании национальных экономик. Одним из результатов их работы стало выявление «ловушек» сравнительного анализа эффективности производства различных стран. Среди таких проблемных вопросов отмечается перенос циклической компоненты в оценку эффективности ациклических факторов производства, завышение оценок эффективности стран-экспортеров природных ресурсов, что делает актуальным введение поправок выпуска на ресурсную ренту [9].

Вопрос о необходимости учета структуры валового продукта при проведении анализа на региональном уровне, зависимости параметров модели от масштаба данных представляется в настоящее время дискуссионным и требует дальнейшего исследования. Так для трехфакторной модели производственного потенциала нашла подтверждение гипотеза о достаточности

общей модели для всей совокупности регионов, зависящей от анализируемого периода, но индифферентной по отношению к величине ВРП [8].

При построении пятифакторных производственных функций коррекция на ресурсную ренту является значимой и актуализирует вопрос отраслевой структуры валового продукта. Качество параметров производственных функций, построенных для регионов РФ после предварительной группировки, является более высоким. Переход на уровень федеральных округов уже предполагает отраслевую близость ВРП и дает лучшие результаты при оценке характеристик корреляционной связи производительности труда и показателей, характеризующих влияние основного капитала, человеческого и интеллектуального капитала, инфраструктурных, институциональных, социальных, инновационных факторов, факторов, связанных с инфляцией и внешнеэкономической деятельностью [1].

Переход на региональный уровень анализа дает преимущество в вопросе сопоставимости данных, но ограничен страновыми рамками в вопросе структуры открытых статистических данных. Научно-технологическая компонента развития экономики отражается открытой системой показателей, значение которых меняется под воздействием социально-экономических факторов.

По данным НИУ ВШЭ [10] за последние десятилетия выросла доля образовательных организаций высшего образования среди организаций, выполнявших научные исследования и разработки, в 2000 г. она составляла 9,5%, к 2018 увеличилась до 23,2%. В отношении численности вовлеченного в исследования персонала образовательных организаций наблюдается аналогичная тенденция, его доля выросла с 3,5%, до 8,6%. РФ занимала в 2018 г. 4 место в мире по критерию «Персонал, занятый научными исследованиями и разработками». В секторе высшего образования в 2018 г. осуществлялось 9,7% внутренних затрат на НИОКР, 67% составили государственные средства, предпринимательский сектор — 29,5%.

В состав факторов, определяющих производительность труда в Тульской области, в рамках представляемых исследований были включены факторы, значение которых выявлено на первом этапе работы: фондовооруженность труда работника, доля неустаревших (неизношенных) основных фондов, инвестиции в основной капитал на одного работника, иностранные инвестиции, приходящиеся на одного работника, доля занятых работников со средним профессиональным образованием, доля занятых работников с высшим образованием, численность работников территориальных органов федеральных органов исполнительной власти на 1000 работников, среднемесячная начисленная заработная плата, показатель неравенства доходов населения, число студентов на 10 000 человек населения [2]. Для наполнения научно-технической составляющей использованы данные, характеризующие инновационную деятельность регионов [10], [14].

При обработке статистических данных направленной на поиск параметров производственных функций, например, методом наименьших квадратов часто возникают сложные математические проблемы, связанные с необходимостью решения нелинейных систем уравнений, которые даже не являются алгебраическими. С целью получения простых процедур оценки параметров можно использовать псевдо-случайный поиск, основанный на использовании различных теоретико-числовых сеток. Этому посвящены работы [3], [5], [13].

Целью настоящей работы является изучение некоторых свойств классической модели Кобба–Дугласа–Тинбергена и её обобщения, которое мы называем третьей производственной функцией.

Оказывается, что в отличие от этих моделей их "линейная комбинация" не сводится к линейной задаче и поиск наилучших значений параметров модели методом наименьших квадратов требует решать нелинейную задачу оптимизации либо от 10, либо от 11 параметров. При решении этих задач с помощью псевдослучайного поиска с использованием теоретико-числовых сеток было обнаружено что: во-первых, данные модели весьма чувствительны к точности задания параметров, даже при точном решении для каждой из моделей по отдельности

при недостаточной точности задания параметров отклонение по первой модели оказывается лучше чем по второй, хотя теоретически очевидно, что должно быть наоборот; во-вторых, функция отклонения имеет много локальных минимумов как в десяти-мерном пространстве параметров, так и в одиннадцати-мерном.

Изучение свойств рассматриваемых моделей позволяет снизить размерность пространства параметров до 9 и тем самым ослабить известное проклятие размерности при организации псевдослучайного поиска.

2. Построение производственных функций

Имеются различные виды производственных функций.

1. Кобба-Дугласа-Тинбергена

$$Y = A \times e^{\lambda t} \times K^{\alpha} \times L^{\beta} \tag{1}$$

где Y – валовый региональный продукт

K – стоимость основного капитала

L – среднесписочная численность персонала

t – переменная времени (1,2,...)

A, λ, α, β, – параметры функции

2. CES-функция К. Эрроу, Г. Чинери, Б. Минхаса

$$Y = A_0 e^{\lambda t} [A_1 K^{-\rho} + (1 - A_1) L^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}} \tag{2}$$

где Y – валовый региональный продукт

K – стоимость основного капитала

L – среднесписочная численность персонала

t – переменная времени (1,2,...)

A₀ > 0 коэффициент шкалы

0 < A₁ < 1 весовой коэффициент производственного фактора

ρ > -1

A₀, A₁, ρ - параметры функции

3. Третья производственная функция

$$Y = A \times e^{\lambda t} \times K^{\alpha} \times L^{\beta} \times N^{\varphi} \tag{3}$$

где Y – валовый региональный продукт

K – стоимость основного капитала

L – среднесписочная численность персонала

t – переменная времени (1,2,...)

