

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 514

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-265-288

**О бифуркации решения задачи Ферма — Штейнера
при 1-параметрической вариации границы в $H(\mathbb{R}^2)$**

А. М. Тропин

Тропин Александр Михайлович — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: amtropin@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассматривается задача Ферма — Штейнера в гиперпространствах с метрикой Хаусдорфа. Если X — метрическое пространство, и фиксировано непустое конечное подмножество $\mathcal{A}$ в пространстве непустых замкнутых и ограниченных подмножеств $H(X)$, то элемент $K \in H(X)$, на котором достигается минимум суммы расстояний до элементов $\mathcal{A}$, будем называть *астровершиной Штейнера*, сеть, соединяющую $\mathcal{A}$ с K , — *минимальной астросетью*, а само $\mathcal{A}$ — *границей*. В случае ограниченно компактного X все его элементы являются компактами, а множество астровершин Штейнера непусто. В настоящей статье доказывается критерий того, когда астровершина Штейнера для одноточечных граничных компактов в $H(X)$ является одноточечной. Кроме того, получена нижняя оценка длины минимальной параметрической сети через длину астросети с одноточечными вершинами, содержащимися в граничных компактах, и изучены свойства границ, для которых достигается точная оценка. Также изучены бифуркации астровершин Штейнера при 1-параметрической деформации трехэлементных границ в $H(\mathbb{R}^2)$, которые иллюстрируют геометрические феномены, отсутствующие в классической задаче Штейнера для точек в $\mathbb{R}^2$.

Ключевые слова: задача Ферма — Штейнера, минимальное дерево Штейнера, минимальная параметрическая сеть, минимальная астросеть, астровершина Штейнера, астрокомпакт Штейнера, гиперпространство, ограниченно компактное пространство, расстояние Хаусдорфа.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. М. Тропин. О бифуркации решения задачи Ферма — Штейнера при 1-параметрической вариации границы в $H(\mathbb{R}^2)$ // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 265–288.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 514

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-265-288

On the bifurcation of the solution of the Fermat–Steiner problem under 1-parameter variation of the boundary in $H(\mathbb{R}^2)$

A. M. Tropin

Tropin Alexander Mikhailovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: amtropin@gmail.com

Abstract

In this paper, we consider the Fermat–Steiner problem in hyperspaces with the Hausdorff metric. If X is a metric space, and a non-empty finite subset $\mathcal{A}$ is fixed in the space of non-empty closed and bounded subsets $H(X)$, then we will call the element $K \in H(X)$, at which the minimum of the sum of the distances to the elements of $\mathcal{A}$ is achieved, the Steiner astrovertex, the network connecting $\mathcal{A}$ with K — the minimal astronnet, and $\mathcal{A}$ itself — the border. In the case of proper X , all its elements are compact, and the set of Steiner astrovertices is nonempty. In this article, we prove a criterion for when the Steiner astrovertex for one-point boundary compact sets in $H(X)$ is one-point. In addition, a lower estimate for the length of the minimal parametric network is obtained in terms of the length of an astronnet with one-point vertices contained in the boundary compact sets, and the properties of the boundaries for which an exact estimate is achieved are studied. Also bifurcations of Steiner astrovertices under 1-parameter deformation of three-element boundaries in $H(\mathbb{R}^2)$, which illustrate geometric phenomena that are absent in the classical Steiner problem for points in $\mathbb{R}^2$, are studied.

Keywords: Fermat–Steiner problem, Steiner minimal tree, minimal parametric network, minimal astronnet, Steiner astrovertex, Steiner astrocompact, hyperspace, proper space, Hausdorff distance.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. M. Tropin, 2021, “On the bifurcation of the solution of the Fermat–Steiner problem under 1-parameter variation of the boundary in $H(\mathbb{R}^2)$ ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 265–288.

1. Введение

Хорошо известна оптимизационная задача, которую принято сейчас называть *задачей Штейнера*. Пусть на евклидовой плоскости даны n фиксированных точек, называемых *граничными*. Требуется построить связный граф с вершинами в граничных и, если необходимо, дополнительных точках плоскости такой, что сумма длин его ребер минимальна. Исходная постановка этой задачи предполагала добавление одной дополнительной точки к граничным и рассматривалась Якобом Штейнером. Формальная постановка задачи, разрешающая добавлять сколько угодно дополнительных точек, была опубликована только в 1934 году Войтехом Ярником и Милошом Кёсслером [1]. Если при этом фиксировать топологию сети, соединяющей граничные точки, т.е. заранее определить как вершины сети соединяются между собой, то получаются *минимальные параметрические сети*. Дитмар Цислик предложил рассматривать [2] *минимальные k -деревья Штейнера*, ограничив число дополнительных точек числом

k . Позже задачу Штейнера стали рассматривать не только на плоскости, но и в других пространствах [3].

В рамках задачи Штейнера не только ищется решение, но и изучаются его изменения при деформации границы. В этом случае могут возникнуть *бифуркации* — скачкообразные перестраивания решения при сколь угодно малой деформации границы. Классическим примером является граница, состоящая из четырех точек, расположенных в вершинах квадрата, на евклидовой плоскости. Подобные явления возникают и в минимальных поверхностях при вариации контура [4]. Теория бифуркации очень сложна даже для случая четырехэлементной границы на плоскости (см. [5], [6]). Разнообразное применение теории бифуркаций можно посмотреть в [7]. В данной статье бифуркации будут изучаться для границы в гиперпространстве над евклидовой плоскостью.

Рассмотрим *задачу Ферма — Штейнера* в гиперпространстве $H(X)$ — пространстве непустых замкнутых и ограниченных подмножеств метрического пространства X . В качестве метрики в $H(X)$ выберем стандартное расстояние Хаусдорфа (см. [8], [9], [10]). Геометрия пространства $H(X)$ используется в таких важных приложениях как распознавание образов, сравнение двумерных и трехмерных геометрических объектов, построение непрерывных деформаций одного объекта в другой. О геометрии пространства $H(\mathbb{R}^n)$ см., например, [11].

