ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-289-305

Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств[1]

В. М. Чикин

Чикин Владимир Максимович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва)
e-mail: chikinvm@gmail.com

Аннотация

Настоящая работа посвящена изучению однопараметрических деформаций метрик. Мы предполагаем наличие непрерывности длин кривых при изменении параметра, и изучаем дополнительные условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний. Мы отталкиваемся от наличия непрерывности длин кривых, поскольку это удобно на практике – из непрерывной зависимости римановой или финслеровой метрики от параметра очевидно вытекает непрерывность длин кривых, и чтобы получить непрерывность функции расстояния, достаточно проверить выполнение определенных условий. Мы предполагаем наличие функционалов длины, непрерывно зависящих от параметра, и рассматриваем внутренние метрики, порожденными этими функционалами длины. В работе показывается, что компактности пространства и непрерывности длин кривых при изменении параметра не достаточно для непрерывности расстояний, и приводится соответствующий пример. Помимо этого, мы приводим специальные условия, которых достаточно для непрерывности расстояний в совокупности с ограниченной компактностью пространства. В качестве приложения, мы рассматриваем финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. Мы показываем, что на компактных финслеровых многообразиях выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, из чего следует, что функция расстояния на таких многообразиях также непрерывно зависит от параметра. Последний результат обобщается на полные финслеровы многообразия. Поскольку финслеровы многообразия являются обобщением римановых многообразий, в качестве следствия мы получаем, что на компактных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, а также получаем, что на полных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, расстояния между точками непрерывно зависят от этого параметра.

Ключевые слова: функционал длины, ограниченно компактное метрическое пространство, внутренняя метрика, финслерова метрика.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. М. Чикин. Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 289–305.

[1]Исследование выполнено в МГУ имени М.В.Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00355).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-289-305

The relation between the continuity of the lengths of curves and the continuity of distances in the case of boundedly compact metric spaces

V. M. Chikin

Chikin Vladimir Maksimovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chikinvm@gmail.com

Abstract

This work is devoted to the study of one-parameter deformations of metrics. We assume that the lengths of curves are continuous when the parameter changes, and we study additional conditions that will be sufficient for the continuity of the distances. We start from the presence of the continuity of the lengths of curves, since it is convenient in practice — the continuous dependence of the Riemannian or Finsler metric on the parameter obviously implies the continuity of the lengths of curves, and to obtain the continuity of the distance, it is enough to check the fulfillment of certain conditions. It is shown in the paper that the compactness of space and the continuity of the lengths of curves when changing the parameter is not enough for the continuity of the distances, and an example is given. In addition, we give special conditions, which are sufficient for the continuity of the distances in combination with the boundedly compactness of the space. As an application, we consider Finsler manifolds whose metrics continuously depend on a parameter. We show that sufficient conditions for the continuity of the distance are satisfied on compact Finsler manifolds, from which it follows that the distance function on such manifolds also continuously depends on the parameter. The last result is generalized to complete Finsler manifolds. Since Finsler manifolds are a generalization of Riemannian manifolds, as a corollary we obtain similar results for Riemannian manifolds.

Keywords: length function, boundedly compact metric space, intrinsic metric, Finsler metric.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. M. Chikin, 2021, "The relation between the continuity of the lengths of curves and the continuity of distances in the case of boundedly compact metric spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 289–305.

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению связи непрерывности изменения длин кривых с непрерывностью изменения расстояний между точками при однопараметрических деформациях метрик. Мы изучаем дополнительные к непрерывности длин кривых условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний. Мы отталкиваемся от наличия непрерывности длин кривых, поскольку это удобно на практике — из непрерывной зависимости римановой или финслеровой метрики от параметра очевидно вытекает непрерывность длин кривых, и чтобы получить непрерывность функции расстояния, достаточно проверить выполнение определенных условий. В свою очередь, из возникающей непрерывной зависимости расстояний от параметра вытекают полезные следствия, например, непрерывная зависимость от параметра длин минимальных параметрических деревьев в полных метрических пространствах [1].

В настоящей работе рассматриваются топологические пространства, на которых задан функционал длины. Как известно, функционал длины задается классом допустимых кривых, длины которых можно измерять, и длиной — соответствием, которое приписывает неотрицательное число каждой кривой из этого класса. Имея функционал длины, можно определить внутреннюю метрику, индуцированную этой структурой. В этом случае расстояние между любыми двумя точками будет равно точной нижней грани длин допустимых кривых, соединяющих эти точки. Внутренние метрики подробно изучены, см. [2], [3], [4], [5], [6]. В работе [1] приводится пример не ограниченно компактного пространства и однопараметрического семейства функционалов длины на нем, такого, что все метрики соответствующего семейства внутренних метрик задают одну и ту же топологию и длины допустимых кривых непрерывно зависят от параметра, но при этом функция расстояния не является непрерывно зависящей от параметра. Тем самым показывается, что непрерывности длин допустимых кривых не достаточно для непрерывности расстояний. В работе [1] приводится специальное условие глобального характера, выполнения которого в совокупности с непрерывностью длин допустимых кривых достаточно для непрерывности расстояний. Возникает вопрос — каких естественных свойств метрических пространств достаточно для непрерывности расстояния? Достаточно ли ограниченной компактности в совокупности с непрерывностью длин допустимых кривых?

В настоящей работе показывается, что в случае однопараметрического семейства функционалов длины даже компактности в совокупности с непрерывностью длин допустимых кривых не достаточно для непрерывности расстояний. Мы приводим пример компактного пространства и однопараметрического семейства функционалов длины на нем, такого, что все метрики соответствующего семейства внутренних метрик задают одну и ту же топологию, длины допустимых кривых непрерывно зависят от параметра, но при этом функция расстояния не является непрерывно зависящей от параметра. Мы формулируем специальные условия, накладываемые на семейство функционалов длины, и показываем, что выполнения этих условий в совокупности с ограниченной компактностью пространства достаточно для непрерывной зависимости расстояний от параметра.

