

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3: 517.958

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-370-384

Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией

А. А. Трещев, Ю. А. Завьялова, М. А. Лапшина, А. Е. Гвоздев,
О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын

Трещев Александр Анатольевич — член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: taa58@yandex.ru

Завьялова Юлия Андреевна — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: zavyalova_yuliya95@mail.ru

Лапшина Мария Александровна — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: mary51296@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

Анализируются механические свойства широко распространенных в технике композитных и полимерных материалов. Подтверждено, что абсолютное большинство из них обладают структурной анизотропией разного класса. Кроме того, показано, что эти конструкционные материалы зачастую проявляют чувствительность деформационных характеристик к виду напряженного состояния. Ввиду того, что классические математические модели, описывающие состояния подобных материалов, приводят к грубым ошибкам при расчете элементов конструкций, а известные, специально разработанные для них теории достаточно противоречивы и имеют существенные недостатки, авторами предлагается энергетическая модель определяющих соотношений для сред, имеющих структурную и деформационную анизотропию. Эта модель основана на использовании нормированного тензорного пространства напряжений, которое обладает несомненным преимуществом по сравнению с сингулярными функциями и параметрами, имеющими бесконечный интервал изменения, которые используются в известных вариантах теорий деформирования материалов с двойной анизотропией. В качестве конкретного класса структурной анизотропии приняты ортотропные материалы, для которых постулируется потенциал деформаций, определенный в главных структурных осях. Дифференцированием сформулированного потенциала согласно рекомендациям правил Кастильяно установлены уравнения связи двух тензоров второго ранга — деформаций и напряжений. Показано, что эти уравнения имеют нелинейный вид, что усугубляет проблему единственности решений краевых

задач. Для идентификации полученной модели определяющих уравнений рекомендована программа экспериментов, включающая в себя механические испытания на одноосные растяжение и сжатие вдоль главных осей анизотропии материала, а также – на чистый сдвиг в трех плоскостях ортотропии. Приведены основные технические константы ряда широко используемых в технике композитных и полимерных материалов. На основе использования постулата о положительной определенности энергетической поверхности проверена непротиворечивость предложенного потенциала деформаций. С использованием этой проверки доказана теорема единственности решения краевых задач механики деформируемого твердого тела. Принимая во внимание правила преобразования компонентов тензоров второго ранга при повороте осей выбранной системы координат, показано, что напряжения, вычисленные в главных осях ортотропии, пересчитываются в новой системе по традиционным формулам.

Ключевые слова: деформационная анизотропия, структурная ортотропия, потенциал деформаций, тензоры второго ранга, теорема единственности, постулат Друккера, главные оси ортотропии.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

А. А. Трещев, Ю. А. Завьялова, М. А. Лапшина, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупитсин. Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 370–384.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3: 517.958

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-370-384

Defining equations of deformation of materials with double anisotropy

A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev,
O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn

Treschev Alexander Anatolyevich — corresponding member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: taa58@yandex.ru

Zavyalova Yulia Andreevna — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: zavyalova_yuliya95@mail.ru

Lapshina Maria Alexandrovna — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: mary51296@yandex.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula) (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The mechanical properties of composite and polymer materials widely used in engineering are analyzed. It is confirmed that the absolute majority of them have structural anisotropy of different classes. In addition, it is shown that these structural materials often exhibit a sensitivity of the deformation characteristics to the type of stress state. Due to the fact that classical mathematical models describing the states of such materials lead to gross errors in the calculation of structural elements, and the well-known, specially developed theories for them are quite contradictory and have significant drawbacks, the authors propose an energy model of the determining relations for media with structural and deformation anisotropies. This model is based on the use of the normalized stress tensor space, which has an undoubted advantage over the singular functions and parameters having an infinite interval of change, which are used in the known versions of the theories of deformation of materials with double anisotropy. As a specific class of structural anisotropy, orthotropic materials are accepted, for which the strain potential defined in the main structural axes is postulated. By differentiating the formulated potential according to the recommendations of the Castigliano rules, the equations of connection of two tensors of the second rank - strains and stresses - are established. It is shown that these equations have a nonlinear form, which aggravates the problem of uniqueness of solutions to boundary value problems. To identify the resulting model of the defining equations, we recommend an experimental program that includes mechanical tests for uniaxial tension and compression along the main axes of the anisotropy of the material, as well as for a net shift in the three planes of orthotropy. The main technical constants of a number of composite and polymer materials widely used in engineering are given. On the basis of the use of the postulate about the positive certainty of the energy surface, the consistency of the proposed strain potential is verified. Using this test, we prove the uniqueness theorem for solving boundary value problems in the mechanics of a deformable solid. Taking into account the rules of transformation of the components of the second-rank tensors when the axes of the selected coordinate system are rotated, it is shown that the stresses calculated in the main axes of orthotropy are recalculated in the new system according to traditional formulas.

Keywords: deformation anisotropy, structural orthotropy, strain potential, second-rank tensors, uniqueness theorem, Drucker postulate, principal axes of orthotropy.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn, 2021, "Defining equations of deformation of materials with double anisotropy", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 370–384.