Для фиксированного конечного подмножества $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$, называемого *границей*, необходимо найти все компакты $K \in H(X)$, минимизирующие значение функции $S_{\mathcal{A}}(K) = \sum_{i=1}^n d_H(A_i, K)$. Минимальное значение функции $S_{\mathcal{A}}(K)$ назовем *длиной минимальной астросети* и обозначим через $S_{\mathcal{A}}$. Элементы $H(X)$, являющиеся решением задачи Ферма — Штейнера, будем называть *астровершинами Штейнера*, а их множество обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Если к тому же X — ограниченно компактное пространство, то элементы $H(X)$ являются компактами, а $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто для любой границы $\mathcal{A}$; в этом случае астровершины Штейнера мы также будем называть *астрокомпактами Штейнера*.

Множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на *классы одинаковой взвешенности* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, где $d = (d_1, \dots, d_n)$, то есть $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $d_H(A_i, K) = d_i$ для каждого i . Пусть $\Omega(\mathcal{A})$ — это множество всех таких d . Заметим, что класс одинаковой взвешенности может состоять более чем из одного элемента. В каждом классе определим *минимальные* и *максимальные по включению астровершины Штейнера*. Для любого вектора $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i \geq 0$, определим множество $B_s(\mathcal{A}) := \bigcap_{i=1}^n B_{s_i}(A_i)$. В предыдущих работах показано, что при $s \in \Omega(\mathcal{A})$ множество $B_s(\mathcal{A})$ является максимальным астрокомпактом Штейнера, который содержит все остальные элементы из $\Sigma_s(\mathcal{A})$.

Постановка задачи Ферма — Штейнера в гиперпространствах и структура ее решений была описана в работе [14]. Задача для конечных граничных компактов в $\mathbb{R}^n$ рассматривалась также в [15].

В данной статье получены результаты для границ в ограниченно компактном гиперпространстве $H(X)$, а также построены примеры границ в гиперпространстве над $\mathbb{R}^2$, иллюстрирующие разнообразие геометрических эффектов решений задачи Ферма — Штейнера. Приведем основные результаты статьи.

1. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном гиперпространстве $H(X)$. Расстояние между a и b в X будем обозначать через $|ab|$. Для $a_1, \dots, a_n \in X$ определим число $\sigma_{a_1 \dots a_n} := \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n |a_i x|$, и пусть

$$\sigma_{\mathcal{A}} := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

Так как A_i — компакты, существует *реализующий набор* $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ такой, что $\sigma_{a_1 \dots a_n} = \sigma_{\mathcal{A}}$.

- Имеет место неравенство $S_{\mathcal{A}} \geq \sigma_{\mathcal{A}}$;

- Если существует $K \in H(X)$, для которого $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, то K — астрокомпакт Штейнера и существует реализующий набор $(a_1, \dots, a_n)$ такой, что $|a_i k| = d_H(A_i, K)$ для некоторой точки Ферма — Штейнера k для границы $(a_1, \dots, a_n)$, причем k можно выбрать из K ;
- Границу $\mathcal{A}$ назовем *точечно реализуемой*, если существует $K \in H(X)$, для которого $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$. Доказан критерий: граница $\mathcal{A}$ точечно реализуема тогда и только тогда, когда некоторый реализующий набор $(a_1, \dots, a_n)$ и его точка Ферма — Штейнера k таковы, что для $d_i = |a_i k|$ и $d = (d_1, \dots, d_n)$ выполняется $S_{\mathcal{A}}(B_d(\mathcal{A})) = \sigma_{\mathcal{A}}$.

2. Напомним, что пространство X изометрично вкладывается в свое гиперпространство $H(X)$ следующим естественным образом: каждой точке x из X сопоставляется одноточечное подмножество $\{x\}$ в $H(X)$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем отождествлять $x \in X$ и $\{x\} \in H(X)$. Оказывается, каждое решение задачи Ферма — Штейнера для границы в X сохранится и в $H(X)$, однако могут появиться и другие решения. В данной работе доказан критерий одноточечности астровершины Штейнера для одноточечной границы в $H(X)$ в случае ограниченно компактного пространства X . Этот критерий позволяет определить, когда множество решений задачи Ферма — Штейнера для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в X исчерпывает множество решений для соответствующей одноточечной границы $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$.

3. Так как норма является выпуклой функцией, то множество всех решений задачи Ферма — Штейнера в нормированном пространстве представляет собой выпуклый компакт, состоящий либо из одной, либо из континуума точек. Однако в случае $H(\mathbb{R}^2)$ возможно конечное (большее 1) число решений. В $H(\mathbb{R}^2)$ построено непрерывное 1-параметрическое семейство трехэлементных границ с переменным конечным числом классов (1, 2, 3), причем каждый из классов является непрерывным продолжением других при меньших значениях параметра.

4. Тогда как в случае трехэлементной границы в $\mathbb{R}^2$ решение задачи Ферма — Штейнера единственно и непрерывно зависит от границы, в $H(\mathbb{R}^2)$ может меняться и число решений, и мощность каждого из них. В статье это продемонстрировано на примере непрерывного 1-параметрического семейства трехэлементных границ в $H(\mathbb{R}^2)$, для которого существуют значения параметра, в любой сколь угодно малой окрестности которого содержатся значения, соответствующие границам с различными характеристиками пространства решений (один или континуум минимальных астрокомпактов Штейнера, произвольная конечная или континуальная мощность минимального астрокомпакта Штейнера).

Автор благодарит своих научных руководителей профессоров А.А. Тужилина и Э.Э. Гасанова, а также профессора А.О. Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе приведены необходимые сведения из теории сетей (подраздел 2.1) и геометрии пространства компактов с расстоянием по Хаусдорфу (подраздел 2.2).

2.1. Графы и сети. Проблема Штейнера. Теоремы существования

Мы будем рассматривать простые графы, подробные сведения по теории которых можно найти, например, в [12].