В качестве приложения, мы рассматриваем финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. Первое обобщение римановой геометрии принадлежит Финслеру [7], который заменил квадрат элемента длины дуги кривой произвольной однородной функцией от дифференциалов локальных координат точки. Некоторые вопросы финслеровой геометрии рассматривались и в работе Нётер [8]. Подробное изучение финслеровой геометрии можно найти, например, в [9], [10], [11], [12], [13]. В данной работе мы показываем, что в случае непрерывной зависимости финслеровой метрики от параметра на компактном многообразии выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, из чего следует, что функция расстояния на этом многообразии также непрерывно зависит от этого параметра. Последний результат обобщается на полные финслеровы многообразия. Поскольку финслеровы многообразия являются обобщением римановых многообразий, в качестве следствия мы получаем аналогичные результаты для римановых многообразий. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А. Тужилину, профессору А.О. Иванову и профессору Е.О. Степанову за плодотворные обсуждения.

2. Определения и предварительные результаты

Определим необходимые объекты и перечислим их известные свойства, основываясь на теории функционалов длины из [2]. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, а l_t, $t \in [0, 1]$, — семейство функционалов длины, заданное на нем. Наличие функционала длины подразумевает фиксацию в пространстве X некоторого класса допустимых кривых, на которых определен функционал длины. Класс допустимых кривых содержится во множестве всех непрерывных кривых в X и должен быть замкнутым относительно сужений и склейки кривых, а также относительно замен параметра специального типа. Для каждого естественного класса допустимых кривых имеется свой собственный класс допустимых замен параметра. Например, для класса всех непрерывных путей это гомеоморфизмы, для класса кусочно-гладких путей — диффеоморфизмы. По определению требуется лишь, чтобы класс допустимых замен параметра включал в себя все линейные функции. Различные примеры функционалов длины и соответствующих классов допустимых кривых рассмотрены в [2].

Будем считать, что все функционалы семейства l_t, $t \in [0,1]$, определены на одном и том же классе допустимых кривых. Также будем считать, что для любой допустимой кривой γ ее длина $l_t(\gamma)$ конечна и непрерывно зависит от t. Для каждого значения $t \in [0,1]$ определим на X внутреннюю метрику ρ_t, порожденную функционалом длины l_t. Напомним, что в этом случае расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками A и B из пространства X равно точной нижней грани длин $l_t(\gamma)$ всех допустимых кривых γ, соединяющих точки A и B. Будем считать, что при каждом $t \in [0,1]$ для любых двух точек пространства X существует соединяющая их допустимая кривая конечной длины, что означает конечность всех метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$. В свою очередь, каждая из метрик ρ_t индуцирует функционал длины $\hat{l}_t$, классом допустимых кривых которого являются все непрерывные кривые относительно метрики ρ_t, а длина $\hat{l}_t(\gamma)$ каждой кривой γ определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую, см. [2]:

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1 A_2 \dots A_n \subset \gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i, A_{i+1}).$$

Хорошо известно, что функционал длины $\hat{l}_t$ определен на любой допустимой кривой конечной длины и не превосходит на ней функционала длины l_t. Напомним, что функционал длины l называется *полунепрерывным снизу* на пространстве допустимых кривых, если поточечная сходимость последовательности допустимых кривых γ_i к допустимой кривой γ влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} l(\gamma_i) \geqslant l(\gamma)$. Хорошо известно, что функционал длины, индуцированный некоторой метрикой, является полунепрерывным снизу на пространстве непрерывных относительно этой метрики кривых. Также хорошо известно, что если функционал длины l является полунепрерывным снизу на пространстве своих допустимых кривых, то на всех допустимых кривых он совпадает с функционалом длины $\hat{l}$, индуцированным внутренней метрикой ρ, которая была порождена изначальным функционалом длины l. Доказательство этих утверждений можно найти в [2]. Таким образом, если при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых, то при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t совпадает с функционалом $\hat{l}_t$ на всех допустимых для функционала l_t кривых.

В дальнейшем будем считать, что все метрики семейства ρ_t, $t \in [0,1]$, эквивалентны, то есть для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ найдутся положительные числа C_1 и C_2 такие, что имеет место неравенство $C_1\rho_{t_1} \leqslant \rho_{t_2} \leqslant C_2\rho_{t_1}$. Из этого следует, что все метрики семейства ρ_t определяют одну и ту же топологию на X. Это означает, что множество непрерывных относительно метрики кривых не меняется при переходе от одной метрики семейства ρ_t к другой. Хорошо известно, что топология индуцированной внутренней метрики может быть разве лишь тоньше, чем изначальная топология X, см. [2]. Другими словами, любое открытое множество в изначальной топологии X является открытым и в топологии построенных внутренних метрик. Также хорошо известно, что все допустимые для функционалов длины l_t кривые конечной длины непрерывны относительно внутренних метрик семейства ρ_t, см. [2]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если последовательность кривых сходится поточечно в одной из метрик семейства ρ_t, то она сходится поточечно в каждой из метрик семейства ρ_t, а также относительно изначальной топологии пространства X.*

Доказательство. Все метрики семейства ρ_t определяют на X одну и ту же топологию, не менее тонкую, чем изначальная топология пространства X. Из этого следует, что если последовательность точек сходится в одной из метрик семейства ρ_t, то она сходится в каждой из метрик семейства ρ_t, и каждая окрестность предела последовательности в топологии внутренних метрик содержит все точки последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа. Таким образом, из того, что любое открытое множество в изначальной топологии X является открытым и в топологии построенных внутренних метрик, следует, что данная последовательность точек также сходится и в изначальной топологии пространства X, что, в свою очередь, влечет требуемое утверждение. $\square$

Далее, под сходимостью последовательностей кривых будем иметь в виду поточечную сходимость относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$. Отметим, что сходящаяся последовательность допустимых кривых, вообще говоря, не обязана сходиться к допустимой кривой, и даже к кривой, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t. Сформулируем специальные условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение 1. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа 1, если при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых.*

Определение 2. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа 2, если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, из того, что последовательность чисел $l_{t_n}(\gamma_n)$ ограничена, следует, что последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n)$ тоже ограничена.*

Из эквивалентности метрик семейства ρ_t следует, что X должно быть ограниченно компактно или же нет относительно всех метрик семейства ρ_t одновременно. В работе [1] приводится пример однопараметрического семейства функционалов длины l_t на топологическом пространстве X, для которого выполнены перечисленные выше условия, любые две метрики из соответствующего семейства внутренних метрик ρ_t эквивалентны, семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1 и 2, но расстояние между некоторыми точками разрывно по t. В этом примере метрические пространства (X, ρ_t) не являются ограниченно компактными. Далее мы покажем, что в случае ограниченно компактных, и даже компактных метрических пространств перечисленных выше условий не достаточно для непрерывности функции расстояния. Сформулируем еще два условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t. В дальнейшем мы покажем, что в совокупности с некоторыми из предыдущих условий эти условия являются достаточными для непрерывной зависимости функции расстояния от параметра.