1. Введение

Механические испытания образцов графитовых композитов, боропластиков, стеклопластиков, поликарбоната и других подобных по структуре материалов с направленным или хаотическим армированием подтверждают наличие у них анизотропии жесткостных и прочностных свойств. Кроме того, в этих экспериментах обнаружено явное несовпадение диаграмм деформирования при растяжении и сжатии по одноименным осям [1–10]. Отмеченный фактор заметно сложнее, чем не простое несовпадение диаграмм при одних только одноосных растяжениях и сжатиях по главным осям анизотропии материала. Такое поведение материалов особо проявляется при плоских и объемных напряженных состояниях. В инженерной технике преимущественно используются материалы по классу анизотропии относящемуся к ортотропии. Давно известно, что традиционно российский строительный материал, каковым является древесина, которая также широко используется в Канаде и Финляндии, обладает свойствами цилиндрической ортотропии. Конструкционные композиты и материалы с армированием имеют высокие показатели прочности и жесткости, но наряду с структурными усложнениями,

приводят к проявлению чувствительности физико-механических характеристик к виду напряженного состояния, а это не укладывается в традиционные устои классической механики деформируемых сред. Теоретико-экспериментальных исследований по механике анизотропных материалов, обладающих различными диаграммами деформирования при изменении вида напряженного состояния, проведено достаточно мало. Это обусловлено сложностью проблемы. Здесь представляем вариант деформационной модели, применяемого к указанному классу материалов, доказана теорема единственности решений краевых задач МДТТ с определением ограничений на константы потенциала деформаций. Предложенный вариант уравнений состояния не имеет внутренних противоречий и может широко применяться к расчетам конструкций любого назначения многие годы.

2. Основная часть

При постулировании определяющих уравнений и, прежде всего, нелинейных, несомненным преимуществом обладают энергетические потенциальные функции деформаций или напряжений, что продемонстрировано в работах [7, 11].

3. Потенциал деформаций. Уравнения состояния

В материалах работы [1] наряду с другими проблемами проведен анализ имеющихся экспериментальных сведений о механических испытаниях композитов со структурной и деформационной анизотропией [2–10]. Отмечено, что общие зависимости «напряжения – деформации» для этих материалов носят нелинейный характер с нелинейностью различного типа. Основываясь на экспериментальных данных [1–10] предлагается провести построение потенциала деформаций для структурно ортотропных материалов, ограничившись квазиквадратичным разложением функции по характерным для данного класса анизотропии, как это обосновано в работе [11]. В случае ортотропного деформируемого тела потенциал деформаций должен быть представлен функцией:

$$W = W(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}\tau_{21}, \tau_{23}\tau_{32}, \tau_{31}\tau_{13}, \tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}), \quad (1)$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ — нормальные и касательные напряжения в главных осях ортотропии материала, комбинация которых учтена по правилам [11].

В полиномиальном разложении (1) опорные коэффициенты определяются в зависимости от механических свойств материалов, определяемых видом напряженного состояния и вычисляемых из эталонных экспериментов. При квадратичном разложении (1), имеем:

$$W = C_1\sigma_{11}^2 + C_2\sigma_{22}^2 + C_3\sigma_{33}^2 + C_4\sigma_{11}\sigma_{22} + C_5\sigma_{22}\sigma_{33} + C_6\sigma_{33}\sigma_{11} + C_7\tau_{12}\tau_{21} + C_8\tau_{23}\tau_{32} + C_9\tau_{31}\tau_{13}. \quad (2)$$

Если учесть наличие у материалов деформационной анизотропии, то, как предложено в работах [12–14], константы необходимо заменить на функции, зависящие от нормированных напряжений, определенных в главных материальных осях $C_k = C_k(\alpha_{ij})$, где нормированные напряжения определены по указаниям публикаций [12–14] в тензорной форме:

$$\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{S}; \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где норма тензорного пространства определена в соответствии с указаниями работ [12–14]:

$$S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}. \quad (4)$$

Напряжения в нормированном тензорном пространстве связаны условием нормирования [1, 12–14]:

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{23}^2 + 2\alpha_{13}^2 = 1. \quad (5)$$

С учетом представления констант в виде функций от нормированных напряжений, потенциал (2) расписывается в более подробном виде:

$$\begin{aligned} W = & 0,5(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11}^2 + 0,5(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}^2 + \\ & + 0,5(A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}^2 + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11}\sigma_{22} + \\ & + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22}\sigma_{33} + [A_{3311} + B_{3311}(\alpha_{33} + \alpha_{11})]\sigma_{33}\sigma_{11} + \\ & + 0,5(A_{1212}\tau_{12}^2 + A_{2323}\tau_{23}^2 + A_{3131}\tau_{31}^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Нелинейные зависимости между тензорами деформаций и напряжений, имеющие второй ранг, для материалов с двойной анизотропией, рекомендуется определить в главных материальных осях ортотропии, продифференцировав потенциал (2), (6), как предлагал Кастильяно:

$$e_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Проведенный в работе [1] анализ, показал, что при учете полной физической нелинейности связей деформаций с напряжениями возникает чрезвычайно большое количество констант, подлежащих экспериментальному определению, что затрудняет их вычисление в полном объеме, когда требуется проведение опытов по сложным напряженным состояниям. Эти эксперименты с необходимостью включают реализацию различных двухосных, трехосных растяжения-сжатия, опыты одновременного сдвига минимум в двух взаимно ортогональных плоскостях ортотропии и испытания по сдвигу при растяжение-сжатии вдоль двух осей. Подобные эксперименты подразумевают наличие уникального экспериментально-специализированного оборудования, которое сложно найти, а во многих случаях, оно просто не существует, а сведения о данных подобных экспериментов в международной литературе отсутствуют. Поэтому для обеспечения необходимой точности деформационно-прочностных расчетов при полной идентификации модели ее представляем квазиквадратичным разложением (6).