N – инновационная составляющая (объем технологических инвестиций)

A, λ, α, β, φ – параметры функции

Последняя третья функция является естественным обобщением функции Кобба-Дугласа-Тинбергена. Для нахождения параметров этой функции можно использовать логарифмирование и переход к новым параметрам: $Y1 = \ln Y$, $A1 = \ln A$

$$Y1 = A1 + \lambda t + \alpha \ln K + \beta \ln L + \varphi \ln N. \quad (4)$$

Задача свелась к линейной относительно $A1$, λ , α , β , φ , которые можно найти с помощью обыкновенного метода наименьших квадратов. Таким образом, если нам дана таблица значений $(Y_j, K_j, L_j, t_j, N_j)$ ($j = 1, \dots, M$), то мы строим функцию $Q_1(A1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi)$, заданную равенством

$$Q_1(A1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi) = \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j - \alpha \ln K_j - \beta \ln L_j - \varphi \ln N_j)^2 \rightarrow \min$$

Выписывая необходимые условия экстремальной точки, получаем линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j - \alpha \ln K_j - \beta \ln L_j - \varphi \ln N_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j - \alpha \ln K_j - \beta \ln L_j - \varphi \ln N_j) t_j = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j - \alpha \ln K_j - \beta \ln L_j - \varphi \ln N_j) \ln K_j = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j - \alpha \ln K_j - \beta \ln L_j - \varphi \ln N_j) \ln L_j = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j - \alpha \ln K_j - \beta \ln L_j - \varphi \ln N_j) \ln N_j = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, если рассмотреть матрицу системы B и вектор столбец свободных коэффициентов $\vec{b}$, заданные равенствами:

$$B = \begin{pmatrix} M & \sum_{j=1}^M t_j & \sum_{j=1}^M \ln K_j & \sum_{j=1}^M \ln L_j & \sum_{j=1}^M \ln N_j \\ \sum_{j=1}^M t_j & \sum_{j=1}^M t_j^2 & \sum_{j=1}^M t_j \ln K_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln L_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln N_j \\ \sum_{j=1}^M \ln K_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln K_j & \sum_{j=1}^M (\ln K_j)^2 & \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln L_j & \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln N_j \\ \sum_{j=1}^M \ln L_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln L_j & \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln L_j & \sum_{j=1}^M (\ln L_j)^2 & \sum_{j=1}^M \ln L_j \ln N_j \\ \sum_{j=1}^M \ln N_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln N_j & \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln N_j & \sum_{j=1}^M \ln L_j \ln N_j & \sum_{j=1}^M (\ln N_j)^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^M \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M t_j \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M \ln L_j \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M \ln N_j \ln Y_j \end{pmatrix},$$

то вектор столбец решений задается равенством $(A1 \lambda \alpha \beta \varphi)^T = B^{-1} \vec{b}$.

Отметим, что нахождение параметров функции Кобба-Дугласа-Тинбергена приводит к

более простой системе

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j + \alpha \ln K_j + \beta \ln L_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j + \alpha \ln K_j + \beta \ln L_j) t_j = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j + \alpha \ln K_j + \beta \ln L_j) \ln K_j = 0 \\ \sum_{j=1}^M (\ln Y_j - A1 - \lambda t_j + \alpha \ln K_j + \beta \ln L_j) \ln L_j = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

для которой имеем:

$$C = \begin{pmatrix} M & \sum_{j=1}^M t_j & \sum_{j=1}^M \ln K_j & \sum_{j=1}^M \ln L_j \\ \sum_{j=1}^M t_j & \sum_{j=1}^M t_j^2 & \sum_{j=1}^M t_j \ln K_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln L_j \\ \sum_{j=1}^M \ln K_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln K_j & \sum_{j=1}^M (\ln K_j)^2 & \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln L_j \\ \sum_{j=1}^M \ln L_j & \sum_{j=1}^M t_j \ln L_j & \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln L_j & \sum_{j=1}^M (\ln L_j)^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^M \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M t_j \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M \ln K_j \ln Y_j \\ \sum_{j=1}^M \ln L_j \ln Y_j \end{pmatrix}, \quad (A1 \lambda \alpha \beta)^T = C^{-1} \vec{c}.$$

Ситуация резко меняется, если мы возьмем более сложную модель в виде "линейной комбинации" функции Кобба-Дугласа-Тинбергена и третьей производственной функцией:

$$Y = A \times e^{\lambda t} \times (\delta \cdot K)^{\alpha} \times (\delta \cdot L)^{\beta} + B \times e^{\gamma t} \times ((1 - \delta)K)^{\theta} \times ((1 - \delta)L)^{\sigma} \times N^{\varphi}. \quad (7)$$

Возможен и другой вариант линейной комбинации

$$Y = A \times e^{\lambda t} \times (\delta \cdot K)^{\alpha} \times (\delta 1 \cdot L)^{\beta} + B \times e^{\gamma t} \times ((1 - \delta)K)^{\theta} \times ((1 - \delta 1)L)^{\sigma} \times N^{\varphi}. \quad (8)$$

Если в первом варианте δ — это доля неинновационной экономике, то во втором случае δ — это доля стоимости основного капитала, приходящаяся на неинновационную экономику, а $\delta 1$ — это соответствующая доля среднесписочной численности персонала. Понятно, что, вообще говоря, $\delta \neq \delta 1$. Заметим, что эти величины не относятся к числу тех, которые можно найти в статистических справочниках. И наша задача определить их значения в рамках предложенной модели производственной функции.