Определение 3. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа 3, если для любой сходящейся последовательности допустимых кривых γ_n такой, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено следующее соотношение: $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Определение 4. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа 4, если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, сходящейся к некоторой кривой γ_0, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$.*

Утверждение 2. *Из определения семейства функционалов длины типа* 3 *вытекает условие непрерывности по* t *длины каждой допустимой кривой.*

Доказательство. Для фиксированной допустимой кривой γ рассмотрим последовательность кривых $\gamma_n = \gamma, n \in \mathbb{N}$. Данная последовательность сходится, и применение к ней условия из определения семейства типа 3 дает непрерывность длины $l_t(\gamma)$ кривой γ по t. $\square$

Напомним понятие Г-сходимости функционалов. Понятие Г-сходимости было введено Эннио де Джорджи в серии работ [14], [15], [16]. Подробный обзор теории, связанной с Г-сходимостью, можно найти в [17] и [18]. Пусть S — топологическое пространство. Напомним, что функционал $f_0 : S \to [0, +\infty)$ называется *асимптотической нижней гранью* последовательности функционалов $f_n : S \to [0, +\infty)$, если для любой последовательности $s_n \in S$ такой, что $s_n \to s_0 \in S$ при $n \to \infty$, выполнено $\liminf_{n\to\infty} f_n(s_n) \geqslant f_0(s_0)$. При этом, если для любого $s_0 \in S$ существует последовательность $s_n \in S$, сходящаяся к s_0, такая, что $\limsup_{n\to\infty} f_n(s_n) \leqslant f_0(s_0)$, то эта нижняя грань называется *точной*. Последовательность функционалов f_n называется Г-*сходящейся к функционалу* f_0, если f_0 является асимптотической нижней гранью последовательности f_n, и эта нижняя грань является точной. В случае функционалов длины пространство S является пространством кривых, на котором определены функционалы. Выберем в качестве него пространство всех кривых, непрерывных относительно метрик семейства ρ_t. Отметим, что определение семейств функционалов типа 4 напоминает понятие Г-сходимости функционалов. Сформулируем еще два условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение 5. *Будем называть семейство функционалов длины* l_t *семейством типа* 5, *если для любых чисел* t_n *таких, что* $t_n \to t_0$ *при* $n \to \infty$, *функционал* $\hat{l}_{t_0}$ *является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов* $\hat{l}_{t_n}$.

Определение 6. *Будем называть семейство функционалов длины* l_t *семейством типа* 6, *если при фиксированной сходящейся последовательности кривых* γ_n *и фиксированном числе* $t_0 \in [0, 1]$ *величины* $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n)$ *равны для различных последовательностей чисел* t_n, *сходящихся к* t_0 *при* $n \to \infty$.

Утверждение 3. *Семейство функционалов длины типов* 1 *и* 5 *является семейством функционалов длины типа* 4.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и последовательность допустимых кривых γ_n, сходящуюся к некоторой кривой γ_0. По условию, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$, и, следовательно, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. Это неравенство равносильно неравенству $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$, поскольку значения функционалов $\hat{l}_{t_n}$ и l_{t_n} совпадают на допустимых кривых в силу того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1. Это означает, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 4. $\square$

Утверждение 4. *Семейство функционалов длины типа* 6 *является семейством функционалов длины типа* 5.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и последовательность кривых γ_n, сходящуюся к некоторой кривой γ_0. Из условия следует, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) = \liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_0}(\gamma_n)$. При этом, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является полунепрерывным снизу на пространстве кривых, непрерывных относительно внутренних метрик семейства ρ_t, как функционал, индуцированный внутренней метрикой. Из этого следует, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_0}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. В результате, мы получаем, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$, что означает, что функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$. $\square$

Таким образом, если от семейства функционалов длины l_t типа 1 потребовать, чтобы для любых чисел t_n, стремящихся к t_0 при $n \to \infty$, функционал $\hat{l}_{t_0}$ являлся Γ-пределом последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$, то это семейство будет являться семейством типа 4. При этом, требование точности нижней грани в определении Γ-сходимости является избыточным. Как мы покажем далее, из этого следует, что требования такой Γ-сходимости в совокупности с некоторыми базовыми условиями было бы достаточно для непрерывной зависимости функции расстояния от параметра.

3. Пример разрывного расстояния при наличии непрерывности длин кривых в случае компактного пространства

Утверждение 5. *Существуют хаусдорфово топологическое пространство X и однопараметрическое семейство функционалов длины l_t на нем, $t \in [0,1]$, такие, что*

- *все метрики соответствующего семейства внутренних метрик ρ_t эквивалентны,*
- *для любого $t \in [0,1]$ пространства (X, ρ_t) компактны и линейно связны,*
- *длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от параметра t,*
- *семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1 и 2,*
- *семейство функционалов длины l_t не является семейством типов 3 и 4,*
- *расстояние $\rho_t(A,B)$ разрывно по t между некоторой парой точек A и B.*

Доказательство. Пусть X — двумерная сфера, половина большой окружности которой равна 3, ρ_0 – стандартная внутренняя метрика на ней, A и B – диаметрально противоположные точки, и $\rho_0(A,B) = 3$. Рассмотрим последовательность различных кратчайших геодезических $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, соединяющих A и B, монотонно сходящуюся к некоторой кратчайшей геодезической γ_0, отличной от всех γ_k. Обозначим через Ω множество сферических ломаных относительно метрики ρ_0, образованных конечными наборами сферических отрезков, не лежащих на γ_0. Определим на X семейство функционалов длины $l_t, t \in [0,1]$, с классом допустимых кривых Ω. Пусть длина l_t сферического отрезка $\gamma \in \Omega$, образ которого целиком лежит в образе $\operatorname{Im} \gamma_k$ некоторой кривой γ_k, равна $l_t(\gamma) = \frac{1}{3}(2+\cos(kt))l_0(\gamma)$, где $l_0(\gamma)$ — длина сферического отрезка γ, посчитанная относительно метрики ρ_0. Ясно, что $l_t(\gamma_k) = (2+\cos(kt))$. Для сферических отрезков, не лежащих ни на каких γ_k, определим длину l_t независимой от t и равной длине, посчитанной относительно метрики ρ_0. Далее, длину l_t любой сферической ломаной из Ω определим по аддитивности.