Выберем некоторое подмножество вершин графа G и назовем его *границей* ∂G графа G , а сам G — *графом с границей*. Вершины из ∂G будем называть *граничными*, а все остальные вершины G — *внутренними*. Мы предполагаем, что граница (возможно, пустая) есть у любого

графа. Если граф является деревом с вершинами степеней 1 или 3, а все граничные вершины имеют степень 1, то такой граф назовем *бинарным деревом*.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное множество, и G — связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* $\mathcal{A}$, если $\partial G = \mathcal{A}$. Если $G = (V, E)$, и X — некоторое множество, то отображение $\Gamma : V \rightarrow X$ называем *сетью* Γ *типа* G , а G называется *параметризующим графом* сети или ее *топологией*. Ограничения Γ на ребра, вершины (граничные, внутренние), границу графа G называются соответственно *ребрами*, *вершинами* (*граничными*, *внутренними*), *границей* сети Γ . Если $\Gamma(v_i) = \Gamma(v_j)$, то ребро $\Gamma : \{v_i, v_j\} \rightarrow X$ называется *вырожденным*, в противном случае — *невыврожденным*. Если все ребра сети невырождены, то такая сеть называется *невыврожденной*. Обозначим через $\partial \Gamma$ границу сети Γ . Если множество $\mathcal{A} \subset X$ является образом $\partial \Gamma$, то будем говорить, что Γ *соединяет* $\mathcal{A}$ *по отображению* $\partial \Gamma$, и обозначим через $\mathcal{A} \subset \Gamma$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, и Γ — сеть типа $G = (V, E)$ в X . Тогда длина ребра $\Gamma : \{v_i, v_j\} \rightarrow X$ сети Γ определяется как расстояние $\rho(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j))$, а длина сети Γ — как сумма длин всех ее ребер:

$$\rho(\Gamma) := \sum_{v_i v_j \in E} \rho(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j)).$$

Пусть граф G соединяет $\mathcal{A} \subset X$. Тогда будем считать, что все сети Γ типа $G = (V, E)$ в X удовлетворяют следующему условию: ограничение Γ на $\mathcal{A}$ — тождественное отображение, то есть $\Gamma|_{\partial G} = \text{id}$. Таким образом, если $v_1, \dots, v_k$ — внутренние вершины графа G , то сеть Γ типа G , соединяющая $\mathcal{A} \subset X$, однозначно определяется положением своих внутренних вершин $(\Gamma(v_1), \dots, \Gamma(v_k))$.

Пусть графы G_1 и G_2 соединяют $\mathcal{A} \subset X$. Назовем сети Γ_i типа G_i , $i = 1, 2$, *равными*, если существует изоморфизм $\nu : V_1 \rightarrow V_2$ графов G_i , тождественный на $\mathcal{A}$ и такой, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$. отождествляя Γ_1 и Γ_2 с помощью этого изоморфизма ν , будем считать, что равные сети — это сети одного и того же типа, например, $G_1 = (V, E)$. Если к тому же для каждого ребра $e \in E$ его длина в каждой из сетей Γ_i одинакова, то такие сети назовем *одинаково взвешенными*.

Пусть связный граф $G = (V, E)$ соединяет фиксированную границу $\mathcal{A}$ в метрическом пространстве (X, ρ) . Обозначим через $[G, \mathcal{A}]$ множество всех сетей Γ типа G . Точную нижнюю грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем сетям из $\Gamma \in [G, \mathcal{A}]$ назовем *длиной минимальной параметрической сети* и обозначим через $\text{mpn}[G, \mathcal{A}]$. Если в $[G, \mathcal{A}]$ существует сеть с длиной, равной длине минимальной параметрической сети, то назовем такую сеть *минимальной параметрической сетью типа* G , *соединяющей* $\mathcal{A}$.

Точную нижнюю грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем сетям всевозможным сетям, соединяющим $\mathcal{A}$, назовем *длиной минимального дерева Штейнера на* $\mathcal{A}$. Кроме того, ее можно определить и как инфимум $\rho(\Gamma)$ по всем связным графам с границей $\mathcal{A}$:

$$\text{smt}(\mathcal{A}) = \inf_{\Gamma: \mathcal{A} \subset \Gamma} \rho(\Gamma) = \inf_{G: \partial G = \mathcal{A}} \text{mpn}[G, \mathcal{A}].$$

Если первый инфимум достигается на некоторой сети, то, как показано в [3], он достигается также и на невырожденной сети, которая является деревом не более чем с $n - 2$ внутренними вершинами и называется *минимальным деревом Штейнера на* $\mathcal{A}$. Ее внутренние вершины называются *точками Штейнера*, а изучение минимальных деревьев Штейнера — *проблемой Штейнера*.

Следующий результат доказывается точно так же, как теоремы существования минимальных сетей для полных римановых многообразий, см. [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для любого его конечного подмножества $\mathcal{A}$ в пространстве X существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее $\mathcal{A}$, и для любого связного графа G с границей $\mathcal{A}$ существует соединяющая $\mathcal{A}$ минимальная параметрическая сеть типа G в X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если метрическое пространство X ограничено компактно, то пространство $H(X)$ его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа также ограничено компактно.

В дальнейшем нам будет нужна следующая теорема существования минимальных сетей в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Необходимые определения приведены в разделе 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X — ограничено компактное метрическое пространство, и $H(X)$ — пространство его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа. Тогда для любого конечного семейства компактов $\mathcal{A} \subset H(X)$ в пространстве $H(X)$ существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее $\mathcal{A}$, и для любого связного графа G с границей $\mathcal{A}$ существует соединяющая $\mathcal{A}$ минимальная параметрическая сеть типа G в $H(X)$.

Теперь пусть G — дерево с n граничными вершинами степени 1 и единственной внутренней вершиной, которая смежна с каждой из граничных, и G соединяет границу $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$, тогда параметрическую сеть Γ из $[G, \mathcal{A}]$ назовем сетью типа звезда, или *астросетью*. Внутреннюю вершину такой астросети, соединяющей $\mathcal{A}$, назовем *астровершиной для границы $\mathcal{A}$* . По аналогии с минимальными параметрическими сетями, точную нижнюю грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем астросетям назовем *длиной минимальной астросети* и обозначим через $S_{\mathcal{A}}$. Длину параметрической астросети, соединяющей границу $\mathcal{A}$ с компактом K , будем обозначать через $S_{\mathcal{A}}(K)$. Если существует астросеть с длиной, равной длине минимальной астросети, то назовем такую сеть *минимальной астросетью, соединяющей $\mathcal{A}$* , а ее внутреннюю вершину — *астровершиной Штейнера*. Множество всех астровершин Штейнера для границы $\mathcal{A}$ мы обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Изучение минимальных астросетей называется *проблемой Ферма — Штейнера*.

Следующий результат следует из следствия 1 и утверждения 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X — ограничено компактное метрическое пространство, и $\mathcal{A}$ — непустое конечное подмножество $H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто.

