ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-16-24

Об одной задаче Коши с периодическими начальными условиями

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков

Архипова Людмила Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

email: arhipova@mi-ras.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

email: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В данной работе дано применение метода тригонометрических сумм к исследованию решений уравнений в частных производных. В начале понижается размерность задачи с помощью метода разделения переменных. При этом задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет использовать анализ Фурье.

Ключевые слова: волновое уравнение, уравнение Гельмгольца, метод разделения переменных, анализ Фурье.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков. Об одной задаче Коши с периодическими начальными условиями // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 16–24.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-16-24

On a Cauchy problem with periodic initial values

L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov

Arkhipova Ludmila Gennad'evna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

email: arhipova@mi-ras.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In the paper, the method of exponential sums is applied to the solution of partial differential equation. At the initial step, the authors decrease the dimension of the problem by separation of variables. Thus the initial problem reduces to the system of the ordinary differential equations. This allows one to use Fourier analysis.

Keywords: the wave equation, Helmgoltz equation, the separation of variables method, the Fourier analysis.

Bibliography: 9 titles.

For citation:

L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov, 2021, “On a Cauchy problem with periodic initial values”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 16–24.

1. Введение

Настоящая работа посвящена оценке решения волнового уравнения в задаче Коши с периодическими начальными условиями. Для нахождения решений уравнения пользуемся методом разделения переменных, который сводит задачу к решению системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, для уравнения Гельмгольца существуют только четыре системы координат, допускающие разделение переменных: *декартова* Oxy , решения в которой представляются в виде произведения экспоненциальных функций; *полярная* (r, φ) , связанная с декартовой соотношениями: $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ и

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

решения уравнения Гельмгольца представляются в виде произведения функции Бесселя и экспоненциальной функции; *параболическая*

$$\begin{cases} x = (\xi^2 - \eta^2)/2, \\ y = \xi\eta, \end{cases}$$

решения в которой являются произведением функций параболического цилиндра; и, наконец, эллиптическая

$$\begin{cases} x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \\ y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, \end{cases}$$

с решениями, представленными функциями Матье.

Здесь изучаются решения волнового уравнения и уравнения Гельмгольца в декартовой и полярных системах координат. Мы используем методы работ [1]–[9].

§1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Преобразование Абеля. Пусть a_s, b_s — последовательности комплексных чисел, N, M — натуральные числа, и пусть при $t > M$ имеем $A_t = \sum_{s=M+1}^t a_s b_s$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{s=M+1}^N a_s b_s = A_N b_N + \sum_{s=M+1}^{N_1} A_s (b_s - b_{s+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, [6].

ЛЕММА 2. Оценка тригонометрической суммы. Пусть в промежутке $q < x \leq r$ функция $f''(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$A^{-1} \leq |f''(x)| \leq kA^{-1},$$

где k — постоянное и $A \geq 5k$. Пусть далее в том промежутке функция $\varphi(x)$ монотонна и подчинена условию $\varphi(x) \ll H$. Тогда для суммы

$$S = \sum_{q < x \leq r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)}$$

справедливо неравенство

$$S \ll H \left(\frac{r-q}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U \right); U = \max\{r-q, A\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., [2], лемма 1, с.14.

§2. Волновое уравнение в декартовых координатах.

Как известно, волновое уравнение в декартовых координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \right) \Psi(x, y) = 0, \quad (1)$$

где ω — некоторая положительная постоянная.

Метод разделения переменных для некоторого уравнения в частных производных второго порядка от n переменных представляет собой сведение его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в количестве, самое большее n .

Воспользуемся методом разделения переменных, положив $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Из (1) имеем

$$X''Y - XY'' + \omega^2 XY = 0$$

или

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} - \omega^2 = -k^2,$$

где k — константа разделения переменных.