Для удобства, множество кривых, соединяющих A и B, будем обозначать $\{\gamma : A \sim B\}$. Имея длины l_t всех кривых $\gamma \in \Omega$ при каждом $t \in [0,1]$, для каждой пары точек A, B определим $\rho_t(A,B)$ как точную нижнюю грань длин l_t кривых $\gamma \in \Omega$, соединяющих A и B: $\rho_t(A,B) = \inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim B} l_t(\gamma)$. Заметим, что определенная таким образом функция ρ_0 совпадает с метрикой ρ_0, введенной ранее. Покажем, что при каждом $t \in [0,1]$ построенная функция ρ_t — метрика на X. Симметричность и положительно определенность очевидны. Для любых трех точек $A, B, C \in X$ сумма $\rho_t(A,B) + \rho_t(B,C)$ равна сумме

$$\inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim B} l_t(\gamma) + \inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:B\sim C} l_t(\gamma),$$

что равно $\inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым $\gamma \in \Omega, \gamma : A \sim C$, проходящим через B. Последняя величина, в свою очередь, больше либо равна $\inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim C} l_t(\gamma) = \rho_t(A, C)$, из чего следует неравенство треугольника для ρ_t.

Из определения семейства функционалов длины l_t следует, что для любых $\gamma \in \Omega$ и $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\frac{l_0(\gamma)}{3} \leqslant l_t(\gamma) \leqslant l_0(\gamma)$, откуда следует, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2. Также это означает, что при каждом $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство $\frac{\rho_0}{3} \leqslant \rho_t \leqslant \rho_0$, откуда следует эквивалентность любых двух метрик семейства ρ_t. При этом, из того, что метрическое пространство (X, ρ_0) является компактным, следует, что для любого $t \in [0, 1]$ метрические пространства (X, ρ_t) компактны, поскольку они обладают той же самой топологией. Линейная связность метрических пространств (X, ρ_t) очевидна. Для каждой кривой $\gamma \in \Omega$ функция $l_t(\gamma)$ равна конечной сумме длин l_t сферических отрезков. По построению эти длины непрерывно зависят от t, в результате чего функция $l_t(\gamma)$ непрерывно зависит от t для каждой допустимой кривой γ.

Пусть $\gamma \in \Omega$ — сферический отрезок, который полностью лежит на геодезической γ_m из последовательности $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, и не содержит точек A и B, а $A_1A_2 \ldots A_n$ — вписанная в γ ломаная. Через d обозначим точную нижнюю грань расстояний ρ_0 между точками образа кривой γ и точками образов кривых из последовательности γ_k, отличных от γ_m. Как известно, кривая γ_m не является предельной для множества остальных кривых из последовательности γ_k, а потому из замкнутости образов кривых γ_k и кривой γ следует, что d положительно.

Будем считать, что размер звеньев ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ не превосходит d в метрике ρ_0. Обозначим подотрезок отрезка γ между A_i и A_{i+1} через γ' и зафиксируем произвольное $t \in [0, 1]$. Отметим, что $l_t(\gamma') \leqslant l_0(\gamma') = \rho_0(A_i, A_{i+1}) \leqslant d$. Длина l_t каждой допустимой кривой, которая соединяет A_i и A_{i+1} и имеет общие точки с другими геодезическими из последовательности γ_k, больше d. Из того, что $l_t \leqslant l_0$, а также из того, что для сферических отрезков, не лежащих ни на каких γ_k, длины l_t и l_0 равны, следует, что длина l_t каждой допустимой кривой, которая соединяет A_i и A_{i+1} и не имеет общих точек с другими геодезическими из последовательности γ_k, не превосходит $l_t(\gamma')$. Таким образом, длина каждого звена $\rho_t(A_i, A_{i+1})$ будет равна длине l_t подотрезка γ между A_i и A_{i+1} при каждом $t \in [0, 1]$. Из аддитивности длины l_t следует, что

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1A_2\ldots A_n\subset\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i, A_{i+1}) = l_t(\gamma).$$

Случай, в котором сферический отрезок $\gamma \in \Omega$ полностью лежит на одной из геодезических последовательности γ_k, и может содержать точки A и B, получается из предыдущего случая предельным переходом.

Пусть $\gamma \in \Omega$ — сферический отрезок, не пересекающийся даже по своему концу ни с одной кривой $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, а также с кривой γ_0. Пусть также $A_1A_2 \ldots A_n$ — вписанная в γ ломаная. Аналогично, через d обозначим точную нижнюю грань расстояний ρ_0 между точками образа кривой γ и точками образов кривых $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, и кривой γ_0. Из замкнутости образов кривых γ_k, γ_0 и γ следует, что d положительно. При размере звеньев ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ меньшем, чем d, длина каждого звена $\rho_t(A_i, A_{i+1})$ будет равна $\rho_0(A_i, A_{i+1})$, в связи с чем длина $\hat{l}_t(\gamma)$ будет равна $l_0(\gamma)$, которая, в свою очередь, на таком сферическом отрезке по построению равна $l_t(\gamma)$. Случай, когда сферический отрезок $\gamma \in \Omega$ пересекается с некоторой $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, или с γ_0 только по своему концу, получается из предыдущего случая предельным переходом. Совпадение $\hat{l}_t$ и l_t на остальных кривых из Ω следует из аддитивности функционала длины.

Таким образом, при каждом $t \in [0, 1]$ значения функционалов l_t и $\hat{l}_t$ совпадают на всех кривых из класса Ω. При этом, при каждом $t \in [0, 1]$ функционал $\hat{l}_t$ является полунепрерывным снизу на пространстве непрерывных относительно ρ_0 кривых, как функционал длины, порожденный внутренней метрикой ρ_t, эквивалентной ρ_0. Это означает, что сходимость последовательности кривых γ_i к кривой γ влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} \hat{l}(\gamma_i) \geqslant \hat{l}(\gamma)$. В частности, сходимость последовательности кривых γ_i из Ω к кривой γ из Ω влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} l(\gamma_i) \geqslant l(\gamma)$, поскольку все кривые из Ω являются непрерывными относительно ρ_0, и на них значения функционалов l_t и $\hat{l}_t$ совпадают при каждом $t \in [0,1]$. В результате, мы показали, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1.