Продифференцировав потенциал (6) по правилам (7), получим уравнения состояния структурно ортотропных материалов, проявляющих деформационную анизотропию:

$$\begin{aligned} e_{11} = & \{(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0,5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - D_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - \\ & - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) - \\ & - B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\}\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ e_{22} = & [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + \{(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - \\ & - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})\}\sigma_{22} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ e_{33} = & [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22} + \{(A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}) + \\ & + 0,5[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + \\ & + B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1122}\alpha_{11} + \alpha_{22})\}\sigma_{33}; \quad (8) \\ \gamma_{12} = & \{A_{1212} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}\tau_{12}; \\ \gamma_{23} = & \{A_{2323} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3) + B_{3333}\alpha_{33}^3 - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}\tau_{23}; \end{aligned}$$

$$\gamma_{13} = \{A_{1313} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})] + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})\}\tau_{13}.$$

Вид уравнений связи тензора деформаций и напряжений (8) имеет каноническую форму, традиционную для классических соотношений [11] при следующих ненулевых компонентах податливостей C_{ijkl} для материала класса ортотропных: C_{1111} ; C_{2222} ; C_{3333} ; C_{1313} ; C_{2323} ; C_{1212} ; $C_{1122} = C_{2211}$; $C_{1133} = C_{3311}$; $C_{2233} = C_{3322}$.

4. Идентификация модели. Теорема единственности решения

Идентификация модели заключается в определении констант потенциала деформаций (6), которые вычисляются по результатам проведенных механических испытаний эталонных образцов материала, вырезанных с соблюдением соосности главным материальным направлениям ортотропии. Проведение экспериментов на одноосные растяжение и сжатие вдоль указанных трех главных осей ортотропии позволяют установить относительные деформации и вычислить нормальные напряжения, а по их соотношениям – определить модули упругости $E_k^\pm$ и коэффициенты поперечных деформаций $\nu_{ij}^\pm$ (знак «плюс» соответствует испытаниям на растяжение, а «минус» – на сжатие). Эксперименты на сдвиг в главных плоскостях ортотропии дают сведения о модулях сдвига в трех главных материальных плоскостях ортотропии G_{ij} . Таким образом, опыты на одноосные растяжение и сжатие по оси ортотропии x_1 , с учетом уравнений (8) приводят к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} 1/E_1^+ &= A_{1111} + B_{1111}; \quad 1/E_1^- = A_{1111} - B_{1111}; \\ -\nu_{21}^+ &= (A_{1122} + B_{1122})/(A_{1111} + B_{1111}); \\ -\nu_{31}^+ &= (A_{1133} + B_{1133})/(A_{1111} + B_{1111}); \\ -\nu_{21}^- &= (A_{1122} - B_{1122})/(A_{1111} - B_{1111}); \\ -\nu_{31}^- &= (A_{1133} - B_{1133})/(A_{1111} - B_{1111}), \end{aligned} \quad (9)$$

по оси ортотропии x_2 :

$$\begin{aligned} 1/E_2^+ &= A_{2222} + B_{2222}; \quad 1/E_2^- = A_{2222} - B_{2222}; \\ -\nu_{12}^+ &= (A_{1122} + B_{1122})/(A_{2222} + B_{2222}); \\ -\nu_{32}^+ &= (A_{2233} + B_{2233})/(A_{2222} + B_{2222}); \\ -\nu_{12}^- &= (A_{1122} - B_{1122})/(A_{2222} - B_{2222}); \\ -\nu_{32}^- &= (A_{2233} - B_{2233})/(A_{2222} - B_{2222}); \end{aligned} \quad (10)$$

по оси ортотропии x_3 :

$$\begin{aligned} 1/E_3^+ &= A_{3333} + B_{3333}; \quad 1/E_3^- = A_{3333} - B_{3333}; \\ -\nu_{13}^+ &= (A_{1133} + B_{1133})/(A_{3333} + B_{3333}); \\ -\nu_{23}^+ &= (A_{2233} + B_{2233})/(A_{3333} + B_{3333}); \\ -\nu_{13}^- &= (A_{1133} - B_{1133})/(A_{3333} - B_{3333}); \\ -\nu_{23}^- &= (A_{2233} - B_{2233})/(A_{3333} - B_{3333}); \end{aligned} \quad (11)$$

Чистый сдвиг в главных плоскостях из уравнений (8) приводит к значениям следующих констант:

$$1/G_{12} = A_{1212}; \quad 1/G_{23} = A_{2323}; \quad 1/G_{13} = A_{1313} \quad (12)$$