Отсюда получим эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ Y''(y) + (k^2 - \omega^2) Y(y) = 0. \end{cases}$$

При $k \neq 0$ решения $X_1 = X_{1,k}(x) = e^{ikx}$ и $X_2 = X_{2,k}(x) = e^{-ikx}$ являются базисом решений первого уравнения, а при $k^2 \neq \omega^2$ решения $Y_1 = Y_{1,k}(y) = e^{i(k^2 - \omega^2)^{1/2}y}$ и $Y_2 = Y_{2,k}(y) = e^{-i(k^2 - \omega^2)^{1/2}y}$ — базисом решений второго уравнения. Таким образом при указанных условиях общее решение имеет вид

$$\Psi_k(x, y) = \sum_{s,t=1}^2 A_{s,t} X_{s,k}(x) Y_{t,k}(y),$$

где $A_{s,t} = A_{s,t}(k)$ — произвольные комплексные постоянные.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad \Psi'_y(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

где $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π и с ограниченным изменением (ограниченной вариацией).

Будем искать решение задачи Коши (2) в виде ряда

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k(x, y) = \sum_{s,t=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k A_{s,t}(k) X_{s,k}(x) Y_{t,k}(y).$$

По теореме о единственности представления функции в виде ряда Фурье по первому начальному условию имеем

$$\begin{aligned} 0 = \Psi(x, 0) &= \sum_{s,t=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k A_{s,t}(k) X_{s,k}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k ((A_{1,1}(k) + A_{1,2}(k)) e^{ikx} + (A_{2,1}(k) + A_{2,2}(k)) e^{-ikx}), \\ A_{1,1}(k) &= -A_{1,2}(k), A_{2,1}(k) = -A_{2,2}(k). \end{aligned}$$

Из второго начального условия с учетом первого находим

$$\begin{aligned} f(x) = \Psi'_y(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k ((A_{1,1}(k) Y'_{1,k}(0) + A_{2,1}(k) Y'_{2,k}(0)) e^{ikx} + \\ &+ (A_{2,1}(k) Y'_{1,k}(0) + A_{2,2}(k) Y'_{2,k}(0)) e^{-ikx}) = \\ &= 2i \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - \omega^2)^{1/2} (A_{1,1}(k) e^{ikx} + A_{2,1}(k) e^{-ikx}). \end{aligned}$$

Тригонометрические ряды, представляющие функции $\Psi''_{xx}(x, y)$ и $\Psi''_{yy}(x, y)$, очевидно, абсолютно сходятся, если $A_{1,1}(k), A_{1,2}(k) \ll k^{-3}(\ln k)^{-1-\varepsilon}, \varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Рассмотрим пример непрерывной 2π -периодической функции

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \rho\left(\frac{u}{2\pi}\right) du, \quad \rho(x) = 0, 5 - \{x\},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа. Имеем

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Следовательно,

$$A_{1,1}(k) = -\frac{1}{4k^2\sqrt{k^2 - \omega^2}} = -A_{2,1}(k).$$

Стало быть,

$$\Psi(x, y) = \sum_{s,t=1}^2 (-1)^{s+t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i((-1)^{s-1}xk + (-1)^{t-1}y\sqrt{k^2 - \omega^2})}}{4k^2\sqrt{k^2 - \omega^2}}.$$

Докажем сходимость рядов $\Psi''_{xx}(x, y)$ и $\Psi''_{yy}(x, y)$, используя критерий Коши. Для этого при достаточно большом N и любом натуральном $p \geq 1$ достаточно оценить сверху модуль отрезка ряда вида

$$S_{M,p} = \sum_{k=M+1}^{M+p} c_k e^{2\pi i f(x,y;k)},$$

где $f(x, y; k) = kx + y\sqrt{k^2 - \omega^2}$, $c_k = \frac{1}{\sqrt{k^2 - \omega^2}}$ или $c_k = \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{k^2}$.