По построению, последовательность геодезических γ_k является сходящейся к γ_0 последовательностью допустимых кривых, где γ_0 — непрерывная относительно ρ_0 кривая, не содержащаяся в классе допустимых кривых. Рассмотрим последовательность чисел $t_n = \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}$, которая сходится к $t_0 = 0$ при $n \to \infty$:

$$l_{t_n}(\gamma_n) - l_0(\gamma_n) = \left(2 + \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right)\right) - 3 = 1 - 3 = -2 \not\to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, семейство функционалов длины l_t не является семейством типа 3. Более того, $l_{t_n}(\gamma_n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а потому величина $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n)$ равна 1. Таким образом, неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_0(\gamma_0)$ не выполнено, поскольку величина $\hat{l}_0(\gamma_0)$ равна 3, следовательно, семейство функционалов длины l_t не является семейством типа 4. Заметим также, что $\rho_{t_n}(A,B) \leqslant l_{t_n}(\gamma_n) = 1$, но $\rho_0(A,B) = 3$, из чего следует, что расстояние между точками A и B разрывно по t при $t = 0$. □

Следствие 1. *Требования непрерывной зависимости от t длин всех допустимых кривых и принадлежности семейства функционалов длины семействам типов 1 и 2 недостаточно для непрерывной зависимости внутренней метрики ρ_t от параметра t в случае компактности (X, ρ_t) при каждом $t \in [0,1]$.*

Следствие 2. *Семейство функционалов длины типов 1 и 2 не обязательно является семейством типа 3 или типа 4 в случае непрерывной зависимости от t длин всех допустимых кривых и компактности (X, ρ_t) при каждом $t \in [0,1]$.*

4. Достаточные условия для непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных пространств с внутренней метрикой

Как и ранее, мы предполагаем, что все метрики семейства ρ_t эквивалентны и конечны, а длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от t.

Теорема 1. *Расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ полунепрерывно сверху по t.*

Доказательство. Рассматриваемые метрики ρ_t внутренние, следовательно, имеет место равенство $\rho_t(A,B) = \inf_\gamma l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем допустимым кривым γ, соединяющим A и B. Докажем полунепрерывность $\rho_t(A,B)$ сверху в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется соединяющая точки A и B кривая γ, удовлетворяющая неравенству $|l_{t_0}(\gamma) - \rho_{t_0}(A,B)| < \varepsilon/2$. В свою очередь, из того, что длина $l_t(\gamma)$ этой кривой непрерывно зависит от t, следует существование $\delta > 0$ такого, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство $|l_t(\gamma) - l_{t_0}(\gamma)| < \varepsilon/2$. В результате, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ будет выполнено

$$\rho_t(A,B) = \inf_\gamma l_t(\gamma) \leqslant l_t(\gamma) < l_{t_0}(\gamma) + \varepsilon/2 < \rho_{t_0}(A,B) + \varepsilon,$$

что и означает полунепрерывность сверху. □

Теорема 2. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 3. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Полунепрерывность расстояния по t сверху вытекает из теоремы 1. Пусть полунепрерывности расстояния по t снизу нет, тогда существуют $\varepsilon > 0$, числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и точки $A, B \in X$ такие, что $\rho_{t_n}(A,B) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность допустимых кривых γ_n, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A,B) < \varepsilon/2$, и, следовательно, $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2 = C_1$. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2, следует, что существует число $C_2 > 0$, для которого $l_{t_0}(\gamma_n) < C_2$ при любом $n \in \mathbb{N}$. В метрике ρ_{t_0} рассмотрим замкнутый шар K с центром в точке A и радиусом C_2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ образ кривой γ_n полностью лежит в шаре K, поскольку ее длина $l_{t_0}(\gamma_n)$ меньше C_2. В силу ограниченной компактности (X, ρ_{t_0}) шар K является компактом в метрике ρ_{t_0}, в связи с чем из теоремы Арцела-Асколи следует, что из последовательности кривых γ_n в компакте K можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой кривой γ_0, соединяющей точки A и B. Кривая γ_0 является непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, но не обязательно является допустимой. Перейдем к этой подпоследовательности – для каждой кривой из нее неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ останется верным.

Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1, следует, что при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых, и, следовательно, при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t совпадает с функционалом $\hat{l}_t$ на всех допустимых для функционала l_t кривых. В свою очередь, при каждом $t \in [0,1]$ функционал $\hat{l}_t$ является полунепрерывным снизу на пространстве кривых, непрерывных относительно метрики ρ_t, как функционал длины, порожденный внутренней метрикой ρ_t. Это означает, что найдется $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > n_1$ выполнено неравенство $\hat{l}_{t_0}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/8$. Учитывая, что для каждого $t \in [0,1]$ функционалы l_t и $\hat{l}_t$ совпадают на всех допустимых кривых, мы получаем, что при $n > n_1$ выполнено неравенство $l_{t_0}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/8$. При этом, из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 3, следует, что найдется $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > n_2$ выполнено неравенство $|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| < \varepsilon/8$. Из этого следует, что при $n > \max(n_1, n_2)$ выполнено неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/4$, но $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$, откуда $\hat{l}_{t_0}(\gamma_0) < C_1 + \varepsilon/4 < \rho_{t_0}(A,B)$ — противоречие. Полунепрерывность расстояния снизу показана. □