Окончательно уравнения (9)–(12) устанавливают значения констант потенциала (6), выраженные через технические характеристики:

$$\begin{aligned} A_{hhhh} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; & B_{hhhh} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\ A_{ijij} &= 1/G_{ij}; & A_{iijj} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \\ B_{iijj} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; & \nu_{ij}^+/E_j^+ &= \nu_{ji}^+/E_i^+; \\ \nu_{ij}^-/E_j^- &= \nu_{ji}^-/E_i^-; & i, j, k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулировка новых моделей деформирования материалов, проявляющих нелинейные физические свойства, требует решения проблемы обеспечения единственности решений краевых задач, которая вытекает из закона сохранения энергии. Данная проблема распадается на две, первая, из которых связана с устойчивостью потенциала деформаций в малом согласно постулату Друккера [15, 16]:

$$\delta e_{ij} \delta \sigma_{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta \sigma_{km} \delta \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \geq 0. \quad (14)$$

Раскрытие постулата Друккера (14) обеспечивает положительность квадратичной формы, что соответствует выпуклой энергетической поверхности потенциала (6) и устанавливает ограничения на его константы. Расписывая вариации (14) получаем квадратичную форму от компонентов тензора напряжений, определенных в главных осях ортотропии материала. Эта квадратичная форма приводит к неравенству:

$$C_{ij} \delta \zeta_i \delta \zeta_j \geq 0; \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (15)$$

где $\zeta_1 = \sigma_{11}$; $\zeta_2 = \sigma_{22}$; $\zeta_3 = \sigma_{33}$; $\zeta_4 = \tau_{13}$; $\zeta_5 = \tau_{23}$; $\zeta_6 = \tau_{12}$ — параметры разложения симметричной матрицы с компонентами:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{11}^2} = A_{1111} + B_{1111} \alpha_{11} + 0, 5[B_{1111} \alpha_{11} (1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222} \alpha_{22}^3 - B_{3333} \alpha_{33}^3 - B_{1212} \alpha_{12}^3 - \\ &\quad - B_{2323} \alpha_{23}^3 - B_{1313} \alpha_{13}^3] + B_{1122} \alpha_{22} (1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22}) + B_{1133} \alpha_{33} (1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33}) - \\ &\quad - B_{2233} \alpha_{22} \alpha_{33} (\alpha_{22} + \alpha_{33}) + \alpha_{11} \{ (1 - \alpha_{11}^2) [B_{1111} + 0, 5 B_{1111} (1 - 3 \alpha_{11}^2) - B_{1122} \alpha_{22} (2 \alpha_{11} + \alpha_{22}) - \\ &\quad - B_{1133} \alpha_{33} (2 \alpha_{11} + \alpha_{33})] + 1, 5 \alpha_{11} (B_{2222} \alpha_{22}^3 + B_{3333} \alpha_{33}^3 + B_{1212} \alpha_{12}^3 + B_{2323} \alpha_{23}^3 + B_{1313} \alpha_{13}^3) - \\ &\quad - \alpha_{11} [B_{1122} \alpha_{22} (1 - \alpha_{11}^2 - 2 \alpha_{11} \alpha_{22}) + B_{1133} \alpha_{33} (1 - \alpha_{11}^2 - 2 \alpha_{11} \alpha_{33}) - 3 B_{2233} \alpha_{22} \alpha_{33} (\alpha_{22} + \alpha_{33})] \} + \\ &\quad + B_{1122} \alpha_{22} (1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22}) + B_{1133} \alpha_{33} (1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33}); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{11} \partial \sigma_{22}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{22} \partial \sigma_{11}} = A_{1122} + B_{1122} (\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{1122} \alpha_{22} (1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22}) - \\ &\quad - B_{1133} \alpha_{22} \alpha_{33} (\alpha_{11} + \alpha_{33}) - \alpha_{11} \{ 1, 5 B_{1111} \alpha_{11} \alpha_{22} (1 - \alpha_{11}^2) + 1, 5 \alpha_{22} [B_{2222} \alpha_{22} (1 - \alpha_{22}^2) - \\ &\quad - B_{3333} \alpha_{33}^3 - B_{1212} \alpha_{12}^3 - B_{2323} \alpha_{23}^3 - B_{1313} \alpha_{13}^3] + B_{1122} [(1 - \alpha_{22}^2) (1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22}) - \\ &\quad - \alpha_{11} \alpha_{22} (1 - 2 \alpha_{22}^2 - 2 \alpha_{11} \alpha_{22})] - B_{1133} \alpha_{22} \alpha_{33} (1 - 3 \alpha_{11}^2 - 3 \alpha_{11} \alpha_{33}) - \\ &\quad - B_{2233} \alpha_{33} [(\alpha_{22} + \alpha_{33}) (1 - 2 \alpha_{22}^2) + \alpha_{22} (1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22} \alpha_{33})] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{13} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{11} \partial \sigma_{33}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{33} \partial \sigma_{11}} = A_{1133} + B_{1133} (\alpha_{11} + \alpha_{33}) + B_{1133} \alpha_{33} (1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33}) - \\ &\quad - B_{1122} \alpha_{22} \alpha_{33} (\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \alpha_{11} \{ 1, 5 B_{1111} \alpha_{11} \alpha_{33} (1 - \alpha_{11}^2) + 1, 5 \alpha_{33} [B_{3333} \alpha_{33} (1 - \alpha_{33}^2) - B_{2222} \alpha_{22}^3 - \\ &\quad - B_{1212} \alpha_{12}^3 - B_{2323} \alpha_{23}^3 - B_{1313} \alpha_{13}^3] + B_{1133} [(1 - \alpha_{33}^2) (1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33}) - \alpha_{11} \alpha_{33} (1 - 2 \alpha_{33}^2 - \end{aligned}$$

