

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 519.146

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-344-351

Об оценках на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения¹

Н. Н. Авдеев

Авдеев Николай Николаевич — Воронежский государственный университет (г. Воронеж)
e-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Аннотация

Множество точек M на плоскости называется плоским множеством с целочисленными расстояниями, если все расстояния между точками M суть целые числа, и при этом M не содержится ни в какой прямой. Говорят, что плоское множество с целочисленными расстояниями есть множество полуобщего положения, если никакие три его точки не лежат на одной прямой. Известная оценка снизу для плоского множества с целочисленными расстояниями линейна относительно его мощности. Ранее не были известны отдельные оценки снизу на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения заданной мощности (известная конструктивная оценка сверху на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями использует как раз множества полуобщего положения). В статье доказывается надлинейная оценка снизу на диаметр плоского множества с целочисленными расстояниями полуобщего положения (полиномиальная с показателем $5/4$). Доказательство основано на относительно большом количестве лемм и наблюдений, включая результаты Солимоси из статьи, в которой была впервые доказана линейная оценка снизу на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями.

Ключевые слова: комбинаторная геометрия, диаметр множества, множество с целочисленными расстояниями.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

Н. Н. Авдеев. Об оценках на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 344–351.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00197).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 519.146

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-344-351

On diameter bounds for planar integral point sets
in semi-general position

N. N. Avdeev

Avdeev Nikolai Nikolaevich — Voronezh State University (Voronezh).*e-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru*

Abstract

A point set M in the Euclidean plane is said to be a planar integral point set if all the distances between the elements of M are integers, and M is not situated on a straight line. A planar integral point set is said to be a set in semi-general position, if it does not contain collinear triples. The existing lower bound for minimal diameter of a planar integral point set is linear with respect to its cardinality. There were no known special diameter bounds for planar integral point sets in semi-general position of given cardinality (the known upper bound for planar integral point sets is constructive and employs planar integral point sets in semi-general position). We prove a new lower bound for minimal diameter of planar integral point sets in semi-general position that is better than linear (polynomial of power $5/4$). The proof is based on several lemmas and observations, including the ones established by Solymosi to prove the first linear lower bound for diameter of a planar integral point set.

Keywords: combinatorial geometry, diameter of a set, integral point set.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

N. N. Avdeev, 2021, “On diameter bounds for planar integral point sets in semi-general position”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 344–351.

1. Введение

Множеством с целочисленными расстояниями (МЦР) на плоскости называется такое множество точек M , что расстояние (евклидово) между любыми двумя точками из M есть целое число, и при этом M не является подмножеством никакой прямой. Каждое МЦР состоит лишь из конечного числа точек [1, 2]; поэтому мы можем обозначить множество всех множеств из n точек с целочисленными расстояниями через $\mathfrak{M}(2, n)$ (придерживаясь обозначений [3] и в целом для краткости изложения) и естественным образом определить диаметр множества $M \in \mathfrak{M}(2, n)$:

$$\text{diam } M = \max_{A, B \in M} |AB|, \quad (1)$$

где $|AB|$ обозначает обычное (евклидово) расстояние между точками A и B . Через $\#M$ будем обозначать мощность множества M , которая в нашем случае всегда совпадает с количеством точек в M .

Поскольку любое МЦР можно очевидным образом растянуть до множества большего диаметра, интерес представляет в первую очередь минимальный возможный диаметр при заданной мощности множества. Это рассуждение формализуется следующей функцией, введённой в [4, 5]:

$$d(2, n) = \min_{M \in \mathfrak{M}(2, n)} \text{diam } M. \quad (2)$$

Выяснилось, что достаточно просто сконструировать МЦР на плоскости, все точки которого, кроме одной, лежат на некоторой прямой (такие множества называются *веерными*); аналогично — для 2 точек вне прямой (см., напр., [6], где такие множества названы *крабовыми*) и даже для 4 точек вне прямой [7]. Для $9 \leq n \leq 122$ минимальный возможный диаметр МЦР мощности n достигается именно на веерном множестве [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Множество $M \in \mathfrak{M}(2, n)$ есть МЦР полубщего положения, если никакие три точки из M не лежат на одной прямой. Кратко будем писать, что $M \in \mathfrak{M}(2, n)$.*