Теорема 3. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 2 и 4. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Полунепрерывность расстояния по t сверху вытекает из теоремы 1. Пусть полунепрерывности расстояния по t снизу нет, тогда существуют $\varepsilon > 0$, числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и точки $A, B \in X$ такие, что $\rho_{t_n}(A,B) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность допустимых кривых γ_n, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A,B) < \varepsilon/2$, и, следовательно, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2 = C_1$. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2, следует, что существует число $C_2 > 0$ такое, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C_2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично доказательству теоремы 2, рассмотрим в метрике ρ_{t_0} замкнутый шар с центром в точке A и радиусом C_2, который является компактом в силу ограниченной компактности (X, ρ_{t_0}) и содержит образы всех кривых из последовательности γ_n. По теореме Арцела-Асколи мы можем перейти от последовательности γ_n к ее подпоследовательности, сходящейся к некоторой кривой γ_0. Кривая γ_0 является непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, но не обязательно является допустимой. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 4, следует, что выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. При этом, $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $\hat{l}_{t_0}(\gamma_0) \leqslant C_1 = \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2$ — противоречие. Полунепрерывность расстояния снизу показана. □

Теорема 4. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 5. Тогда расстояние $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения 3 и теоремы 3. □

Теорема 5. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 6. Тогда расстояние $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения 4 и теоремы 4. □

5. Непрерывность расстояний в случае полных финслеровых и римановых многообразий

Рассмотрим k-мерное компактное связное гладкое многообразие M с заданой на его касательном расслоении TM функцией $F_t(x, \xi), x \in M, \xi \in T_xM$, которая является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$ и непрерывно зависит от параметра t. Как известно, при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ функция $F_t(x, \xi)$ является гладкой функцией на $TM \setminus \{0\}$ и положительно однородной функцией по ξ: $F_t(x, \lambda\xi) = \lambda F_t(x, \xi)$ для любых $\lambda > 0$ и $\xi \neq 0$. Мы будем рассматривать финслеровы метрики, которые являются нормами на касательных пространствах T_xM для всех $x \in M$. Для каждого $t \in [0,1]$ финслерова метрика $F_t(x, \xi)$ определяет функционал длины, классом допустимых кривых которого является класс кусочно-гладких кривых. Для удобства мы будем рассматривать кривые, параметризованные отрезком $[0,1]$. Длина кусочно-гладкой кривой $\gamma : [0,1] \to M$ в финслеровой метрике $F_t(x, \xi)$ равна

$$l_t(\gamma) = \int_0^1 F_t(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Легко показать, что длина каждой кусочно-гладкой кривой в финслеровой метрике F_t непрерывно зависит от t. Действительно, достаточно рассмотреть разбиение кривой на последовательные кривые, образы которых лежат в некоторых картах. Длина каждого участка кривой непрерывно зависит от t, поскольку в соответствующей карте она представляется в виде определенного интеграла от функции, непрерывно зависящей от параметра t.

В силу связности многообразия при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ для любых двух точек из M найдется кусочно-гладкая кривая конечной длины, соединяющая их. Обозначим через $\rho_t, t \in [0,1]$, соответствующее семейство внутренних метрик на M. Хорошо известно, что внутренняя метрика, индуцированная финслеровым функционалом длины, определяет на гладком многообразии топологию, которая совпадает с изначальной топологией этого многообразия, см. [2]. Таким образом, все метрики ρ_t определяют одну и ту же топологию на M, причем эта топология совпадает с изначальной топологией пространства M. При этом, метрики семейства ρ_t не обязаны быть эквивалентными на всем многообразии. В дальнейшем нам будет необходимо лишь то, чтобы многообразие M было ограниченно компактным при каждом $t \in [0,1]$, и позже мы потребуем это непосредственно. Как известно, из того, что при любых фиксированных $t \in [0,1]$ и $x \in M$ функция $F_t(x, \cdot)$ является нормой на касательном пространстве T_xM, следует, что соответствующий функционал финслеровой длины l_t является полунепрерывным снизу на пространстве кусочно-гладких кривых в M, см. [2]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 6. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком многообразии M задает семейство функционалов длины типа 1.*

Утверждение 7. *Если гладкое многообразие M — компактно, то для любых $t_0 \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t-t_0| < \delta$ для любой пары $(x,\xi), \xi \neq 0$, принадлежащей касательному расслоению TM, будет выполнено неравенство*

$$\left|\frac{F_t(x,\xi)}{F_{t_0}(x,\xi)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зафиксируем t_0 и рассмотрим функцию, определенную на $(TM \setminus T_0) \times [0,1]$, где T_0 — нулевое сечение TM:

$$f(x,\xi,t) = \frac{F_t(x,\xi)}{F_{t_0}(x,\xi)}.$$

Она непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на компакте $SM \times [0,1]$, где SM — сферизация касательного расслоения в метрике F_{t_0}. Таким образом, для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t-t_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x,\xi,t) - f(x,\xi,t_0)| < \varepsilon$ при любых $(x,\xi) \in SM$. Учитывая, что $f(x,\xi,t_0) = 1$, мы получаем соотношение $|f(x,\xi,t) - 1| < \varepsilon$. Таким образом, из того, что $f(x,\lambda\xi,t) = f(x,\xi,t)$ при $\lambda > 0$, следует требуемое утверждение. $\square$

Утверждение 8. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 2.

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0,1] \to M, n \in \mathbb{N}$, — последовательность кусочно-гладких кривых, а числа $t_0, t_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ и $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ для некоторой константы $C_1 > 0$. Зафиксируем произвольное ε, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < 1$. Из утверждения 7 следует, что для ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t-t_0| < \delta$ неравенство $1 - \varepsilon < \frac{F_t(\xi)}{F_{t_0}(\xi)}$ будет выполнено для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$. В силу того, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, существует $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнено неравенство $|t_n - t_0| < \delta$. Таким образом, для любых $n > N$ и $s \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)) < \frac{F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))}{1-\varepsilon}.$$

Проинтегрируем это неравенство по s на отрезке $[0,1]$:

$$l_{t_0}(\gamma_n) = \int_0^1 F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))ds < \int_0^1 \frac{F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))}{1-\varepsilon}ds = \frac{l_{t_n}(\gamma_n)}{1-\varepsilon} < \frac{C_1}{1-\varepsilon},$$

то есть последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n), n \in N$, ограничена. $\square$

Утверждение 9. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 3.