2.2. Определение и некоторые свойства метрики Хаусдорфа

Напомним, что замкнутой окрестностью радиуса r множества A в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество $B_r(A) := \{x \in X : \rho(x, A) \leq r\}$, где $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Расстоянием Хаусдорфа между множествами A, B из (X, ρ) называется величина

$$d_H(A, B) := \inf\{r : B_r(A) \supset B, B_r(B) \supset A\},$$

или, что эквивалентно,

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\right\}.$$

Как известно, расстояние Хаусдорфа является метрикой на пространстве $H(X)$, см. [13].

Далее для удобства будем обозначать $\rho(a, b)$ через $|ab|$ для любых точек $a, b \in X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для одноточечного компакта $\{a\}$, компакта B и компакта $\tilde{B} \subset B$ из $H(X)$ имеет место неравенство: $d_H(\{a\}, \tilde{B}) \leq d_H(\{a\}, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По определению расстояния Хаусдорфа,

$$d_H(\{a\}, B) = \max\left\{\sup_{b \in B} |ba|, \inf_{b \in B} |ba|\right\} = \sup_{b \in B} |ba|.$$

Поскольку $\tilde{B} \subset B$, то для любой точки a верно неравенство:

$$d_H(\{a\}, B) = \sup_{b \in B} |ba| \geq \sup_{b \in \tilde{B}} |ba| = d_H(\{a\}, \tilde{B}).$$

□

Следующие утверждения, которые нам потребуются, доказаны в [14].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть A и B — компакты в метрическом пространстве X . Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_H(A, B)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть A — компакт в ограниченно компактном пространстве X . Тогда для любого $d > 0$ множество $B_d(A)$ также является компактом.

2.3. Структура астрокомпактов Штейнера в ограниченно компактных пространствах

Мы будем изучать минимальные астросети, соединяющие конечные границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ в $(H(X), d_H)$. Длина ребра $e = BC$ сети определяется как расстояние Хаусдорфа $d_H(B, C)$.

Пусть сначала X — произвольное метрическое пространство. Напомним, что множество всех астрровершин Штейнера для границы $\mathcal{A} \subset X$ мы обозначаем через $\Sigma(\mathcal{A})$. Положим $d(x, \mathcal{A}) = (\rho(x, a_1), \dots, \rho(x, a_n))$ и $\Omega(\mathcal{A}) = \{d(y, \mathcal{A}) : y \in \Sigma(\mathcal{A})\}$. Для каждого $d \in \Omega$ мы определим класс астрровершин Штейнера одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A}) = \{y \in \Sigma(\mathcal{A}), d(y, \mathcal{A}) = d\}$. Таким образом, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, $d \in \Omega$. Заметим, что, в общем случае, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ может быть пустым, однако в случае ограниченной компактности X это множество непусто.

При этом астрровершины Штейнера не всегда определяются однозначно. Минимальным и максимальным астрровершинами Штейнера в классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$ назовем соответственно минимальный и максимальный элементы в $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в смысле естественного порядка по включению.

Для произвольного набора $d = (d_1, \dots, d_n)$, $d_i \geq 0$, и семейства $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ определим множество $B_d(\mathcal{A}) := \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$. Если $d_i = d_H(K, A_i)$, $i = 1, \dots, n$, то $B_d(\mathcal{A})$ назовем каноническим расширением элемента K относительно семейства $\mathcal{A}$ и будем обозначать через $K_d(\mathcal{A})$.

Пусть теперь X — ограниченно компактное метрическое пространство с метрикой ρ , в нем все замкнутые и ограниченные множества являются компактами. Астрровершины Штейнера в этом случае будем называть астрокомпактами Штейнера. В работе [14] описана структура класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в случае ограниченно компактного X , мы напомним здесь основной результат.

ТЕОРЕМА 2 (структура $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в ограниченно компактном пространстве). Пусть X — ограниченно компактное пространство, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$ непусты, и для любого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ компакт K лежит в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $K_\lambda \subset K \subset K_d(\mathcal{A})$ для некоторого минимального астрокомпакта Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ и единственного максимального астрокомпакта Штейнера $K_d(\mathcal{A}) \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

3. Связь минимальных параметрических сетей с точечными сетями

Определим отображение $\nu X \rightarrow H(X)$, которое каждой точке пространства X с метрикой ρ сопоставляет одноточечный компакт из пространства $H(X)$ с метрикой d_H : $\nu(x) = \{x\}$. Назовем граф $\bar{G}$ в $H(X)$ точечным, если все его вершины являются одноточечными компактами.

Множество ребер дерева $\bar{G}$ обозначим через $\bar{E}$. Поскольку для любых точек $x, y \in X$ верно $\rho(x, y) = d_H(\{x\}, \{y\})$, то ν — изометричное вложение (X, ρ) в $(H(X), d_H)$, поэтому в дальнейшем будем отождествлять точечный граф $\bar{G}$ в $H(X)$ и соответствующий ему граф $\nu^{-1}(\bar{G})$ в X .

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — деревья в $H(X)$. Дерево G_1 назовем *подчиненным* дереву G_2 , если существует $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ — изоморфизм деревьев G_1 и G_2 такой, что для любой вершины $v \in V_1$ выполняется $v \subset \varphi(v)$ и для любого ребра $vw \in E_1$ выполняется $d_H(v, w) \leq d_H(\varphi(v), \varphi(w))$. Подчинение будем обозначать через $G_1 \prec G_2$.

Далее считаем, что пространство X — ограничено компактное.