$$-2\alpha_{11}\alpha_{33}]) - B_{1122}\alpha_{22}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) - B_{2233}\alpha_{22}[(\alpha_{22} + \alpha_{33})(1 - 2\alpha_{22}^2) + \alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33})];$$

$$C_{14} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{11} \partial \tau_{13}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{13} \partial \sigma_{11}} = \alpha_{11}\alpha_{13}\{3[B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 - 0,5B_{1313}\alpha_{13}(1 - 2\alpha_{13}^2) - B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{22}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{33})] + 6B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\} - 2\alpha_{13}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]; \quad (16)$$

$$C_{15} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{11} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{23} \partial \sigma_{11}} = \alpha_{11}\alpha_{23}\{3[B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 - 0,5B_{2323}\alpha_{23}(1 - 2\alpha_{23}^2) - B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{22}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{33})] + 6B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\} - 2\alpha_{23}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})];$$

$$C_{16} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{11} \partial \tau_{12}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{12} \partial \sigma_{11}} = \alpha_{11}\alpha_{12}\{3[B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 - 0,5B_{1212}\alpha_{12}(1 - 2\alpha_{12}^2) - B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{22}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{11}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{33})] + 6B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\} - 2\alpha_{12}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})];$$

$$C_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{22}^2} = A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22} + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + \alpha_{22}\{(1 - \alpha_{22}^2)[B_{2222} + 0,5B_{2222}(1 - 3\alpha_{22}^2) - B_{1122}\alpha_{11}(2\alpha_{22} + \alpha_{11}) - B_{1133}\alpha_{33}(2\alpha_{22} + \alpha_{33})] + 1,5\alpha_{22}(B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3) - \alpha_{22}[B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - 2\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{33}) - 3B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\} + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33});$$

$$C_{23} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{22} \partial \sigma_{33}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{33} \partial \sigma_{22}} = A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \alpha_{22}\{1,5B_{2222}\alpha_{22}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2) + 1,5\alpha_{33}[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{2233}[(1 - \alpha_{33}^2)(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - \alpha_{22}\alpha_{33}(1 - 2\alpha_{33}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{33})] - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) - B_{1133}\alpha_{11}[(\alpha_{11} + \alpha_{33})(1 - 2\alpha_{33}^2) + \alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33})]\};$$

$$C_{24} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{22} \partial \tau_{13}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{13} \partial \sigma_{22}} = \alpha_{22}\alpha_{13}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 - 0,5B_{1313}\alpha_{13}(1 - 2\alpha_{13}^2) - B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{11}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})\} -$$

$$-2\alpha_{13}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})];$$

$$\begin{aligned} C_{25} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{22} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{23} \partial \sigma_{22}} = \alpha_{22} \alpha_{23} \{ & 3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 - \\ & - 0,5B_{2323}\alpha_{23}(1 - 2\alpha_{23}^2) - B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{11}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) \} - \\ & - 2\alpha_{23}[B_{1122}\alpha_{11}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{26} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{22} \partial \tau_{12}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{12} \partial \sigma_{22}} = \alpha_{22} \alpha_{12} \{ & 3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 - \\ & - 0,5B_{1212}\alpha_{12}(1 - 2\alpha_{12}^2) - B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{11}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{33}(1 - 3\alpha_{22}^2 - 3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) \} - \\ & - 2\alpha_{12}[B_{1122}\alpha_{11}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{33}^2} = A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33} + 0,5[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - \\ - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - \\ - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \alpha_{33}\{(1 - \alpha_{33}^2)[B_{3333} + 0,5B_{3333}(1 - 3\alpha_{33}^2) - B_{1133}\alpha_{11}(2\alpha_{33} + \alpha_{11}) - \\ - B_{2233}\alpha_{22}(2\alpha_{33} + \alpha_{22})] + 1,5\alpha_{33}(B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3) - \\ - \alpha_{33}[B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - 2\alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{33}) - 3B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\} + \\ + B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{34} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{33} \partial \tau_{13}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{13} \partial \sigma_{33}} = \alpha_{33} \alpha_{13} \{ & 3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 - \\ & - 0,5B_{1313}\alpha_{13}(1 - 2\alpha_{13}^2) - B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - 2[B_{1133}\alpha_{11}(1 - 3\alpha_{33}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{33}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{22}(1 - 3\alpha_{33}^2 - 3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \} - \\ & - 2\alpha_{13}[B_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_{35} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{33} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{23} \partial \sigma_{33}} = \alpha_{33} \alpha_{23} \{ & 3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 - \\ & - 0,5B_{2323}\alpha_{23}(1 - 2\alpha_{23}^2) - B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2)] - 2[B_{1133}\alpha_{11}(1 - 3\alpha_{33}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{33}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{22}(1 - 3\alpha_{33}^2 - 3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \} - \\ & - 2\alpha_{23}[B_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{36} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{33} \partial \tau_{12}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{12} \partial \sigma_{33}} = \alpha_{33} \alpha_{12} \{ & 3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 - \\ & - 0,5B_{1212}\alpha_{12}(1 - 2\alpha_{12}^2) - B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2)] - 2[B_{1133}\alpha_{11}(1 - 3\alpha_{33}^2 - 3\alpha_{11}\alpha_{33}) + \\ & + B_{2233}\alpha_{22}(1 - 3\alpha_{33}^2 - 3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \} - \\ & - 2\alpha_{12}[B_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]; \end{aligned}$$