Для нахождения параметров в этом случае уже нельзя воспользоваться логарифмированием для получения линейной задачи. В первом случае можно поступить следующим образом: рассмотрим функцию $Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta)$, заданную равенством

$$Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta) = \sum_{j=1}^M \left(Y_j - (Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^{\alpha} (\delta L_j)^{\beta}) - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta)K_j)^{\theta} ((1 - \delta)L_j)^{\sigma} N_j^{\varphi} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (9)$$

Во втором случае целевая функция метода наименьших квадратов усложняется, она будет зависеть от 11 параметров:

$$Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta 1, \gamma, \sigma, \theta) = \sum_{j=1}^M \left(Y_j - (Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^{\alpha} (\delta 1 L_j)^{\beta}) - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta)K_j)^{\theta} ((1 - \delta 1)L_j)^{\sigma} N_j^{\varphi} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (10)$$

3. Некоторые свойства модели Кобба-Дугласа-Тинбергена и третьей производственной функции

Пусть нам задана матрица исходных данных

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 & K_1 & L_1 \\ 1 & Y_2 & K_2 & L_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M-1 & Y_M & K_M & L_M \end{pmatrix}, \quad AM(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & Y_1\delta & K_1\delta & L_1\delta \\ 1 & Y_2\delta & K_2\delta & L_2\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M-1 & Y_M\delta & K_M\delta & L_M\delta \end{pmatrix},$$

здесь рассмотрен простейший случай, когда $t_j = j - 1$ ($j = 1, \dots, M$).

Положим

$$Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM) = \sum_{j=1}^M \left(Y_j - Ae^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right)^2.$$

Обозначим через $P(AM) = (A^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ набор параметров, на котором достигается минимум целевой функции:

$$\min Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM) = Q1(A^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)} | AM).$$

ЛЕММА 1. Для любого δ с $0 < \delta \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \min Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta)) &= \delta^2 \min Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM), \\ P(AM(\delta)) &= (A^{(0)}\delta^{1-\alpha^{(0)}-\beta^{(0)}}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, сделаем замену переменных: $A = A1\delta^{1-\alpha-\beta}$, тогда получим

$$\begin{aligned} Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta)) &= Q1(A1\delta^{1-\alpha-\beta}, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta)) = \\ &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j\delta - A1\delta^{1-\alpha-\beta} e^{\lambda t_j} (K_j\delta)^\alpha (L_j\delta)^\beta \right)^2 = \delta^2 \sum_{j=1}^M \left(Y_j - A1e^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right)^2 = \\ &= \delta^2 Q1(A1, \lambda, \alpha, \beta | AM). \end{aligned}$$

Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

Положим

$$AM(\delta, \delta 1) = \begin{pmatrix} 0 & Y_1\delta & K_1\delta & L_1\delta 1 \\ 1 & Y_2\delta & K_2\delta & L_2\delta 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M-1 & Y_M\delta & K_M\delta & L_M\delta 1 \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Для любых $\delta, \delta 1$ с $0 < \delta, \delta 1 \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \min Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta, \delta 1)) &= \delta^2 \min Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM), \\ P(AM(\delta, \delta 1)) &= (A^{(0)}\delta^{1-\alpha^{(0)}}\delta 1^{-\beta^{(0)}}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, сделаем замену переменных: $A = A1\delta^{1-\alpha}\delta 1^{-\beta}$, тогда получим

$$Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta, \delta 1)) = Q1(A1\delta^{1-\alpha-\beta}, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta, \delta 1)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j \delta - A1 \delta^{1-\alpha} \delta 1^{-\beta} e^{\lambda t_j} (K_j \delta)^\alpha (L_j \delta 1)^\beta \right)^2 = \delta^2 \sum_{j=1}^M \left(Y_j - A1 e^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right)^2 = \\
 &= \delta^2 Q1(A1, \lambda, \alpha, \beta | AM).
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

Пусть теперь нам задана матрица исходных данных

$$\begin{aligned}
 AM1 &= \begin{pmatrix} 0 & Y_1 & K_1 & L_1 & N_1 \\ 1 & Y_2 & K_2 & L_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M-1 & Y_M & K_M & L_M & N_M \end{pmatrix}, \\
 AM1(\delta) &= \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \delta & K_1 \delta & L_1 \delta & N_1 \\ 1 & Y_2 \delta & K_2 \delta & L_2 \delta & N_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M-1 & Y_M \delta & K_M \delta & L_M \delta & N_M \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Положим

$$Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1) = \sum_{j=1}^M \left(Y_j - B e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2.$$

Обозначим через $P1(AM1) = (B^{(0)}, \gamma^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}, \varphi^{(0)})$ набор параметров, на котором достигается минимум целевой функции:

$$\min Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM) = Q2(B^{(0)}, \gamma^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}, \varphi^{(0)} | AM).$$

ЛЕММА 3. Для любого δ с $0 < \delta \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 \min Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1(\delta)) &= \delta^2 \min Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1), \\
 P1(AM1(\delta)) &= (B^{(0)} \delta^{1-\theta^{(0)}-\sigma^{(0)}}, \gamma^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}, \varphi^{(0)}).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, сделаем замену переменных: $B = B1 \delta^{1-\theta-\sigma}$, тогда получим

$$\begin{aligned}
 &Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1(\delta)) = Q2(B1 \delta^{1-\theta-\sigma}, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1(\delta)) = \\
 &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j \delta - B1 \delta^{1-\theta-\sigma} e^{\gamma t_j} (K_j \delta)^\theta (L_j \delta)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2 = \delta^2 \sum_{j=1}^M \left(Y_j - B1 e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2 = \\
 &= \delta^2 Q2(B1, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1).
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

Положим

$$AM1(\delta, \delta 1) = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \delta & K_1 \delta & L_1 \delta 1 & N_1 \\ 1 & Y_2 \delta & K_2 \delta & L_2 \delta 1 & N_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M-1 & Y_M \delta & K_M \delta & L_M \delta 1 & N_M \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 4. Для любых $\delta, \delta 1$ с $0 < \delta, \delta 1 \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 \min Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1(\delta, \delta 1)) &= \delta^2 \min Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1), \\
 P1(AM1(\delta, \delta 1)) &= (B^{(0)} \delta^{1-\theta^{(0)}} \delta 1^{-\sigma^{(0)}}, \gamma^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}, \varphi^{(0)}).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, сделаем замену переменных: $B = B1\delta^{1-\theta}\delta1^{-\sigma}$, тогда получим

$$\begin{aligned} Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi|AM1(\delta, \delta1)) &= Q2(B1\delta^{1-\theta-\sigma}, \gamma, \theta, \sigma, \varphi|AM1(\delta, \delta1)) = \\ &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j\delta - B1\delta^{1-\theta}\delta1^{-\sigma} e^{\gamma t_j} (K_j\delta)^\theta (L_j\delta1)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2 = \delta^2 \sum_{j=1}^M \left(Y_j - B1e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2 = \\ &= \delta^2 Q2(B1, \gamma, \theta, \sigma, \varphi|AM1). \end{aligned}$$

Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

Перейдем к поиску выражения целевых функций

$$Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta) \quad \text{и} \quad Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta1, \gamma, \sigma, \theta)$$

через $Q1(A1, \lambda, \alpha, \beta|AM)$ и $Q2(B1, \gamma, \theta, \sigma, \varphi|AM1)$.