Промежуток суммирования $(M, M+p]$ разобьем на промежутки вида $T < t \leq T', T \leq T' \leq 2T$, и оценим модуль суммы

$$S(T) = \sum_{k=T+1}^{T'} c_k e^{2\pi i f(x,y;k)}.$$

Поскольку c_k убывают при $k \rightarrow \infty$, то применяя преобразование Абеля (лемма 1), при $k > \omega$ получим

$$\begin{aligned} S(T) &= \sum_{k=T+1}^{T'} c_k e^{2\pi i f(x,y;k)} = c_{T'} \sum_{k=T+1}^{T'} e^{2\pi i f(x,y;k)} + \\ &+ \sum_{k=T+1}^{T'-1} \left(\sum_{t=T+1}^k e^{2\pi i f(x,y;t)} \right) (c_k - c_{k+1}). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$|S(T)| \leq |c_{T'}| \max_{T < k \leq T'} \left| \sum_{t=T+1}^k e^{2\pi i f(x,y;t)} \right|.$$

Пусть в предыдущей формуле максимум тригонометрической суммы достигается при $k = T'' \leq T'$. Получим

$$V = \left| \sum_{t=T}^{T''} e^{2\pi i f(x,y;t)} \right| = \max_{T < s \leq T'} \left| \sum_{t=T}^s e^{2\pi i f(x,y;t)} \right|.$$

Оценим модуль суммы V . Для этого воспользуемся леммой 2. При $k > 2\omega$ имеем

$$f(x, y; k) = kx \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}y,$$

$$(f(x, y; k))'_k = x \pm \frac{ky}{\sqrt{k^2 - \omega^2}}, |(f(x, y; k))'_k| \leq |x| + 2|y|.$$

$$(f(x, y; k))''_{kk} = \mp \frac{y\omega^2}{(k^2 - \omega^2)^{3/2}}.$$

Стало быть, $V \ll T^{1/2}$. Отсюда $M \rightarrow \infty$ находим

$$S(T) \ll T^{-1/2}, S_{M,p} \ll M^{-1/2} \rightarrow 0.$$

Таким образом, сходимость рядов $\Psi''_{xx}(x, y)$ и $\Psi''_{yy}(x, y)$ дает решение $\Psi(x, y)$ волнового уравнения (1), (2).

Более того, сходимость этих рядов в общем случае будет обеспечена для монотонных последовательностей $A_{1,1}(k)$ и $A_{1,2}(k)$, убывающих как $\ll k^{-5/2}(\ln k)^{-1-\varepsilon}$.

§3. Уравнение Гельмгольца в декартовых координатах.

Пусть $\omega > 0$ — некоторая постоянная. Тогда приведенное волновое уравнение, или уравнение Гельмгольца, в декартовых координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \right) \Psi(x, y) = 0, \quad (3).$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3) с начальными условиями (2).

Как и раньше, положив $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Из (3) находим

$$X''Y + XY'' + \omega^2 XY = 0$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \omega^2 = -k^2,$$

где k — константа разделения переменных.

Отсюда получим эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ Y''(y) + (\omega^2 - k^2) Y(y) = 0. \end{cases}$$

При $k \neq 0$ решения $X = X_{1,k}(x) = e^{ikx}$ и $X = X_{2,k}(x) = e^{-ikx}$ являются базисом решений первого уравнения, а при $k^2 \neq \omega^2$ решения $Y = Y_{1,k}(y) = e^{i(\omega^2 - k^2)^{1/2}y}$ и $Y = Y_{2,k}(y) = e^{-i(\omega^2 - k^2)^{1/2}y}$ — базисом решений второго уравнения. Таким образом при указанных условиях общее решение имеет вид

$$\Psi_k(x, y) = \sum_{s,t=1}^2 A_{s,t}(k) X_{s,k}(x) Y_{t,k}(y),$$

где $A_{s,t}(k)$ — произвольные комплексные постоянные.

Исследуем решение вида

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e^{ikx} + e^{-ikx}) e^{-y\sqrt{k^2 - \omega^2}}$$

задачи (2), (3), где $c_k = -\frac{1}{k^2}$. Оно представляет собой быстроходящийся ряд и его поведение определяется начальным отрезком ряда.

§4. Уравнение Гельмгольца в полярных координатах.