$$C_{44} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{13}^2} = A_{1313} - \{B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) +$$

$$\begin{aligned}
& + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) \} (1 - 6\alpha_{13}^2); \\
C_{45} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{23} \partial \tau_{13}} = 6\alpha_{13}\alpha_{23} \{ B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + \\
& + 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \}; \\
C_{46} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{13} \partial \tau_{12}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{12} \partial \tau_{13}} = 6\alpha_{12}\alpha_{13} \{ B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + \\
& + 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \}; \\
C_{55} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{23}^2} = A_{2323} - \{ B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + \\
& + 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \} (1 - 6\alpha_{23}^2); \\
C_{56} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{23} \partial \tau_{12}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{12} \partial \tau_{23}} = 6\alpha_{12}\alpha_{23} \{ B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + \\
& + 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \}; \\
C_{66} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \tau_{12}^2} = A_{1212} - \{ B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \\
& + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \} (1 - 6\alpha_{12}^2).
\end{aligned} \tag{16}$$

Симметрия матрицы $[C]$ позволяет утверждать, что ее положительная определенность по критерию Сильвестра обеспечивается положительностью всех ее главных миноров:

$$\begin{aligned}
& C_{11} > 0; \quad C_{22} > 0; \quad \dots; \quad C_{66} > 0; \\
\det \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} > 0; \quad \det \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{33} \end{bmatrix} > 0; \quad \det \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} > 0; \quad \dots; \\
\det \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} > 0; \quad \dots; \det [C_{pq}] > 0, \quad (p, q = 1, 2, \dots, 6),
\end{aligned} \tag{17}$$

где $C_{pq} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{km} \partial \sigma_{ij}}$; $p, q = 1, 2, \dots, 6$; $i, j, k, m = 1, 2, 3$.

Вторая составная часть проблемы обеспечения единственности решений при наличии устойчивого потенциала деформаций в малом согласно постулату Друккера [15, 16] представляет собственно доказательство теоремы единственности. Для этого запишем полную систему уравнений механики для ортотропных деформационно анизотропных материалов. Уравнения статики имеют вид: $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$. Связь тензоров деформаций и напряжений определим по формулам Кастильяно (7): $e_{ij} = \partial W / \partial \sigma_{ij}$, которые в конечном виде представлены зависимостями (8). Останавливаясь на уровне геометрически линейной теории, приведем зависимости компонентов тензора деформаций от малых перемещений в соответствии с формулами Коши: $e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Представим, что контурная поверхность объекта A образована двумя составляющими: $A = A_U + A_T$, а в некоторой точке с координатами x_i поверхности имеем:

$$u_i = u_i^*, \quad x_i \in A_U; \quad \sigma_{ij}n_j = T_i^*, \quad x_i \in A_T. \tag{18}$$

Допустим теперь, что одни и те же объемные силы при совпадении граничных условий принадлежат двум различным решениям $\sigma'_{ij}, e'_{ij}, u'_i$ и $\sigma''_{ij}, e''_{ij}, u''_i$. Одиночными и двойными штрихами обозначены состояния объекта бесконечно близкие. Очевидно, что при этом величины $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$, $e_{ij} = e'_{ij} - e''_{ij}$, $u_i = u'_i - u''_i$ также бесконечно малы и удовлетворяют уравнениям равновесия при $F_i = 0$ и нулевых напряжениям на границах: $\sigma_{ij}n_j = 0$, $x_i \in A_T$; $u_i = 0$, $x_i \in A_U$. Ввиду того, что σ_{ij} , e_{ij} бесконечно малы и допуская обнуление величин второго и высших порядков малости, приходим к очевидным зависимостям:

$$e_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{km} \partial \sigma_{ij}} \sigma_{km}. \quad (19)$$

Примем, что в уравнениях равновесия объемные силы $F_i = 0$. Тогда умножение их на u_i и интегрирование по объему, приводят к уравнению:

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = 0. \quad (20)$$

Из-за нулевых граничных условий на контуре $\sigma_{ij}n_j = 0$, $x_i \in A_T$; $u_i = 0$, $x_i \in A_U$ интеграл $\int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_A \sigma_{ij} n_j u_i dA$ по формуле Остроградского–Гаусса будет равен нулю. Тогда, принимая во внимание зависимости (19), получим

$$\int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = \int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{km}} \sigma_{ij} \sigma_{km} dV. \quad (21)$$

Соблюдение постулата Друккера, эквивалентного неравенству (14), (15), позволяет утверждать, что подинтегральное выражение становится неотрицательным когда $\sigma_{km} \neq 0$, а нулевое значение интеграла достигается только при нулевых σ_{ij} , а это позволяет утверждать, что теорема единственности доказана и уравнения состояния (8) применимы для решения краевых задач. Однако, учитывая многогранность свойств конструкционных композитов, обладающих широким спектром механических параметров, прежде, чем рассчитывать конкретные конструкции, требуется проверить соблюдение условий (14)–(17).

Приведем в табл. 1 и 2 механические характеристики некоторых широко применяемых в технике конструкционных материалов. Здесь кроме технических параметров $E_k^\pm$, $\nu_{ij}^\pm$ и G_{ij} представлены имеющиеся в литературе данные о модулях упругости на растяжение и сжатие, полученные при испытании образцов, вырезанных под углом 45° к главным осям ортотропии $E_{ij}^\pm$.