В [8] приводится конструкция МЦР полубщего положения для любой наперёд заданной мощности; получаемое МЦР содержится в некоторой окружности. Кроме того, в [9] приведена изящная конструкция МЦР M любой наперёд заданной мощности, содержащегося в окружности, для любого возможного количества нечётных расстояний между точками M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Множество $M \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)$ есть МЦР общего положения, если никакие четыре точки из M не лежат на одной окружности. Кратко будем писать, что $M \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)$.*

Остаётся неясным, любую ли мощность может иметь МЦР общего положения; однако, известны [10, 11] примеры МЦР $M \in \mathfrak{M}(2, 7)$.

Очевидно неравенство

$$d(2, n) \leq \bar{d}(2, n) \leq \dot{d}(2, n),$$

где $\bar{d}(2, n) = \min_{M \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)} \text{diam } M$ и $\dot{d}(2, n) = \min_{M \in \mathfrak{M}(2, n)} \text{diam } M$. Выполнено, однако, и более интересное соотношение:

$$c_1 n \leq d(2, n) \leq \bar{d}(2, n) \leq n^{c_2 \log \log n}.$$

Верхняя оценка установлена в [8]. Нижняя оценка впервые была получена в [12]; наибольшее известное значение для c_1 равно $5/11$ (для $n \geq 4$) [13].

Известны некоторые оценки на диаметр МЦР специального вида. В частности, для множеств, в которых достаточно много точек лежит на одной прямой, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. [5, теорема 4] *Для любых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и множества $P \in \mathfrak{M}(2, n)$, в котором не менее n^δ точек лежат на некоторой прямой, существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geq n_0(\varepsilon)$ верно неравенство*

$$\text{diam } P \geq n^{\frac{\delta}{4 \log 2(1+\varepsilon)}} \log \log n. \quad (3)$$

Об оценках на диаметр МЦР, содержащихся в окружности, можно прочесть в [14].

Отдельные случаи МЦР на плоскости также обсуждались в [15, §5.11], [16, §D20], [17], [18]. За обобщением на пространства более высоких размерностей и соответствующими оценками отсылаем читателя к [19, 20].

В настоящей статье мы доказываем отдельную оценку снизу на диаметр множества с целочисленными расстояниями полубщего положения. Требование полубщего положения является существенным для доказательства.

2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся определения и леммы, которые в дальнейшем потребуются для доказательства основного результата.

ЛЕММА 1. [12, наблюдение 1] Пусть стороны треугольника T есть целые числа $a \leq b \leq c$, тогда наименьшая из высот треугольника T не менее $(a - \frac{1}{4})^{1/2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полосой ширины ρ будем называть часть плоскости, заключённую между двумя параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние ρ .

ЛЕММА 2. [21] Пусть треугольник T , наименьшая из высот которого равна ρ , расположен в полосе. Тогда ширина этой полосы не менее ρ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть треугольник T с целыми сторонами $a \leq b \leq c$ лежит в некоторой полосе, тогда ширина этой полосы не менее $(a - \frac{1}{4})^{1/2}$.

ЛЕММА 3. [3, лемма 4]; [13, лемма 2.4] Пусть $M \in \mathfrak{M}(2, n)$ и $\text{diam } M = d$. Тогда M расположено в некотором квадрате со стороной d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. [13, определение 2.5] Будем называть крестом точек M_1 и M_2 и обозначать через $cr(M_1, M_2)$ объединение двух прямых: прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 , и серединного перпендикуляра к отрезку M_1M_2 .

ЛЕММА 4. [13, теорема 3.10] Каждое множество $M \in \mathfrak{M}(2, n)$, для некоторых точек которого $M_1, M_2 \in M$ выполнено равенство $|M_1M_2| = 1$, состоит из $n-1$ точек, включая M_1 и M_2 , лежащих на некоторой прямой t , и ещё одной точки, лежащей вне t на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2 .