3.1. Нижняя оценка длины сети в гиперпространстве с помощью точечных сетей

ТЕОРЕМА 3. *Для любого дерева G в $H(X)$ и для любой точки a любой его вершины существует подчиненное G точечное дерево $\bar{G} \prec G$, в котором a является вершиной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = (V, E)$. Выберем вершину $B \in V$. По утверждению 3, для любой точки $b \in B$ и для любой смежной с B вершины B' существует точка $b' \in B'$ такая, что $\rho(b, b') \leq d_H(B, B')$. Продолжим процесс следующим образом: для любой вершины B' , в которой уже выбрана точка b' , рассмотрим все смежные с ней вершины B'' , в которых еще не была выбрана точка. По утверждению 3, существует точка $b'' \in B''$ такая, что $\rho(b', b'') \leq d_H(B', B'')$. Из связности дерева G получаем, что за конечное число шагов мы выберем по точке в каждой вершине из V . Дерево с вершинами в выбранных точках и ребрами, соединяющими вершины если и только если соответствующие им вершины из V были смежны, является искомым. Теорема доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если подчиненное дереву G в $H(X)$ точечное дерево $\bar{G} \prec G$ выбрано как в теореме 3, то $d_H(\bar{G}) \leq d_H(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства для каждого ребра следует:

$$d_H(G) = \sum_{B_i B_j \in E, i > j} d_H(B_i, B_j) \geq \sum_{\{b_i\}\{b_j\} \in \bar{E}, i > j} d_H(\{b_i\}, \{b_j\}) = d_H(\bar{G}).$$

$\square$

Введем функцию $\sigma_{a_1 \dots a_n}(k) := \sum_{i=1}^n |a_i k|$, минимальное значение которой будем обозначать через $\sigma_{a_1 \dots a_n}$ (в ограничено компактном пространстве X оно достигается в некоторой точке, согласно теореме 1). Тогда теорему 3 можно переформулировать для астросетей Штейнера следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограничено компактном пространстве $H(X)$, и K — некоторый компакт. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, для любой точки $a_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_H(A_j, K) \geq |a_j k|$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$. В частности, $S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sigma_{a_1 \dots a_n}(k)$.*

Далее мы получим грубую нижнюю оценку на длину минимальной астросети. Для многих границ эта оценка не достигается. Нас же будут интересовать те границы, длина минимальной астросети для которых в точности равняется нижней грани.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограничено компактном пространстве $H(X)$. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется*

$$S_{\mathcal{A}} \geq \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 5, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, для любого $a_i \in A_i$ существуют точка k из астрокомпакта Штейнера K и точки $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что

$$S_{\mathcal{A}} \geq \sigma_{a_1 \dots a_n}(k) \geq \sigma_{a_1 \dots a_n} \geq \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

Поскольку точку $a_i \in A_i$ можно выбрать произвольным образом, то

$$S_{\mathcal{A}} \geq \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Поскольку в утверждении 6 можно зафиксировать любой индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, то справедливо следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда

$$S_{\mathcal{A}} \geq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

Правую часть неравенства из следствия 4 назовем *нижней точечной оценкой* для $S_{\mathcal{A}}$ и обозначим через $\sigma_{\mathcal{A}}$.

3.2. Точечно реализуемые границы

Границу $\mathcal{A}$ назовем *точечно реализуемой*, если существует компакт K такой, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$. Из следствия 4 немедленно получаем следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $\mathcal{A}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда компакт K , для которого верно $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, и $S_{\mathcal{A}} = \sigma_{\mathcal{A}}$.

Поскольку A_i являются компактными, существуют $a'_i \in A_i$, на которых нижняя точечная оценка достигается: $\sigma_{\mathcal{A}} = \sigma_{a'_1 \dots a'_n}$. Все такие упорядоченные наборы $(a'_1, \dots, a'_n)$ назовем *реализующими для $\mathcal{A}$* , или *соответствующими ей*.

Индекс i назовем *реализующим*, если

$$\max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n} = \sigma_{\mathcal{A}}.$$

Точку $a'_i \in A_i$ с реализующим индексом i назовем *i -максимальной*, если

$$\min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \dots a_n} = \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}$$

(она существует, так как A_i — компакт).

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, а точка $a'_i \in A_i$ и компакт K таковы, что

$$S_{\mathcal{A}}(K) = \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \dots a_n}.$$

Тогда K является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, и a'_i является i -максимальной точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 6, для каждого фиксированного $i \in \{1, \dots, n\}$ и любого компакта K выполняется

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}} \geq \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

По условию, для некоторого фиксированного i существует компакт K , для которого выполняется

$$S_{\mathcal{A}}(K) = \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \dots a_n} \leq \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

Следовательно, все неравенства обращаются в равенства. В частности, $S_{\mathcal{A}}(K) = S_{\mathcal{A}}$, то есть K является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, и выполняется равенство из определения i -максимальной точки для a'_i . Утверждение доказано. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда либо она не является точечно реализуемой, либо $\{K : S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}\} = \Sigma(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует компакт K такой, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$.

По утверждению 7, такой компакт является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, то есть $\{K : S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}\} \subset \Sigma(\mathcal{A})$.

Обратно, из точечной реализуемости $\mathcal{A}$ следует существование компакта K такого, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, причем, согласно утверждению 7, K является астрокомпактом Штейнера. Пусть K' — астрокомпакт Штейнера для $\mathcal{A}$, тогда $S_{\mathcal{A}}(K') = S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$. Значит, $\{K : S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}\} \supset \Sigma(\mathcal{A})$.

Теорема доказана. $\square$

Пусть граница $\mathcal{A}$ — точечно реализуемая, K — ее астрокомпакт Штейнера, а набор $(a'_1, \dots, a'_n)$, $a'_j \in A_j$, — реализующий для $\mathcal{A}$. Пусть также существует точка $k \in K$ такая, что $|a'_j k| = d_H(A_j, K)$ для всех $j = 1, \dots, n$. Тогда назовем:

- набор $(a'_1, \dots, a'_n)$ — K -взвешенным набором;
- точку k — реализующей точкой;
- точечную астросеть с вектором вершин $(a'_1, \dots, a'_n, k)$ и астрровершиной k — K -реализующей астросетью.

Астрровершину Штейнера для точечной границы $\{a_1, \dots, a_n\}$ также будем называть *точкой Ферма — Штейнера*.