Таблица 1: Механические характеристики композитных материалов

Константы	Материалы [литературные источники]				
	Композит Т300/5208 [2]	Композит AR [3]	Композит PR [3]	Композит 16K9-27/ ATJ-S [4]	Композит AVCO Mod3a [2]
1	2	3	4	5	6
E_1^+	147,5 ГПа	3,58 ГПа	0,617 ГПа	16,56 МПа	11,7 ГПа
E_1^-	147,5 ГПа	0,012 ГПа	0,369 ГПа	12,42 МПа	10,3 ГПа
E_2^+	9,3 ГПа	0,009 ГПа	0,008 ГПа	—	—
E_2^-	14,3 ГПа	0,012 ГПа	0,01 ГПа	—	—

E_3^+	—	—	—	10,35 МПа	92,4 ГПа
E_3^-	—	—	—	8,28 МПа	16,5 ГПа
ν_{12}^+	0,25	0,416	0,475	0,12	0,11
ν_{12}^-	0,52	0,205	0,185	0,12	0,11
ν_{13}^+	—	—	—	—	0,05
ν_{13}^-	—	—	—	—	0,05
ν_{32}^+	—	—	—	0,14	—
ν_{32}^-	—	—	—	0,095	—
E_{12}^+	—	—	—	—	9,95 ГПа
E_{12}^-	—	—	—	—	9,31 ГПа
E_{13}^+	—	—	—	11,04 МПа	8,69 ГПа
E_{13}^-	—	—	—	9,315 МПа	5,52 ГПа
G_{12}	29,36 ГПа	0,0073 ГПа	0,116 ГПа	6,34 ГПа	4,39 ГПа
G_{13}	—	—	—	7,32 ГПа	3,726 ГПа
G_{23}	—	—	—	4,126 ГПа	7,203 ГПа

Таблица 2: Механические характеристики полимерных материалов

Константы	Материалы [литературные источники]					
	П32-57 [17]	П36-50 [17]	П41-42 [17]	Графит ATJ-S [18]	Стекло- пластик [19]	Стекло- пластик [20]
E_1^+	12,75 ГПа	10,3 ГПа	8,09 ГПа	11,85 ГПа	140 ГПа	60 ГПа
E_1^-	14,03 ГПа	11,77 ГПа	10,79 ГПа	10,48 ГПа	70 ГПа	20 ГПа
E_2^+	16,425 ГПа	17,6 ГПа	16,09 ГПа	11,85 ГПа	280 ГПа	30 ГПа
E_2^-	20,60 ГПа	18,54 ГПа	16,97 ГПа	10,48 ГПа	140 ГПа	15 ГПа
E_3^+	—	—	—	9,45 ГПа	—	—
E_3^-	—	8,34 ГПа	—	7,95 ГПа	—	—
ν_{12}^+	0,176	0,188	0,28	0,1	0,2	0,2
ν_{12}^-	—	—	—	0,09	0,3	0,3
ν_{13}^+	0,126	0,115	0,1	0,14	—	—
ν_{13}^-	—	—	—	0,1	—	—
E_{12}^+	—	—	—	—	170 ГПа	—
E_{12}^-	—	—	—	—	875 ГПа	—
G_{12}	3,98 ГПа	3,14 ГПа	2,92 ГПа	5,08 ГПа	52,06 ГПа	10,23 ГПа
G_{13}	3,28 ГПа	3,49 ГПа	4,02 ГПа	4,47 ГПа	—	—
G_{23}	2,63 ГПа	2,55 ГПа	2,45 ГПа	4,41 ГПа	—	—

Поворот системы координат на определенный угол Ψ приводит к изменению напряжения в новой системе, пересчет которых производится по известным формулам преобразования [11]:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \Psi + \sigma_{22} \sin^2 \Psi - 2\tau_{12} \sin \Psi \cos \Psi; \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \Psi + \sigma_{22} \cos^2 \Psi + 2\tau_{12} \sin \Psi \cos \Psi;\end{aligned}\quad (22)$$

$$\tau'_{12} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \Psi \cos \Psi + \tau_{12}(\cos^2 \Psi - \sin^2 \Psi). \quad (23)$$

Компоненты нормированного тензора напряжений α_{ij} преобразуются с поворотом осей по тем же формулам (22).

5. Заключение

Предложенные потенциальные соотношения между тензорами второго ранга деформаций и напряжений с учетом определенных из экспериментов констант для ортотропных композитных материалов [1–10, 17–20] обладают энергетической непротиворечивостью, соответствуют теореме единственности решения краевых задач и могут быть рекомендованы для использования в деформационно-прочностных расчетах элементов конструкций, аппаратов, приборов и деталей машин.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трещев А. А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев // Тула: ТулГУ, 2020. – 359 с.
2. Schmueser D. W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W. Schmueser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – №12. – pp. 1742 – 1747.
3. Reddy L. N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N. Reddy, C.W. Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – pp. 213 – 219.
4. Jones R. M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 10. – pp. 1436 – 1443.
5. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – № 8. – pp. 995 – 1001.
6. Jones R. M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. – № 5. – pp. 917 – 923.
7. Крегерс А. Ф. Нелинейная ползучесть тканевого стеклопластика при некоторых видах сложного напряженного состояния / А.Ф. Крегерс, Р.Д. Максимов, Р.П. Турциныш // Механика полимеров. – 1973. – №2. – С. 212 – 218.
8. Амелина Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В. Амелина [и др.] // ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20. – №5. – С. 27–52.
9. Каюмов Р. А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р.А. Каюмов, С.А. Луканкин, В.Н. Паймушин, С.А. Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. – кн. 4. – С. 112–132.
10. Shafigullin L. N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L.N. Shafigullin, A.A. Bo-brishev, V.T. Erofeev, A.A. Treshchev, A.N. Shafigullina // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10. – №23. – pp. 43758-43762.
11. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