ЛЕММА 5. Пусть $\{M_1, M_2, M_3, M_4\} \subset M \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)$ (точки M_2 и M_3 могут совпадать, остальные попарно различны), $n \geq 4$. Тогда $\#M \leq 4 \cdot |M_1M_2| \cdot |M_3M_4|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 5 основана на работе [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $N \in M$ выполнено одно из следующих условий:

- а) N принадлежит $cr(M_1, M_2)$ — итого не более 4 точек (не более 2 на каждой из прямых);
- б) N принадлежит $cr(M_3, M_4)$ — итого не более 4 точек (не более 2 на каждой из прямых);
- с) N принадлежит пересечению одной из $|M_1M_2| - 1$ гипербол с одной из $|M_3M_4| - 1$ гипербол — итого не более $4(|M_1M_2| - 1)(|M_3M_4| - 1)$ точек;

По лемме 4 выполнено $|M_1M_2| \geq 2$ и $|M_3M_4| \geq 2$. Из того, что

$$\begin{aligned} 4(|M_1M_2| - 1)(|M_3M_4| - 1) + 4 + 4 &= 4((|M_1M_2| - 1)(|M_3M_4| - 1) + 2) = \\ &= 4(|M_1M_2| \cdot |M_3M_4| + 1 - |M_1M_2| - |M_3M_4| + 2) = \\ &= 4(|M_1M_2| \cdot |M_3M_4| + (1 - |M_1M_2|) + (2 - |M_3M_4|)) \leq 4|M_1M_2| \cdot |M_3M_4|, \end{aligned} \quad (4)$$

и следует утверждение леммы. $\square$

3. Основной результат

ТЕОРЕМА 2. Для всякого целого $n \geq 3$ выполнено неравенство

$$\bar{d}(2, n) \geq (n/5)^{5/4}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство] Для $n = 3$ имеем $\bar{d}(2, 3) = 1$ (достигается на равностороннем треугольнике со стороной 1), и утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим $M \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)$, $n \geq 4$, $\text{diam } M = p$.

Выберем точки $M_1, M_2, M_3, M_4 \in M$ (точки M_2 и M_3 могут совпадать, остальные должны быть попарно различны) таким образом, что

$$\min_{A, B \in M} |AB| = |M_1 M_2|, \quad (6)$$

$$\min_{A, B \in M \setminus \{M_1\}} |AB| = |M_3 M_4| = m. \quad (7)$$

Если $m \leq p^{2/5}$, то по лемме 5

$$n \leq 4 \cdot |M_1 M_2| \cdot |M_3 M_4| \leq 4p^{4/5}. \quad (8)$$

Или, что то же самое,

$$p \geq (n/4)^{5/4} > (n/5)^{5/4}. \quad (9)$$

Пусть теперь $m > p^{2/5}$. Тогда для любых точек $A, B \in M \setminus \{M_1\}$ выполнено неравенство $|AB| > p^{2/5}$. Согласно следствию 1, никакие три точки из $M \setminus \{M_1\}$ не лежат в полосе шириной $p^{1/5}/2$.

В силу леммы 3 множество M расположено в квадрате со стороной p . Покроем этот квадрат объединением q полос, $2p^{4/5} \leq q < 2p^{4/5} + 1$ так, что ширина каждой полосы не превышает $p^{1/5}/2$. Каждая из полученных полос содержит не более двух точек из $M \setminus \{M_1\}$, поэтому

$$n \leq 2(2p^{4/5} + 1) + 1 = 4p^{4/5} + 3 \leq 5p^{4/5}. \quad (10)$$

Последнее неравенство выполнено в силу того, что $\bar{d}(2, n) \geq 4$ для $n \geq 4$ [5] и $4^{4/5} > 3$. Из неравенства (10) легко получаем, что

$$p \geq (n/5)^{5/4}. \quad (11)$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известен следующий факт [12, следствие 1]:

ЛЕММА 6. Пусть $H \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)$. Тогда минимальное расстояние между точками H не менее $n^{1/3}$.