ТЕОРЕМА 5 (необходимое условие точечной реализуемости границы). Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда для любого астрокомпакта Штейнера K существует K -реализующая астросеть с вектором вершин $(a'_1, \dots, a'_n, k)$, в которой астрровершина k является точкой Ферма — Штейнера для границы $\{a'_1, \dots, a'_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i — реализующий индекс, и пусть $a'_i \in A_i$ — i -максимальная точка, то есть

$$\min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \dots a_n} = \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n}.$$

По утверждению 5, для точки $a'_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a'_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_H(A_j, K) \geq |a'_j k|$ для любого $j = 1, \dots, n$ и $S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sigma_{a'_1 \dots a'_n}(k)$. Получаем:

$$\sigma_{a'_1 \dots a'_n}(k) \leq S_{\mathcal{A}}(K) = \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_n} =$$

$$= \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \dots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \dots a_n} \leq \sigma_{a'_1 \dots a'_n} \leq \sigma_{a'_1 \dots a'_n}(k).$$

Значит, все неравенства обращаются в равенства, поэтому $k \in K$ является точкой Ферма — Штейнера для $\{a'_1, \dots, a'_n\}$, причем $d_H(A_j, K) = |a'_j k|$ для любого $j = 1, \dots, n$. Теорема доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда разным классам одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$ соответствуют различные векторы d длин ребер K_d -реализующих астросетей, где $K_d \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 6. Граница $\mathcal{A}$ точечно реализуема тогда и только тогда, когда некоторый реализующий набор $(a_1, \dots, a_n)$ и его точка Ферма — Штейнера k таковы, что для $d_i = |a_i k|$ и $d = (d_1, \dots, d_n)$ выполняется $S_{\mathcal{A}}(B_d(\mathcal{A})) = \sigma_{\mathcal{A}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из теоремы 5 и того факта, что каноническое расширение астрокомпакта Штейнера равно максимальному астрокомпакту Штейнера из того же класса одинаковой взвешенности. Достаточность следует из определения точечно реализуемой границы. Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Получаем алгоритм определения точечной реализуемости границы $\mathcal{A}$ и, в случае точечной реализуемости, перечисления всех ее максимальных астрокомпактов Штейнера (а значит, и классов одинаковой взвешенности):

1. Вычисляем $\sigma_{\mathcal{A}}$;
2. Находим все реализующие наборы $(a_1, \dots, a_n)$;
3. Находим все точки Ферма — Штейнера k для каждого реализующего набора;
4. Для каждого k строим каноническое расширение компакта $\{k\}$ относительно границы $\mathcal{A}$ и вектора расстояний $d = (|a_1 k|, \dots, |a_n k|)$;
5. Если среди канонических расширений существует компакт K такой, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, то граница $\mathcal{A}$ является точечно реализуемой, компакт K — максимальным астрокомпактом Штейнера, а $\sigma_{\mathcal{A}}$ — длиной минимальной астросети;
6. Все канонические расширения K' , для которых выполняется равенство $S_{\mathcal{A}}(K') = \sigma_{\mathcal{A}}$, являются максимальными астрокомпактами Штейнера в своих классах одинаковой взвешенности, и все классы для границы $\mathcal{A}$ исчерпываются данными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неизвестен ответ на следующий вопрос: верно ли, что для любого реализующего набора и каждой его точки Ферма — Штейнера f существует астрокомпакт Штейнера той же взвешенности и содержащий f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Если K — астрокомпакт Штейнера из класса одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$, а каждая i -максимальная точка $a_i \in A_i$ входит ровно в один K -взвешенный реализующий набор $(a_1, \dots, a_n)$, $a_j \in A_j$, и он имеет единственную точку Ферма — Штейнера f , то f принадлежит всем астрокомпактам из класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i — реализующий индекс, и пусть $a_i \in A_i$ — i -максимальная точка. Пусть K — астрокомпакт Штейнера из условия, а K' — другой астрокомпакт Штейнера из

того же класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$. По теореме 5, существуют реализующие точки $k \in K$ и $k' \in K'$, соответствующие реализующим наборам $(a_1, \dots, a_n)$ и $(a'_1, \dots, a'_{i-1}, a_i, a'_{i+1}, \dots, a'_n)$ и являющиеся для них точками Ферма — Штейнера. Принадлежность K и K' одному классу одинаковой взвешенности влечет равенства $|a'_j k'| = d_H(A_j, K') = d_H(A_j, K) = |a_j k|$ для всех $j = 1, \dots, n$, поэтому оба набора являются K -взвешенными. По условию, для такой a_i существует единственный K -взвешенный реализующий набор, а поэтому $a'_j = a_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. Более того, из условия единственности точки Ферма — Штейнера для такого набора следует, что $k' = k = f$. Значит, f является общей точкой всех астрокомпактов Штейнера из класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Утверждение доказано. $\square$

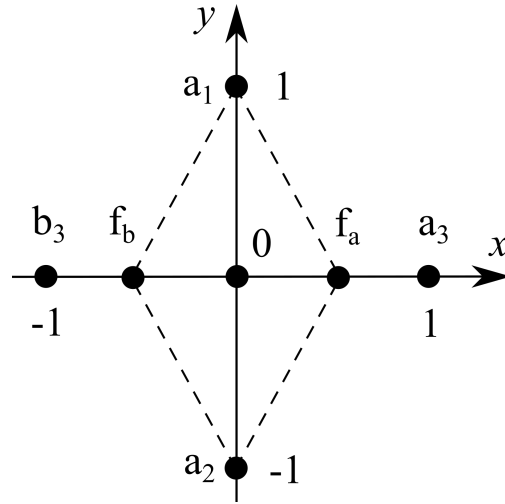


Рис. 1: К замечанию 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Применим теорию к определению точечной реализуемости границы. Пусть в $\mathbb{R}^2$ даны точки $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (0, -1)$, $a_3 = (1, 0)$, $b_3 = (-1, 0)$ (см. рис. 1). Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$, где $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$, $A_3 = \{a_3, b_3\}$. Тогда при $i = 1$ верно

$$\max_{c_1 \in A_1} \min_{c_j \in A_j, j \neq 1} \sigma_{c_1 c_2 c_3} = \min\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}\} = \sigma_{a_1 a_2 a_3} = \sigma_{a_1 a_2 b_3}.$$

В силу имеющихся симметрий,

$$\max_{c_2 \in A_2} \min_{c_j \in A_j, j \neq 2} \sigma_{c_1 c_2 c_3} = \sigma_{a_1 a_2 a_3}.$$

При $i = 3$ имеем:

$$\max_{c_3 \in A_3} \min_{c_j \in A_j, j \neq 3} \sigma_{c_1 c_2 c_3} = \max\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}\} = \sigma_{a_1 a_2 a_3}.$$

Значит, $\sigma_{\mathcal{A}} = \sigma_{a_1 a_2 a_3} = \sigma_{a_1 a_2 b_3}$.