12. Treschev A. A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law / A.A. Treschev, A.A. Bobrishev, L.N. Shafigullin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 481 (2019) UNSP012014. – Doi: 10.1088/1757-899X/481/1/012014. – pp. 1 – 7.
13. Трещев А. А. Определяющие соотношения для нелинейных анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / А.А. Трещев, Д.А. Ромашин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – №4. Часть 4. – С. 1740-1742.
14. Трещев А. А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов / А.А. Трещев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 4-1 (324). – С. 71 – 74.
15. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 779 с.
16. Турсунов Б. С. О свойствах потенциала напряжений упругих тел / Б.С. Турсунов // ПММ. – 1970. – Т. 34. – Вып. 1. – С. 15–22.
17. Розе А. В. Трехармированные тканые материалы / А.В. Розе, И.Г. Жигун, М.Н. Душин // Механика полимеров. – 1970. – №3. – с. 471–476.
18. Jones R. M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14 – №10. – pp. 1427–1435.
19. Jones R. M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – pp. 16–25.
20. Золочевский А. А. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении / А.А. Золочевский, В.Н. Кузнецов // Динамика и прочность тяжелых машин. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 84–92.

REFERENCES

1. Treschev A. A. 2020, *Theory of deformation and strength of different resistant materials*. Tula: TulSU. 359 p.
2. Schmueser D. W. 1983, «Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells», *AIAA Journal*, Vol. 21. № 12. pp. 1742–1747.
3. Reddy L. N., Bert C. W. 1982, «On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials», *ZAMM*, Vol. 62. № 6. pp. 213–219.
4. Jones R. M. 1977, «A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials», *AIAA Journal*, Vol. 15. № 10. pp. 1436–1443.
5. Jones R. M. 1980, «Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material», *AIAA Journal*, Vol. 18. № 8. pp. 995–1001.
6. Jones R. M. 1971, «Buckling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Orthotropic Moduli in Tension and Compression», *AIAA Journal*, Vol. 9. № 5. pp. 917–923.
7. Kregers A. F., Maksimov R. D., Turtsinysh R. P. 1973, «Nonlinear creep of fabric fiberglass under some types of complex stress state», *Mechanics of polymers*, № 2. pp. 212–218.

8. Amelina E. V. 2015, «On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation», *IVT SB RAS: Computational Technologies*, Vol. 20. № 5. pp. 27–52.
9. Kayumov R. A., Lukankin S. A., Paimushin V. N., Kholmogorov S. A. 2015, «Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites», *Scientific Notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences*, Vol. 157. Book 4. pp. 112–132.
10. Shafigullin L. N., Bobrishev A. A., Erofeev V. T., Treshchev A. A., Shafigullina A. N. 2015, «Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts», *International Journal of Applied Engineering Research*, Vol. 10. № 23. pp. 43758–43762.
11. Green A., Adkins J. 1965, *Large elastic deformations and nonlinear mechanics of a continuous medium*, M.: Mir. 456 p.
12. Treschev A. A., Bobrishev A. A., Shafigullin L. N. 2019, «Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law», *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 481. UNSP012014. Doi: 10.1088/1757-899X/481/1/012014. pp. 1–7.
13. Treschev A. A., Romashin D. A. 2011, «Defining relations for nonlinear anisotropic materials sensitive to the type of stress state», *Vestnik Nizhegorodskogo university*, N. Novgorod: Publishing House of the Lobachevsky National Research University. № 4. Part 4. pp. 1740–1742.
14. Treschev A. A. 2017, «Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials», *Fundamental and applied Problems of Engineering and Technology*, № 4-1 (324). pp. 71–74.
15. Kauderer G. 1961, *Nonlinear mechanics*, Moscow: Publishing house of foreign literature. 779 p.
16. Tursunov B. S. 1970, «On the properties of the stress potential of elastic bodies», *AMM*, Vol. 34. Issue 1. pp. 15–22.
17. Rose A. V., Zhigun I. G., Dushin M. N. 1970, «Three-reinforced woven materials», *Mechanics of polymers*, № 3. pp. 471–476.
18. Jones R. M., Nelson D.A.R. 1976, «Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite», *AIAA Journal*, Vol. 14. № 10. pp. 1427–1435.
19. Jones R. M. 1977, «Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression», *AIAA Journal*. Vol. 15. № 1. pp. 16–25.
20. Zolochovsky A. A., Kuznetsov V. N. 1989, «Calculation of anisotropic shells made of different-modulus materials under non-axisymmetric loading», *Dynamics and strength of heavy machines*. Dnepropetrovsk: DSU. pp. 84–92.

Получено 13.07.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.