Запишем уравнение Гельмгольца в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

где $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Сначала выполним стандартные преобразования дифференциального выражения

$$V = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y^2}.$$

Имеем

$$\begin{cases} dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Разрешив последнюю систему уравнений относительно неизвестных dr и $d\varphi$, получим

$$\begin{cases} dr = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy, \\ rd\varphi = -\sin \varphi dx + \cos \varphi dy. \end{cases}$$

Отсюда, дифференцируя эти равенства, находим

$$\begin{cases} d^2 r = (-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy) d\varphi = r d\varphi^2, \\ rd^2 \varphi = (\sin \varphi dx + r \cos \varphi dy) d\varphi = -dr d\varphi. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} d^2 r = r d\varphi^2, \\ d^2 \varphi = -\frac{2}{r} dr d\varphi. \end{cases}$$

Далее преобразуем первый и второй дифференциалы функции Ψ . Имеем

$$\begin{cases} d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} d\varphi, \\ d^2 \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial r} dr + \frac{\partial}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial r} d^2 r + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} d^2 \varphi. \end{cases}$$

Приводим второй дифференциал функции $\Psi(r, \varphi)$ к следующему виду

$$d^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} dr^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) dr d\varphi + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) d\varphi^2.$$

Наконец заменим дифференциалы dr и $d\varphi$ из формулы (3) через dx и dy . Получим

$$\begin{aligned} d^2 \Psi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} (\cos \varphi dx + \sin \varphi dy)^2 + \\ &+ \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) (\cos \varphi dx + \sin \varphi dy)(-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy) + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) (-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy)^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$d^2 \Psi = A dx^2 + B dx dy + C dy^2.$$

Значит, искомая функция V представляется в форме

$$V = A + C = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \right) \Psi(r, \varphi).$$

Стало быть, в полярных координатах уравнение Гельмгольца примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \right) \Psi(r, \varphi) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу Коши в области $0 < a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi < 2\pi$, для уравнения (4) с начальными условиями

$$\Psi(a, \varphi) = 0, \quad \Psi'_r(a, \varphi) = f(\varphi), \quad (5)$$

где $f(\varphi)$ — периодическая функция с периодом 1 и с ограниченным изменением (ограниченной вариацией).

Далее воспользуемся методом разделения переменных, положив $\Psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Из (2) находим

$$(r^2 R'' + rR' + r^2 \omega^2)R^{-1} = -\Phi''\Phi^{-1} = k^2,$$

где k — константа разделения переменных.

Имеем эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) + (r^2 \omega^2 - k^2)R(r) = 0. \end{cases}$$

При $k \neq 0$ первое уравнение имеет базисные решения $\Phi(\varphi) = e^{\pm i\varphi}$, а второе при $k \geq 1$ — независимые решения $R(r) = J_k(\omega r)$ (функция Бесселя) и $R(r) = Y_k(\omega r)$ (функция Неймана), где эти функции $R = R_\nu(r), \nu \in \mathbf{N}$, при $r \neq 0$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Производя замену функции $R = R(r)$ на функцию $R_1 = R\sqrt{r}$, получим уравнение

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left(\omega^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2} \right) R_1 = 0.$$

Последнее преобразование позволяет исследовать решения $\Psi(r, \varphi)$ как ряды Фурье.

2. Заключение

Оценки тригонометрических сумм по производным дают удобный и полезный способ исследования решений уравнений в частных производных. Понижению размерности задачи служит метод разделения переменных. В частности, это позволяет сводить задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир. 1981, 342 с.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Физматлит. 1976, 144 с.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными — М.: Мир. 1964, 830 с.
4. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.
5. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miller W., Jr. 1980. The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct. and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.
2. Vinogradov I. M. 1976. Special variants of the trigonometrical sums method. — M.: Fizmatlit, pp. 144.
3. Courant R. 1964. Equations with partial derivatives. — M.: Mir, pp. 830.
4. Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, pp. 888.
5. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ. House of the Orjol University, pp. 464.
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lecture on mathematical analysis. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. pp. 640.

Получено 17.09.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.