Для этих целей мы введём функцию ковариации двух моделей $V(A1, B1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta)$, заданную равенством

$$V(A1, B1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta|AM1) = \sum_{j=1}^M \left(Y_j - A1e^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right) \left(Y_j - B1e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right).$$

Примем соглашение, что матрицы AM и $AM1$ отличаются только наличием дополнительного последнего столбца в матрице $AM1$.

ЛЕММА 5. Для любого δ с $0 < \delta < 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta) &= \delta^2 Q1(A1, \lambda, \alpha, \beta|AM) + (1 - \delta)^2 Q2(B1, \gamma, \theta, \sigma, \varphi|AM1) + \\ &+ 2\delta(1 - \delta)V(A1, B1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta|AM1), \\ A &= A1\delta^{1-\alpha-\beta}, \quad B = B1(1 - \delta)^{1-\theta-\sigma}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению

$$\begin{aligned} Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta) &= \\ &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j - (Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^\alpha (\delta L_j)^\beta) - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta)K_j)^\theta ((1 - \delta)L_j)^\sigma N_j^\varphi \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^M \left(\delta Y_j - Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^\alpha (\delta L_j)^\beta \right)^2 + \sum_{j=1}^M \left((1 - \delta)Y_j - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta)K_j)^\theta ((1 - \delta)L_j)^\sigma N_j^\varphi \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^M \left(\delta Y_j - Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^\alpha (\delta L_j)^\beta \right) \left((1 - \delta)Y_j - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta)K_j)^\theta ((1 - \delta)L_j)^\sigma N_j^\varphi \right) = \\ &= Q1(A, \lambda, \alpha, \beta|AM(\delta)) + Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi|AM1(1 - \delta)) + \\ &+ 2\delta(1 - \delta) \sum_{j=1}^M \left(Y_j - A1e^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right) \left(Y_j - B1e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right). \end{aligned}$$

Применяя леммы 1 и 3, получим утверждение леммы. $\square$

Обозначим через $Q(\delta)$, $Q1$, $Q2$ и V при фиксированных $A1, B1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta$ величины, заданные формулами

$$Q(\delta) = \begin{cases} Q2(B1, \gamma, \sigma, \theta, \varphi|AM1), & \text{при } \delta = 0 \\ Q1(A1, \lambda, \alpha, \beta|AM), & \text{при } \delta = 1 \\ Q(A1\delta^{1-\alpha-\beta}, B1(1 - \delta)^{1-\gamma-\sigma}, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta), & \text{при } 0 < \delta < 1 \end{cases},$$

$$Q1 = Q1(A1, \lambda, \alpha, \beta | AM), \quad Q2 = Q2(B1, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1), \quad V = V(A1, B1, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta | AM1).$$

Через $\delta^{(0)}$ обозначим то значение δ , $0 \leq \delta \leq 1$, при котором достигается минимум $Q(\delta)$:

$$Q(\delta^{(0)}) = \min_{0 \leq \delta \leq 1} Q(\delta).$$

Прежде всего, заметим, что всегда $Q1 + Q2 - 2V \geq 0$ и $Q1 + Q2 - 2V = 0$ только в случае, когда для всех $j = 1, \dots, M$ выполняется равенство

$$A1e^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta = B1e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} Q1 + Q2 - 2V &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j - Ae^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right)^2 + \sum_{j=1}^M \left(Y_j - Be^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2 - \\ &- 2 \sum_{j=1}^M \left(Y_j - Ae^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right) \left(Y_j - Be^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right) = \\ &= \sum_{j=1}^M \left(Ae^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta - Be^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

только в случае, когда все слагаемые в сумме обращаются в ноль. Таким образом, если $V = \frac{Q1+Q2}{2}$, то отсюда следует, что $Q1 = Q2$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы равенства*

$$\delta^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{при } Q2 \leq Q1, Q2 \leq V, \\ 1, & \text{при } Q1 \leq Q2, Q1 \leq V, \\ \frac{Q2-V}{Q1+Q2-2V}, & \text{при } V < \min(Q1, Q2) \end{cases},$$

$$Q(\delta^{(0)}) = \begin{cases} Q2, & \text{при } Q2 \leq Q1, Q2 \leq V, \\ Q1, & \text{при } Q1 \leq Q2, Q1 \leq V, \\ \frac{Q1Q2-V^2}{Q1+Q2-2V}, & \text{при } V < \min(Q1, Q2) \end{cases}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, первые два случая и для $\delta^{(0)}$, и для $Q(\delta^{(0)})$ очевидны. Пусть теперь $V < \min(Q1, Q2)$, тогда точка минимума $\delta^{(0)} = \frac{Q2-V}{Q1+Q2-2V} \in (0, 1)$ и $Q(\delta^{(0)}) = \frac{Q1Q2-V^2}{Q1+Q2-2V}$. $\square$