Применяя аналогичные приёмы, можно получить, что

$$n \leq 3 \frac{\text{diam } H}{n^{1/6}}, \quad (12)$$

откуда выводится оценка

$$\bar{d}(2, n) \geq c_3 n^{7/6}, \quad (13)$$

которая, очевидно, слабее оценки в теореме 2.

4. Заключение

Полученная в данной статье оценка — первая специальная оценка диаметра снизу для множества с целочисленными расстояниями полуобщего положения. Поэтому автор не преследовал цели получить как можно большую константу в теореме 2, предпочитая сохранить ясность и прозрачность доказательства. Очевидно, что в результате более тщательного исследования эта константа может быть увеличена. Кроме того, и верхние, и нижние оценки по-прежнему, увы, остаются далеки от точных.

5. Благодарности

Автор благодарит проф. Е. М. Семёнова и к.ф.-м.н. А. С. Усачёва за обсуждение статьи и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anning N. H., Erdős P. Integral distances // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1945. — т. 51, No 8. — с. 598—600.
2. Erdős P. Integral distances // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1945. — т. 51, No 12. — с. 996.
3. Авдеев Н. Н., Семёнов Е. М. Множества точек с целочисленными расстояниями на плоскости и в евклидовом пространстве // Математический форум (Итоги науки. Юг России). — 2018. — с. 217—236.
4. Kurz S., Laue R. Bounds for the minimum diameter of integral point sets // Australasian Journal of Combinatorics. — 2007. — т. 39. — с. 233—240. — arXiv: 0804.1296.
5. Kurz S., Wassermann A. On the minimum diameter of plane integral point sets // Ars Combinatoria. — 2011. — т. 101. — с. 265—287. — arXiv: 0804.1307.
6. Antonov A. R., Kurz S. Maximal integral point sets over $\mathbb{Z}^2$ // International Journal of Computer Mathematics. — 2008. — т. 87, No 12. — с. 2653—2676. — arXiv: 0804.1280.
7. Huff G. B. Diophantine problems in geometry and elliptic ternary forms // Duke Mathematical Journal. — 1948. — т. 15, No 2. — с. 443—453.
8. Harborth H., Kemnitz A., Möller M. An upper bound for the minimum diameter of integral point sets // Discrete & Computational Geometry. — 1993. — т. 9, No 4. — с. 427—432.
9. Piepmeyer L. The maximum number of odd integral distances between points in the plane // Discrete & Computational Geometry. — 1996. — т. 16, No 1. — с. 113—115.
10. Kreisel T., Kurz S. There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle // Discrete & Computational Geometry. — 2008. — т. 39, No 4. — с. 786—790.
11. Constructing 7-clusters / S. Kurz [и др.] // Serdica Journal of Computing. — 2014. — т. 8, No 1. — с. 47—70. — arXiv: 1312.2318.
12. Solymosi J. Note on integral distances // Discrete & Computational Geometry. — 2003. — т. 30, No 2. — с. 337—342.
13. Avdeev N. On existence of integral point sets and their diameter bounds. // Australasian Journal of Combinatorics. — 2020. — т. 77.1. — с. 100—116. — arXiv: 1906.11926.
14. Bat-Ochir G. On the number of points with pairwise integral distances on a circle // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — т. 254. — с. 17—32.
15. Brass P., Moser W. O., Pach J. Research problems in discrete geometry. — Springer Science & Business Media, 2006.
16. Guy R. Unsolved problems in number theory. т. 1. — Springer Science & Business Media, 2013.

17. Авдеев Н. Н. Об отыскании целоудалённых множеств специального вида // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики - сборник трудов Международной научной конференции. — Научно-исследовательские публикации, 2018. — с. 492—498.
18. Авдеев Н. Н. On integral point sets in special position // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». — 2018. — т. 8. — с. 5—6.
19. Kurz S. On the characteristic of integral point sets in E^m // Australasian Journal of Combinatorics. — 2006. — т. 36. — с. 241. — arXiv: math/0511704.
20. Nozaki H. Lower bounds for the minimum diameter of integral point sets // Australasian Journal of Combinatorics. — 2013. — т. 56. — с. 139—143.
21. Смуров М., Спивак А. Покрывтия полосками // Квант. — 1998. — No 5. — с. 6.