Согласно теореме 5, необходимым условием точечной реализуемости границы $\mathcal{A}$ является принадлежность ее астрокомпакту Штейнера K точки Ферма — Штейнера k каждой K -реализующей точечной астросети с вектором вершин (c_1, c_2, c_3, k) , $c_i \in A_i$. Поэтому рассмотрим точки Ферма — Штейнера для наборов (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, b_3) и обозначим их через f_a и f_b соответственно. Пусть $K = \{f_a, f_b\}$. Непосредственной проверкой получим, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{a_1 a_2 a_3}$, следовательно, по определению, $\mathcal{A}$ является точечно реализуемой границей. У нее есть два реализующих набора (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, b_3) , а K является астрокомпактом

Штейнера. По утверждению 9, f_a и f_b принадлежат всем астрокомпактам Штейнера из класса одинаковой взвешенности, содержащего K , поэтому K — минимальный астрокомпакт Штейнера. Поскольку не существует других точечных минимальных астросетей, соединяющих наборы (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, b_3) , то, согласно следствию 5, этот класс одинаковой взвешенности — единственный.

3.3. Структура решений задачи Ферма — Штейнера для однотоочечных граничных компактов

Из следствия 3 вытекает следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Длина минимальной параметрической сети для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в пространстве X равна длине минимальной параметрической сети той же топологии для границы $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$.*

В частности, следствие верно для минимальной параметрической астросети. Кроме того, поскольку кратчайшее дерево можно получить перебором минимальных параметрических сетей, то справедливо

СЛЕДСТВИЕ 7. *Длина кратчайшего дерева для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в пространстве X равна длине кратчайшего дерева для границы $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$.*

ТЕОРЕМА 7. *Пусть для некоторого множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из X не существует двух разных кратчайших деревьев одной и той же топологии. Тогда в каждом кратчайшем дереве, соединяющем $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$, все компакты Штейнера — однотоочечные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{K}, E)$ — кратчайшее дерево в $H(X)$, $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ — внутренние вершины G . Если внутренняя вершина K содержит хотя бы две различные точки k_1 и k_2 , то, по теореме 3, существуют два разных дерева $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$, содержащих k_1 и k_2 в качестве вершин и, соответственно, два разных дерева $\nu^{-1}(\bar{G}_1)$ и $\nu^{-1}(\bar{G}_2)$. По следствию 6, $\nu^{-1}(\bar{G}_1)$ и $\nu^{-1}(\bar{G}_2)$ являются кратчайшими деревьями и имеют одну и ту же топологию. Последнее противоречит условию. Значит, $K = \{k\}$, откуда все компакты Штейнера являются однотоочечными множествами: $K_j = \{k_j\}$ для любого $j = 1, \dots, m$. Теорема доказана. $\square$

Как известно, в пространстве $X = \mathbb{R}^m$ для любого множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ не существует двух кратчайших деревьев одной и той же топологии. Учитывая это, из теоремы 7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8. *В каждом кратчайшем дереве, соединяющем границу $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(\mathbb{R}^m)$, все компакты Штейнера — однотоочечные.*

Для минимальных параметрических астросетей возможно получить критерий однотоочечности астрровершины Штейнера.

ТЕОРЕМА 8 (критерий однотоочечности астрровершины Штейнера для однотоочечной границы в $H(X)$). *Для множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из X существует хотя бы две различные астрровершины Штейнера в одном классе одинаковой взвешенности тогда и только тогда, когда для границы $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$ существует неоднотоочечная астрровершина Штейнера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_1, k_2 — различные астрровершины Штейнера из одного класса одинаковой взвешенности для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в X , следовательно, для каждого i верно $\rho(k_1, a_i) = \rho(k_2, a_i)$. Тогда для каждого i верно $d_H(\{k_1, k_2\}, \{a_i\}) = d_H(\{k_1\}, \{a_i\}) =$

$\rho(k_1, a_i)$, откуда $S_A(\{k_1, k_2\}) = S_A(\{k_1\}) = S_A$. Согласно следствию 6, $S_A = S_A$, откуда следует, что $\{k_1, k_2\}$ является астрровершиной Штейнера для A .

Обратно, пусть существует астрровершина K для границы A , содержащая хотя бы две различные точки k_1 и k_2 . По утверждению 3, для каждого i выполняются неравенства $\rho(k_1, a_i) \leq d_H(K, \{a_i\})$ и $\rho(k_2, a_i) \leq d_H(K, \{a_i\})$. Тогда $S_A(\{k_1\}) = S_A(k_1) \leq S_A(K)$ и $S_A(\{k_2\}) = S_A(k_2) \leq S_A(K) = S_A$, значит, компакты $\{k_1\}$ и $\{k_2\}$ также являются астрровершинами Штейнера и все неравенства обращаются в равенства. Тогда $\rho(k_1, a_i) = \rho(k_2, a_i)$ для каждого i , поэтому k_1 и k_2 являются астрровершинами Штейнера для границы A и лежат в одном классе одинаковой взвешенности.

Теорема доказана. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго или нестрого выпуклой нормой ρ . Тогда для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в X каждый класс одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$ является выпуклым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Sigma_d(A)$ состоит из одного элемента, то оно выпукло. Если в $\Sigma_d(A)$ содержится два различных решения x_1 и x_2 . Так как функция расстояния в X выпуклая, то сумма расстояний от любой точки $x \in [x_1, x_2]$ до $\{a_1, \dots, a_n\}$ не превышает S_A , а из минимальности функции $S_A(x)$ в точках x_1 и x_2 следует, что $S_A(x) = S_A(x_1) = S_A$. Значит, весь отрезок $[x_1, x_2]$ содержится в $\Sigma_d(A)$, откуда следует, что $\Sigma_d(A)$ — выпуклое множество. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго выпуклой нормой ρ . Тогда все астрровершины Штейнера для границы $A = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$ — одноточечные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если x является решением из класса одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$ с $d = (r_1, \dots, r_n)$, где $r_i = \rho(a_i, x)$, то x лежит в пересечении всех сфер с центрами в a_i и радиусами r_i . Если в классе $\Sigma_d(A)$ содержится два различных решения x_1 и x_2 , то, по утверждению 10, $\Sigma_d(A)$ является выпуклым множеством, поэтому в нем содержится и отрезок $[x_1, x_2]$. Из определения строго выпуклой нормы следует, что внутренность отрезка с концами на сфере не содержится в сфере, следовательно, получили противоречие. Таким образом, каждый класс $\Sigma_d(A)$ состоит из одной точки. Используя критерий из теоремы 8, получаем, что в $H(X)$ не возникает дополнительных решений, отличных от соответствующих решений в X . Следствие доказано. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 10. Все астрокомпакты Штейнера для границы $A = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(\mathbb{R}^m)$ — одноточечные.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго выпуклой нормой ρ . Тогда граница $A = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ в $H(X)$ имеет либо единственное решение, либо континуум классов одинаковой взвешенности, каждый из которых состоит из одного элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в X существует единственное решение, то согласно критерию из теоремы 8, решение для A одноточечное и потому определено однозначно.