ЛЕММА 6. *Для любых $\delta, \delta1$ с $0 < \delta, \delta1 < 1$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta1, \gamma, \sigma, \theta) &= \delta^2 Q1 + (1 - \delta)^2 Q2 + 2\delta(1 - \delta)V, \\ A &= A1\delta^{1-\alpha}\delta1^{-\beta}, \quad B = B1(1 - \delta)^{1-\theta}(1 - \delta1)^{-\sigma}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению

$$\begin{aligned} Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta1, \gamma, \sigma, \theta) &= \\ &= \sum_{j=1}^M \left(Y_j - (Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^\alpha (\delta1 L_j)^\beta) - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta) K_j)^\theta ((1 - \delta1) L_j)^\sigma N_j^\varphi \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^M \left(\delta Y_j - Ae^{\lambda t_j} (\delta K_j)^\alpha (\delta1 L_j)^\beta \right)^2 + \sum_{j=1}^M \left((1 - \delta) Y_j - Be^{\gamma t_j} ((1 - \delta) K_j)^\theta ((1 - \delta1) L_j)^\sigma N_j^\varphi \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{j=1}^M \left(\delta Y_j - A e^{\lambda t_j} (\delta K_j)^\alpha (\delta L_j)^\beta \right) \left((1-\delta) Y_j - B e^{\gamma t_j} ((1-\delta) K_j)^\theta ((1-\delta) L_j)^\sigma N_j^\varphi \right) = \\
& = Q1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM(\delta, \delta 1)) + Q2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM1(1-\delta, 1-\delta 1)) + \\
& + 2\delta(1-\delta) \sum_{j=1}^M \left(Y_j - A1 e^{\lambda t_j} (K_j)^\alpha (L_j)^\beta \right) \left(Y_j - B1 e^{\gamma t_j} (K_j)^\theta (L_j)^\sigma (N_j)^\varphi \right).
\end{aligned}$$

Применяя леммы 2 и 4, получим утверждение леммы. $\square$

Из доказанной леммы следует парадоксальный результат, что минимальные значения для A и B не определяются однозначно по значениям $A1$ и $B1$, так как зависят от параметра $\delta 1$, который не определяется однозначно. Для выхода из этой парадоксальной ситуации можно предположить следующий подход, который базируется на экономическом смысле коэффициентов A и B .

Для моделей Кобба-Дугласа-Тинбергена и третьей производственной функции рассматриваемых по отдельности эти коэффициенты отражают технологическую зависимость. Поэтому, можно предположить, что при объединении двух моделей выбор параметра $\delta 1$ необходимо сделать так, чтобы найденные значения технологических коэффициентов минимально отличались в совокупности от $A^{(0)}$ и $B^{(0)}$, найденные для каждой из моделей по отдельности. Таким образом, получаем оптимизационную задачу для метода наименьших квадратов.

$$\left(A^{(0)} - A1\delta^{1-\alpha}\delta 1^{-\beta} \right)^2 + \left(B^{(0)} - B1(1-\delta)^{1-\theta}(1-\delta 1)^{-\sigma} \right)^2 \rightarrow \min.$$

Выписывая условия экстремальной точки, получим

$$-2\beta \left(A^{(0)} - A1\delta^{1-\alpha}\delta 1^{-\beta} \right) \delta 1^{-\beta-1} + 2\sigma \left(B^{(0)} - B1(1-\delta)^{1-\theta}(1-\delta 1)^{-\sigma} \right) (1-\delta 1)^{-\sigma-1} = 0.$$

С помощью логарифмирования получаем следующую оптимизационную задачу для метода наименьших квадратов.

$$(\ln A^{(0)} - \ln A1 - (1-\alpha) \ln \delta + \beta \ln \delta 1)^2 + (\ln B^{(0)} - \ln B1 - (1-\theta) \ln(1-\delta) + \sigma \ln(1-\delta 1))^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Обозначим через $Q3(C, \beta, D, \sigma, \delta 1)$ выражение

$$Q3(\delta 1) = Q3(C, \beta, D, \sigma, \delta 1) = (C + \beta \ln \delta 1)^2 + (D + \sigma \ln(1-\delta 1))^2,$$

где $C = \ln A^{(0)} - \ln A1 - (1-\alpha) \ln \delta$, $D = \ln B^{(0)} - \ln B1 - (1-\theta) \ln(1-\delta)$. Выписывая условия экстремальной точки, получим

$$\frac{2(C + \beta \ln \delta 1)}{\delta 1} - \frac{2(D + \sigma \ln(1-\delta 1))}{1-\delta 1} = 0.$$

Так как по смыслу задачи имеем $0 < \delta 1 < 1$, то получаем равносильное трансцендентное уравнение

$$\beta \ln \delta 1 - \sigma \ln(1-\delta 1) = D - C.$$

В любом случае, мы видим, что решение оптимизационной задачи по $\delta 1$ требует приближенных методов решения трансцендентных уравнений от одной переменной, что мы в своих расчётах и сделали.

4. Псевдослучайный поиск

В обоих случаях (решение трансцендентной системы уравнений или поиск минимума функции многих переменных) простой эффективный алгоритм поиска приближенного решения может опираться на псевдослучайный поиск.

Применительно к методу наименьших квадратов для производственной функции вида (7) получим следующую задачу.

Дана функция $Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta)$, заданная равенством (9) в прямоугольной области

$$(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta) \in \prod_{j=1}^{10} [M_j; N_j], \quad (12)$$

требуется найти точку $(A^{(0)}, B^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \varphi^{(0)}, \delta^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}, \theta^{(0)}) \in \prod_{j=1}^{10} [M_j; N_j]$ такую, что

$$\begin{aligned} & Q(A^{(0)}, B^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \varphi^{(0)}, \delta^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}, \theta^{(0)}) = \\ & = \min_{(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta) \in \prod_{j=1}^{10} [M_j; N_j]} Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta). \end{aligned}$$

Применительно к методу наименьших квадратов для производственной функции вида (8) получим следующую задачу.