REFERENCES

1. Anning, N.H. & Erdős, P. 1945. "Integral distances". *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 51.8, pp. 598—600. doi: 10.1090/S0002-9904-1945-08407-9
2. Erdős, P. 1945. "Integral distances". *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 51.12, p. 996. doi: 10.1090/S0002-9904-1945-08490-0
3. Avdeev, N.N. & Semenov, E.M. 2018. "Mnozhestva toчек c tselochislennymi rasstoyaniyami na ploskosti i v evklidovom prostranstve" ("Integral point sets on the plane and in Euclidean space") *Matematicheskiiy forum (Itogi nauki. Yug Rossii)*, pp. 217—236.
4. Kurz, S. & Laue, R. 2007. "Bounds for the minimum diameter of integral point sets". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 39, pp. 233—240. arXiv: 0804.1296.
5. Kurz, S. & Wassermann, A. 2011. "On the minimum diameter of plane integral point sets". *Ars Combinatoria*, vol. 101, pp. 265—287. arXiv: 0804.1307.
6. Antonov, A.R. & Kurz, S. 2008. "Maximal integral point sets over Z^2 ". *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87.12, pp. 2653—2676. arXiv: 0804.1280. doi: 10.1080/00207160902993636
7. Huff, G.B. 1948. "Diophantine problems in geometry and elliptic ternary forms". *Duke Mathematical Journal*, vol. 15.2, pp. 443—453. doi:10.1215/S0012-7094-48-01543-9
8. Harborth, H., Kemnitz, A. & Möller, M. 1993. "An upper bound for the minimum diameter of integral point sets". *Discrete & Computational Geometry* vol. 9.4, pp. 427—432. doi: 10.1007/bf02189331
9. Piepmeyer, L. 1996. "The maximum number of odd integral distances between points in the plane". *Discrete & Computational Geometry*, vol. 16.1, pp. 113—115. doi: 10.1007/bf02711135
10. Kreisel, T. & Kurz, S. 2008. "There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle". *Discrete & Computational Geometry*, vol. 39.4, pp. 786—790. doi: 10.1007/s00454-007-9038-6

11. Kurz, S., Noll, L.C., Rathbun, R., & Simmons, C. 2014. "Constructing 7-clusters". *Serdica Journal of Computing*, vol. 8.1, pp. 47–70. arXiv: 1312.2318.
12. Solymosi, J. 2003. "Note on integral distances". *Discrete & Computational Geometry*, vol. 30.2, pp. 337–342. doi: 10.1007/s00454-003-0014-7
13. Avdeev, N. N. 2019. "On existence of integral point sets and their diameter bounds". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 77.1, pp. 100–116. arXiv: 1906.11926
14. Bat-Ochir, G. 2018. "On the number of points with pairwise integral distances on a circle". *Discrete Applied Mathematics*, vol. 254, pp. 17–32. doi: 10.1016/j.dam.2018.07.004
15. Brass, P., Moser, W.O.J. & Pach, J. 2006. *Research problems in discrete geometry*. Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/0-387-29929-7
16. Guy, R. 2013. *Unsolved problems in number theory*. Vol. 1. Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-1-4757-1738-9
17. Avdeev, N.N. 2018. "Ob otyskanii tseloudalennykh mnozhestv spetsial'nogo vida" ("On the search of integral point sets of a special type"). *Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki - sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii*. (Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics - proc. of the int. conf.). Voronezh, pp. 492–498.
18. Avdeev, N.N. 2018. "On integral point sets in special position". *Nekotorye voprosy analiza, algebry, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* (Some problems of analysis, algebra, geometry and mathematical education), vol. 8, pp. 5–6.
19. Kurz, S. 2006. "On the characteristic of integral point sets in E^m ". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 36, pp. 241–248. arXiv: math/0511704.
20. Nozaki, H. 2013. "Lower bounds for the minimum diameter of integral point sets". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 56, pp. 139–143.
21. Smurov, M. & Spivak, A. 1998. "Pokrytiya poloskami" ("Covering by strips"). *Kvant*, vol. 5, pp. 6–12.

Получено 02.11.19 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.