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0,1] \to M, n \in \mathbb{N}$, — сходящаяся последовательность кусочно-гладких кривых, их длины в метрике F_{t_0} ограничены единой константой $C > 0$, а числа $t_0, t_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $F_{t_0}(x,\xi) > 0$ для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$, из утверждения 7 следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t-t_0| < \delta$ для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$, будет выполнено неравенство $|F_t(x,\xi) - F_{t_0}(x,\xi)| < \varepsilon F_{t_0}(x,\xi)$. Рассмотрим такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнено неравенство $|t_n - t_0| < \delta$. В результате, для любых $n > N$ и $s \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$|F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))| < \varepsilon F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)).$$

Рассмотрим модуль разности длин кривой γ_n относительно метрик F_{t_n} и F_{t_0} при $n > N$:

$$|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| = \left| \int_0^1 F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) ds \right| <$$

$$< \int_0^1 |F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))| ds < \varepsilon \int_0^1 F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) ds = \varepsilon l_{t_0}(\gamma_n) < \varepsilon C.$$

Это означает, что $|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 6. *Пусть гладкое финслерово многообразие M компактно, а его метрика F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждений 6, 8, 9 и теоремы 2. $\square$

Для того, чтобы воспользоваться свойствами непрерывных на компакте функций, мы оттолкнулись от компактных финслеровых многообразий. Теорема 6 может быть распространена на ограниченно компактные финслеровы многообразия. Отметим, что ограниченная компактность конечномерного финслерова многообразия равносильна условию его полноты. Идея доказательства непрерывности расстояния в этом случае проста: мы рассмотрим достаточно большой компактный шар, содержащий точки A и B, и сведем задачу к случаю компактного многообразия.

Теорема 7. *Пусть M — гладкое связное многообразие, а функция F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$ и является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$. Если финслерово многообразие (M, F_t) является полным метрическим пространством при каждом $t \in [0,1]$, то расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Докажем непрерывность $\rho_t(A,B)$ в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$. В силу связности многообразия существует кусочно-гладкая кривая $\gamma_1 : [0,1] \to M$ такая, что $\gamma_1(0) = A$, $\gamma_1(1) = B$. Функция $l_t(\gamma_1) = \int_0^1 F_t(\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s)) ds$ непрерывна по переменной t на отрезке $[0,1]$, в следствие чего величина $m = \max_{t\in[0,1]} l_t(\gamma_1)$ конечна. Рассмотрим замкнутый шар $K = \{x \in M | \rho_{t_0}(A,x) \leqslant m+1\}$, который является компактом, так как M полное. Если K совпал с M, то утверждение сводится к случаю компактного многообразия и вытекает из теоремы 6. Иначе, рассмотрим множество кривых L, образы которых лежат в K, один конец которых совпадает с A, а другой лежит на границе ∂K. Если $\gamma \in L$ — кривая и P — ее конец, лежащий на ∂K, то $l_{t_0}(\gamma) \geqslant \rho_{t_0}(A,P) = m+1$. Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ выполнено $l_t(\gamma) > m$ для любой кривой $\gamma \in L$.

Предположим, что это не так, и существуют числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ для некоторого t_0, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует кривая γ_n такая, что $l_{t_n}(\gamma_n) \leqslant m$. Заметим, что K является компактным финслеровым многообразием, финслерова метрика F_t на котором непрерывно зависит от t, и образы кривых γ_n полностью лежат в K. Рассмотрим ограничение семейства функционалов длины l_t на K. Классом допустимых кривых этого ограничения является множество кусочно-гладких кривых, образы которых полностью лежат в K. Из утверждения 8 следует, что семейство функционалов длины l_t, ограниченное на компакт K, является семейством типа 2, а, значит, существует константа $C > 0$ такая, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу того, что K — компакт, из теоремы Арцела-Асколи следует, что в метрике F_{t_0} из последовательности кривых γ_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность кривых. Перейдем к этой подпоследовательности – для каждой кривой из нее неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) \leqslant m$ останется верным. Таким образом, γ_n — сходящаяся последовательность кривых в компакте K, длины которых в метрике F_{t_0} ограничены общей константой. Из утверждения 9 следует, что семейство функционалов длины l_t, ограниченное на K, является семейством типа 3, и, значит, $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$, что противоречит неравенствам $l_{t_0}(\gamma_n) \geqslant m+1$ и $l_{t_n}(\gamma_n) \leqslant m$, которые должны были быть верны для любого $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим кривую $\gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = A, \gamma(1) = B$, образ которой не лежит в K. Пусть $s_0 = \inf\{s | s \in [0,1], \gamma(s) \notin K\}$. Ограничение кривой γ на отрезок $[0, s_0]$ — это кривая из L, а значит, $l_t(\gamma|_{[0,s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. Из этого следует, что $l_t(\gamma) > l_t(\gamma|_{[0,s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. При этом, точная нижняя грань длин всех кривых, соединяющих A и B, не превосходит m в каждой метрике F_t, $t \in [0,1]$, а значит при $|t - t_0| < \delta$ она совпадает с точной нижней гранью длин кривых, соединяющих A и B, образы которых лежат в K. Определим $\rho_t^K(A,B) = \inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кусочно-гладким соединяющим A и B кривым γ, образы которых лежат в K. Из теоремы 6 следует, что $\rho_t^K(A,B)$ непрерывно по t, так как K — компакт. При этом, мы показали, что $\rho_t^K(A,B) = \rho_t(A,B)$ при $|t - t_0| < \delta$, а значит, $\rho_t(A,B)$ непрерывно в точке t_0. $\square$

Как известно, финслерова метрика является обобщением римановой метрики, где общее определение длины касательного к многообразию вектора не обязательно задается в виде квадратичного корня из симметричной билинейной формы, как это делается в римановом случае. Таким образом, результаты, полученные для финслеровых многообразий, имеют место и в случае римановых многообразий. Действительно, пусть дано k-мерное гладкое связное риманово многообразие M с метрикой ds_t^2, непрерывно зависящей от параметра $t \in [0,1]$. Подразумевается, что ds_t^2 — риманова метрика при каждом $t \in [0,1]$ и в каждой точке $x \in M$ компоненты метрического тензора $g_{ij}^t(x)$ в каждых локальных координатах непрерывно зависят от t. Аналогично, для любой пары точек $A, B \in M_n$ расстояние $\rho_t(A,B)$ между ними в метрике ds_t^2 определяется как точная нижняя грань длин $l_t(\gamma)$ посчитанных относительно метрики ds_t^2 кусочно-гладких кривых γ, соединяющих A и B.