Дана функция $Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta_1, \gamma, \sigma, \theta)$, заданная равенством (10) в прямоугольной области

$$(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta_1, \gamma, \sigma, \theta) \in \prod_{j=1}^{11} [M_j; N_j], \quad (13)$$

требуется найти точку $(A^{(0)}, B^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \varphi^{(0)}, \delta^{(0)}, \delta_1^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}, \theta^{(0)}) \in \prod_{j=1}^{11} [M_j; N_j]$ такую, что

$$\begin{aligned} & Q(A^{(0)}, B^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \varphi^{(0)}, \delta^{(0)}, \delta_1^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}, \theta^{(0)}) = \\ & = \min_{(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \delta_1, \gamma, \sigma, \theta) \in \prod_{j=1}^{11} [M_j; N_j]} Q(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \delta, \gamma, \sigma, \theta). \end{aligned}$$

С учетом результатов теорем 1 и 2 можно поступить более экономно, перейдя к пространству параметров размерности 9. А именно, рассмотрим функцию $Q^*(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta)$, заданную равенством:

$$Q^*(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta) = \begin{cases} Q_2, & \text{при } Q_2 \leq Q_1, Q_2 \leq V, \\ Q_1, & \text{при } Q_1 \leq Q_2, Q_1 \leq V, \\ \frac{Q_1 Q_2 - V^2}{Q_1 + Q_2 - 2V}, & \text{при } V < \min(Q_1, Q_2) \end{cases},$$

где

$$Q_1 = Q_1(A, \lambda, \alpha, \beta | AM), \quad Q_2 = Q_2(B, \gamma, \theta, \sigma, \varphi | AM_1), \quad V = V(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta | AM_1).$$

Требуется в прямоугольной области

$$(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta) \in \prod_{j=1}^9 [M_j; N_j], \quad (14)$$

найти точку $(A^{(0)}, B^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \varphi^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}, \theta^{(0)}) \in \prod_{j=1}^9 [M_j; N_j]$ такую, что

$$\begin{aligned} & Q^*(A^{(0)}, B^{(0)}, \lambda^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \varphi^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}, \theta^{(0)}) = \\ & = \min_{(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta) \in \prod_{j=1}^9 [M_j; N_j]} Q^*(A, B, \lambda, \alpha, \beta, \varphi, \gamma, \sigma, \theta). \end{aligned}$$

Предположим, что априори есть оценка области изменения параметров прямоугольного вида: $\prod_{j=1}^s [M_j; N_j]$, тогда, используя параллелепipedальную сетку $M(\vec{a}; N) = \{X_k | k = 0, \dots, N-1\}$, где

$$X_k = \left(\frac{k}{N}; \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}; \dots; \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \quad (k = 0, \dots, N-1),$$

получим сетку в прямоугольной области

$$\begin{aligned} & X_k^* = \\ & = \left(M_1 + (N_1 - M_1) \frac{k}{N}; M_2 + (N_2 - M_2) \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}; \dots; M_s + (N_s - M_s) \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \\ & \quad (k = 0, \dots, N-1), \end{aligned}$$

по которой можно вести псевдослучайный поиск приближенного решения. Таким образом, в качестве приближенного решения выбираем точку $X_{k_0}^*$, для которой выполнено соотношение

$$Q(X_{k_0}^*) = \min_{0 \leq k \leq N-1} F(X_k^*).$$

Наряду с сеткой $M(\vec{a}; N)$ можно использовать сетку $M(\vec{a}, \vec{\varepsilon}; N)$, которая задается равенствами

$$\begin{aligned} X_k(\vec{\varepsilon}) = \left(\varepsilon_1 + (1 - 2\varepsilon_1) \frac{k}{N}; \varepsilon_2 + (1 - 2\varepsilon_2) \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}; \dots; \varepsilon_s + (1 - 2\varepsilon_s) \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \\ (k = 0, \dots, N-1), \end{aligned}$$

где $\vec{\varepsilon} \in \{0, 1\}^s$. Таких сеток ровно 2^s и их использование дает почти в такое же количество раз больше информации, так как они, вообще говоря, не имеют общих точек.

Действительно, если $X_{k_1}(\vec{\varepsilon}_1) = X_{k_2}(\vec{\varepsilon}_2)$, то будут выполняться s равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{1,1} + (1 - 2\varepsilon_{1,1}) \frac{k_1}{N} = \varepsilon_{1,1} + (1 - 2\varepsilon_{1,2}) \frac{k_2}{N} \\ \varepsilon_{2,1} + (1 - 2\varepsilon_{2,1}) \left\{ \frac{a_1 k_1}{N} \right\} = \varepsilon_{2,2} + (1 - 2\varepsilon_{2,2}) \left\{ \frac{a_1 k_2}{N} \right\} \\ \dots \dots \\ \varepsilon_{s,1} + (1 - 2\varepsilon_{s,1}) \left\{ \frac{a_{s-1} k_1}{N} \right\} = \varepsilon_{s,2} + (1 - 2\varepsilon_{s,2}) \left\{ \frac{a_{s-1} k_2}{N} \right\} \end{array} \right.$$

Из этих равенств следует, что либо $k_1 = k_2$, но тогда $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}_2$ и сетки совпадают, либо $k_1 = N - k_2$, но тогда $\vec{\varepsilon}_1 = (1, \dots, 1) - \vec{\varepsilon}_2$ и сетки отличаются двумя точками $X_0(\vec{\varepsilon}_1) = \vec{\varepsilon}_1$ и $X_0(\vec{\varepsilon}_2) = \vec{\varepsilon}_2$; $X_k(\vec{\varepsilon}_1) = X_{N-k}(\vec{\varepsilon}_2)$ ($k = 1, \dots, N-1$).

Отсюда следует, что $\bigcup_{\vec{\varepsilon} \in \{0,1\}^s} M(\vec{a}; N)$ содержит ровно $2^s + (N-1)2^{s-1}$ различных точек.

5. Об областях поиска

Метод псевдослучайного поиска инвариантен к исходной области для поиска оптимальных значений параметров экономической модели. Под этим мы подразумеваем, что для любой области мы получим какой-то свой набор оптимальных параметров экономической модели в смысле выбранного критерия целевой функции.

В нашем конкретном случае, когда мы рассматриваем модель в виде "линейной комбинации" функции Кобба-Дугласа-Тинбергена и третьей производственной функцией, можно поступить следующим образом:

1. Решаем систему ЛАУ (6) и находим первую точку, в которой $\delta = 1, B = \varphi = \gamma = \sigma = \theta = 0$.
2. Решаем систему ЛАУ (5) и находим вторую точку, в которой $\delta = 0, A = \lambda = \alpha = \beta = 0$.
3. Задаём прямоугольную область вида (12), содержащую первую и вторую точки.

Рассмотрим матрицу с данными по Тульской области

(	2003	72258	249617	770.7	594.9
	2004	76737.996	270344.5	773.7	1117.4
	2005	81727.0819482498	280911.5	775.6	1129.3
	2006	89186.5594038947	311420.5	779.6	3882.1
	2007	99983.1715107492	356478	784.7	922.3
	2008	107377.214953625	404431.5	785.1	4976.7
	2009	99983.1715107492	461578.5	762.9	6408.9
	2010	103582.565685136	527189.5	770	5308.3
	2011	109072.441666448	599160.5	772.9	4447.5
	2012	111799.25270811	667810	769.4	8510.6
	2013	116718.419827266	732349.5	761.3	9520.9
	2014	123488.088177248	811729	750	10000.1
	2015	130403.421115174	902523.5	742.6	11509.7
	2016	135749.961380896	989874.5	731.5	17399.3
	2017	141044.209874751	1074845.5	719.9	16119.8
	2018	145698.668800618	1180202	715.1	18717.7
	2019	151963.711559044	1910874	705.4	56822

из которой после преобразования первого столбца получаем матрицу $AM1$:

Матрица AM получается из матрицы $AM1$ отбрасыванием последнего столбца.

Расчёты с матрицей AM для модели Кобба-Дугласа-Тинбергена дали для зависимости (1) следующие значения параметров:

$$A = 26.53118829886, \quad \lambda = 0.058859500191062, \quad \alpha = -0.067250264262839, \\ \beta = 1.31896642770153$$

и значение функции $Q = 233570784.361$.

Расчёты с матрицей $AM1$ для третьей производственной функции дали для зависимости (3) следующие значения параметров:

$$A = 38.60123266579, \quad \lambda = 0.058452691082188, \quad \alpha = -0.080740456421154, \\ \beta = 1.27994916527996, \quad \varphi = 0.0076493855438$$

и значение функции $Q1 = 230573444.294$.

$$AM1 = \begin{pmatrix} 0 & 72258 & 249617 & 770.7 & 594.9 \\ 1 & 76737.996 & 270344.5 & 773.7 & 1117.4 \\ 2 & 81727.0819482498 & 280911.5 & 775.6 & 1129.3 \\ 3 & 89186.5594038947 & 311420.5 & 779.6 & 3882.1 \\ 4 & 99983.1715107492 & 356478 & 784.7 & 922.3 \\ 5 & 107377.214953625 & 404431.5 & 785.1 & 4976.7 \\ 6 & 99983.1715107492 & 461578.5 & 762.9 & 6408.9 \\ 7 & 103582.565685136 & 527189.5 & 770 & 5308.3 \\ 8 & 109072.441666448 & 599160.5 & 772.9 & 4447.5 \\ 9 & 111799.25270811 & 667810 & 769.4 & 8510.6 \\ 10 & 116718.419827266 & 732349.5 & 761.3 & 9520.9 \\ 11 & 123488.088177248 & 811729 & 750 & 10000.1 \\ 12 & 130403.421115174 & 902523.5 & 742.6 & 11509.7 \\ 13 & 135749.961380896 & 989874.5 & 731.5 & 17399.3 \\ 14 & 141044.209874751 & 1074845.5 & 719.9 & 16119.8 \\ 15 & 145698.668800618 & 1180202 & 715.1 & 18717.7 \\ 16 & 151963.711559044 & 1910874 & 705.4 & 56822 \end{pmatrix}.$$

На первый взгляд кажется, что мы привели избыточно много знаков у найденных значений параметров моделей, но оказалось, что когда мы использовали только по три знака после запятой, то значение Q для модели Кобба-Дугласа-Тинбергена оказалось меньше чем значение $Q1$ для третьей производственной функции, что противоречит смыслу решаемой задачи, так как третья производственная функция при $\varphi = 0$ дает модель Кобба-Дугласа-Тинбергена. Поэтому мы не стали исследовать вопрос о достаточной точности значений параметров, чтобы различать преимущество третьей производственной функции в сравнении с моделью Кобба-Дугласа-Тинбергена, и приводим те значения, которые были найдены при вычислениях в системе PTC Mathcad Prime 3.1 с максимальной точностью, которую мы использовали.

Публикация результатов расчётов по линейной комбинации функции Кобба-Дугласа-Тинбергена и третьей производственной функции в данной математической статье преждевременно, так как там необходима экономическая интерпретация, и поэтому мы предполагаем этому посвятить отдельную статью, но уже в специализированном экономическом издании.

6. Заключение

Рассмотренный в данной работе метод псевдослучайного поиска достаточно универсален и позволяет решать сложные эконометрические задачи дискретным методом наименьших квадратов.

В литературе хорошо известны, по крайней мере, 10 различных типов классических теоретико-числовых сеток (см. [13]). С точки зрения организации псевдослучайного поиска наиболее хорошо изучены Π_T сетки и ЛП-последовательности, предложенные И. М. Соболев [15]. В работах [11, 12] применялись параллелепипедальные сетки Коробова при решении задач текстурного анализа в геофизике. В этих работах использовались 6-мерные сетки. В нашей работе приходится работать с 10-мерными и 11-мерными сетками с гораздо большим количеством точек, чтобы преодолеть известное "проклятие размерности". Частично удастся понизить размерность до 9-ой за счет использования свойств рассматриваемых моделей.