Через $||\xi||_t$ обозначим норму вектора ξ, принадлежащего касательному расслоению TM к многообразию M, относительно метрики ds_t^2 . В локальных координатах $(x_1, \ldots, x_k)$, определенных в некоторой карте, эта норма записывается следующим образом:

$$||\xi||_t = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}^t(x_1, \ldots, x_k)\xi^i\xi^j},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ — точка приложения вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, а значит, она непрерывно зависит от t, поскольку g_{ij}^t непрерывно зависят от t. Рассмотрим на многообразии M семейство финслеровых метрик, заданных следующим равенством:

$$F_t(x,\xi) = ||\xi||_t, t \in [0,1].$$

По построению, финслерова метрика F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. При этом, финслерова метрика F_t и риманова метрика ds_t^2 определяют одну и ту же функцию расстояния ρ_t и один и тот же функционал длины на многообразии M. Таким образом, из утверждений 6, 8, 9 и теоремы 7 вытекают аналогичные результаты для римановой метрики:

Утверждение 10. *Непрерывно зависящее от t семейство римановых метрик ds_t^2 на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 1.

Утверждение 11. *Непрерывно зависящее от t семейство римановых метрик ds_t^2 на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 2.

Утверждение 12. *Непрерывно зависящее от t семейство римановых метрик ds_t^2 на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 3.

Теорема 8. *Пусть M — гладкое связное риманово многообразие, и его метрика ds_t^2 непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. Если риманово многообразие (M, ds_t^2) является полным метрическим пространством при каждом $t \in [0,1]$, то расстояние $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

6. Заключение

Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний между точками при деформациях метрики оказалась нетривиальным вопросом. Как показано в настоящей работе, а также в работе [1], существуют примеры пространств и заданных на них функционалов длины, в которых при деформации этих функционалов длины из непрерывности изменения длин допустимых кривых не следует непрерывность изменения расстояний между точками, причем эти пространства могут быть как компактны, так и не компактны относительно соответствующих внутренних метрик. При этом, в настоящей работе мы приводим условия, которых в совокупности с непрерывностью изменения длин кривых достаточно для непрерывности изменения расстояний между точками при деформации функционала длины в случае ограниченно компактных метрических пространств. Мы показываем, что эти условия выполнены на компактных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра. В качестве следствия мы получаем, что на полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий / Чикин В.М. // Матем. сб., 2017, Vol. 208, №7. P. 145-171, http://mi.mathnet.ru/msb8759.

2. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии / Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

3. Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces / Gromov M. - Progress in Math., 152, Birkhäuser, 1999.

4. Khamsi M. A., Kirk W. A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory / Khamsi M. A., Kirk W. A. - Wiley-IEEE, 2001.

5. Busemann H. The Geometry of Geodesics / Busemann H. - Academic Press, New York, 1955.

6. Papadopoulos A. Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature / Papadopoulos A. - IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society, 2005.

7. Finsler P. Uber Kerven und Flachen in allgemeinen Raumen / Finsler P. - Basel, Verlag Birkhauser AG, 1951.

8. Noether E. Invarianten beliebiger Differentialausdrücke / Noether E. // Nachr. Ges. Wiss. Gott., Math.-Phys. Kl., 1918, Vol. 1918, P. 37-44.

9. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств / Рунд Х. - Москва: Наука, 1981.

10. Antonelli P.L. Handbook of Finsler geometry / Antonelli P.L. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

11. Bao D., Chern S. S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry / Bao D., Chern S. S., Shen Z. - Springer-Verlag, 2000.

12. Shen Z. Lectures on Finsler Geometry / Shen Z. - World Scientific Publishers, 2001.

13. Shen Z. Differential geometry of spray and Finsler spaces / Shen Z. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

14. De Giorgi E. Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area / De Giorgi E. // Rend. Mat., Ser. 8, 1975, P. 277-294.

15. De Giorgi E., Franzoni T. Su un tipo di convergenza variazionale / De Giorgi E., Franzoni T. // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1975, Vol. 58, №6, P. 842-850.

16. De Giorgi E., Spagnolo S. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine / De Giorgi E., Spagnolo S. // Boll. Un. Mat. It., Ser. 8, 1973, P. 391-411.

17. Dal Maso G. An Introduction to Gamma-Convergence / Dal Maso G. - Birkhäuser, Boston, 1993.

18. Braides A. Gamma-convergence for beginners / Braides A. - Oxford University Press, 2002.

REFERENCES

1. Chikin V.M., 2017, "Steiner minimal trees in small neighbourhoods of points in Riemannian manifolds", *Sb. Math.*, vol. 208, no. 7, pp. 1049-1072, https://iopscience.iop.org/article/10.1070/SM8759.

2. Burago D., Burago Yu., Ivanov S., 2001, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 33, AMS.

3. Gromov M., 1999, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Mathematics 152, Birkhäuser, Boston.

4. Khamsi M. A., Kirk W. A., 2001, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Wiley-IEEE.

5. Busemann H., 1955, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York.

6. Papadopoulos A., 2005, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society.

7. Finsler P., 1951, *Uber Kerven und Flachen in allgemeinen Raumen*, Basel, Verlag Birkhauser AG.

8. Noether E., 1918, "Invarianten beliebiger Differentialausdrücke" [Invariants of arbitrary differential expressions], *Nachr. Ges. Wiss. Gott., Math.-Phys. Kl.*, vol. 1918, pp. 37-44.

9. Rund H., 1959, *The differential geometry of Finsler spaces*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 101, Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag.

10. Antonelli P.L., 2003, *Handbook of Finsler geometry*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

11. Bao D., Chern S. S., Shen Z., 2000, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag.

12. Shen Z., 2001, *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishers.

13. Shen Z., 2001, *Differential geometry of spray and Finsler spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

14. De Giorgi E., 1975, "Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area", *Rend. Mat.*, ser. 8, pp. 277-294.

15. De Giorgi E., Franzoni T., 1975, "Su un tipo di convergenza variazionale", *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, vol. 58, no. 6, pp. 842-850.

16. De Giorgi E., Spagnolo S., 1973, "Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine", *Boll. Un. Mat. It.*, ser. 8, pp. 391-411.

17. Dal Maso G., 1993, *An Introduction to Gamma-Convergence*, Birkhäuser, Boston.

18. Braides A., 2002, *Gamma-convergence for beginners*, Oxford University Press.

Получено 12.02.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.