Интересно было бы сравнить результаты расчётов для разных регионов страны и для страны в целом. Проблема связана с доступностью данных, но предполагаем в последующих работах рассмотреть данную постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басовский Л. Е., Басовская Е. Н. Исследование экономики регионов России: эконометрический подход // Научные исследования и разработки. Экономика. 2014. — № 2. — С. 13–17.
2. Басовский Л.Е., Басовская Е.Н., Аверина Т.Н. Основные факторы производительности труда в регионах России // Научные исследования и разработки. Экономика. Научно-практический журнал. 2019. Т. 7. — № 5. — С. 9–17.
3. Л. П. Добровольская, С. И. Шелобаев. Теоретико-числовой метод в эконометрике // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.— Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 280–283.
4. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95–121.
5. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — 223 с.
6. Добровольский Н. М., Клепикова Н. Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // ИОФАН СССР. 63. Москва, 1990. (Препринт.)
7. Информационно-аналитический, энергетический сайт — Режим доступа: <http://www.eeseaec.org/energoekonomiceskie-modeli-stran-i-organizacij-mira>
8. Макаров В.Л., Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю, Бахтизин А.Р, Нанавян А.М. Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения // Экономика регионов, 2014. — № 4. — С. 9–30.
9. Мамонов М.Е., Пестова А.А. Анализ технической эффективности национальных экономик: роль институтов, инфраструктуры и ресурсной ренты // Журнал Новой экономической ассоциации, 2015, — № 3. — С. 44–78.
10. Наука. Технологии. Инновации: 2020: краткий статистический сборник / Л.М. Гохберг, К.А. Дитковский, Е.И. Евневич и др.; Нац. Исслед. Ун-т «Высшая школа экономики». — М.: НИУ ВШЭ, 2020. — 88с. — Режим доступа: <https://issek.hse.ru/mirror/pubs/share/340117242.pdf>
11. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. О реконструкции палеотектонических напряжений по данным о пьезоэлектрических текстурах горных пород. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. № 9. С. 66–74.
12. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Textures of Rocks // Izvestiya Earth Physics Vol 24. 1988. № 9. С. 728–734.
13. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 4 (68). С. 118–176.

14. Рейтинг инновационного развития субъектов Российской Федерации / Нац. Исслед. Ун-т «Высшая школа экономики». — М.: НИУ ВШЭ, 2019. — Режим доступа: <https://issek.hse.ru/rirr2019>
15. И. М. Соболев, “Об оценке точности простейшего многомерного поиска”, Докл. АН СССР, 266:3 (1982), 569–572.

REFERENCES

1. Basovsky L. E., Basovskaya E. N., 2014, Study of the economy of the regions of Russia: econometric approach // Scientific research and development. Economy. — № 2. — pp. 13–17.
2. Basovsky L.E., Basovskaya E.N., Averina T.N., 2019, The main factors of labor productivity in the regions of Russia // Scientific research and development. Economy. Scientific and practical journal. vol. 7., № 5, pp. 9–17.
3. L. P. Dobrovolskaya, S. I. Shelobaev, 2019, The number-theoretic method in econometrics // Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Materials of the XVI International Conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Michel Dez.- Tula: Tula. state. ped. L. N. Tolstoy Univ., pp. 280–283.
4. Dobrovol'skii, M. N. 2004, “The optimum coefficients of the combined meshes”, Chebyshevskij sbornik, vol. 5, № 1(9), pp. 95–121.
5. Dobrovolsky N. N., Dobrovolskaya L. P., Seregina N. K., Bocharova O. E., 2016, Algorithms for calculating optimal coefficients: Monogr. Edited by N. M. Dobrovolsky. — Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 223 p.
6. Dobrovol'skii, N. M. & Klepikova, N.L. 1990, “Table of optimal coefficients for approximate calculation of multiple integrals”, Institut obshhej fiziki AN SSSR, Moscow, USSR.
7. Information and analytical, energy website — Access mode: <http://www.eeseaec.org/energoekonomiceskie-modeli-stran-i-organizacij-mira>
8. Makarov V.L., Ayvazyan S.A., Afanasyev M.Yu., Bakhtizin A.R., Nanavyan A.M., 2014, Assessment of the effectiveness of the regions of the Russian Federation taking into account intellectual capital, characteristics of readiness for innovation, the level of welfare and quality of life of the population // Regional economy, № 4. pp. 9–30.
9. Mamonov M.E., Pestova A.A., 2015, Analysis of technical efficiency of national economies: the role of institutions, infrastructure and resource rent // Journal of the New Economic Association, № 3. pp. 44–78.
10. The science. Technologies. Innovations: 2020: a brief statistical collection / L.M. Gokhberg, K.A. Ditkovsky, E.I. Evnevich, et al.; Nats. Research. Uni-t “Higher School of Economics”. — Moscow: HSE, p. 88. — Access mode: <https://issek.hse.ru/mirror/pubs/share/340117242.pdf>
11. Nikitin A. N., Rusakova E. I., Parkhomenko E. I., Ivankina T. I., Dobrovolsky N. M., 1988, On reconstruction of paleotectonic stresses according to data on piezoelectric textures of rocks. // Izvestiya AN SSSR. Physics of the Earth, № 9, pp. 66–74.

12. Nikitin A. N., Rusakova E. I., Parkhomenko E. I., Ivankina T. I., Dobrovolsky N. M. 1988, Reconstruction of paleotectonic stresses using data on piezoelectric textures of rocks // Izvestia of Physics of the Earth, Vol. 24, № 9, pp. 728-734.
13. Rebrova I. Yu., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. N., Dobrovolsky M. N., Dobrovolsky N. M., 2018, On classical number-theoretic grids // Chebyshev collection, Vol. 19, № 4 (68), pp. 118–176.
14. Rating of innovative development of the subjects of the Russian Federation / National. Research. Uni-t “Higher School of Economics”. — Moscow: HSE, 2019. — Access mode: <https://issek.hse.ru/rirr2019>
15. I. M. Sobol, 1982, “On the evaluation of the accuracy of the simplest multidimensional search”, Dokl. USSR Academy OF Sciences, № 266:3 , pp. 569–572.

Получено 7.08.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.