Пусть для границы A существует хотя бы два различных решения $x_1 \neq x_2$. Из утверждения 10 следует, что в $\Sigma(A)$ содержится и весь отрезок $[x_1, x_2]$. Согласно следствию 9, в каждом классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$ содержится ровно одно решение. Таким образом, для каждого $x \in [x_1, x_2]$ существует класс, состоящий из x . Тогда, согласно критерию из теоремы 8, решение для A в каждом классе одноточечное и потому определено однозначно. Значит, число классов континуально.

Утверждение доказано. $\square$

Проиллюстрируем важность строгой выпуклости нормы. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с невыпуклой тах-нормой рассмотрим границу $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ такую, что a_i лежат в плоскости Oxy и что для нее существует астрове́ршина Штейнера k , лежащая в Oxy , для которой все $\rho(a_i, k) > 0$. Тогда k принадлежит сферам с центрами в a_i радиуса $\rho(a_i, k)$. В пространстве с тах-нормой сферами являются поверхности кубов, параллельных координатным осям. Поскольку ребра всех трех кубов положительной длины, центры кубов лежат в одной плоскости, а поверхности кубов имеют общую точку, то они пересекаются по некоторому отрезку T . Тогда любое непустое подмножество отрезка T является астрове́ршиной Штейнера для A , и все они принадлежат одному классу одинаковой взвешенности.

Продemonстрируем важность нормированности пространства. Рассмотрим ненормированное метрическое пространство W , состоящее из двух единичных кругов $B_1(o_1)$ и $B_1(o_2)$ из $\mathbb{R}^2$, у которых отождествлены границы: $\partial B_1(o_1) = \partial B_1(o_2)$. Метрику на W определим равной евклидовой метрике ρ для x_1, x_2 из одного круга и равной $\min_{y \in \partial B_1(o_1)} (\rho(x_1, y) + \rho(x_2, y))$ для x_1, x_2 из разных кругов (это фактор-метрика относительно изометрии $b = f(a)$, где f — отождествление границ кругов, о фактор-метрике см. [13]). Рассмотрим границы $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathcal{A} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$, где точки a_1, a_2, a_3 лежат на $\partial B_1(o)$ и попарно равноудалены. Граница A имеет две различные астрове́ршины Штейнера, o_1 и o_2 , в одном классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$, где $d = (1, 1, 1)$. Пусть K — астрове́ршина Штейнера для границы $\mathcal{A}$. Из теоремы 3 следует, что $S_A \leq S_{\mathcal{A}}$. Длина минимального дерева Штейнера для границы $\{a_1, a_2, a_3\}$ на круге $B_1(o_1)$ равна 3. Поскольку $S_{\mathcal{A}}(\{o_1, o_2\}) = 3$, то $\{o_1, o_2\}$ является астрокомпактом Штейнера для границы $\mathcal{A}$ в $H(W)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрим ненормированное метрическое пространство W , состоящее из $\{B_1(o_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ из $\mathbb{R}^2$, у которых отождествлены границы, и введем фактор-метрику. Тогда для границы $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, где точки a_1, a_2, a_3 лежат на $\partial B_1(o)$ и попарно равноудалены, в $H(W)$ существует астрове́ршина Штейнера для границы $\mathcal{A}$ мощности, равной мощности Λ . При этом максимальная астрове́ршина Штейнера в этом пространстве не определена.

4. Примеры 1-параметрических семейств точек реализующих границ в $H(\mathbb{R}^2)$

В данном разделе мы рассмотрим некоторые семейства точек реализующих границ в $H(\mathbb{R}^2)$ и исследуем бифуркации множества астрокомпактов Штейнера при 1-параметрической деформации границ. Заметим, что в случае трехэлементных границ компакты Штейнера одновременно являются астрокомпактами Штейнера, поэтому мы будем использовать их свойства, но пользоваться первым названием.

Нам потребуется вспомогательное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ — граница в метрическом пространстве (X, ρ) и для $k \geq \frac{n}{2}$ выполняется $a_{n-k+1} = \dots = a_n$. Тогда единственной астрове́ршиной Штейнера для $\mathcal{A}$ является a_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $x \in X$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}(x) &= \sum_{i=1}^{n-k} \left(\rho(a_i, x) + \rho(a_{n-k+i}, x) \right) + \sum_{i=2n-2k+1}^n \rho(a_i, x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \left(\rho(a_i, x) + \rho(a_n, x) \right) + (2k - n) \rho(a_n, x) \geq \sum_{i=1}^{n-k} \rho(a_i, a_n) = S_{\mathcal{A}}(a_n). \end{aligned}$$

Таким образом, $S_{\mathcal{A}}$ достигается на a_n , поэтому a_n является астрровершиной Штейнера. Заметим, что последнее неравенство обращается в равенство только когда $\rho(a_n, x) = 0$, поэтому других астрровершиной Штейнера нет. Утверждение доказано. $\square$

4.1. Пример с единственным классом одинаковой взвешенности и непостоянным числом минимальных компактов Штейнера

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_r \subset H(\mathbb{R}^2)$, состоящую из двух одноточечных компактов $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$ и отрезка $A_3 = [t_1, t_2]$, которые расположены следующим образом. Введем декартову систему координат так, что $a_1 = (0, r)$, $a_2 = (0, -r)$, $t_1 = (-1, 0)$, $t_2 = (1, 0)$, где $r \in \mathbb{R}$ — неотрицательный параметр. Пусть K — компакт Штейнера для $\mathcal{A}_r$ из класса $\Sigma_d(\mathcal{A}_r)$, он существует по следствию 2. Обозначим через d_i величину $d_H(A_i, K)$, $i = 1, 2$. Обозначим через f_i точку Ферма — Штейнера для тройки точек $\{a_1, a_2, t_i\}$.

ТЕОРЕМА 9 (решение задачи Штейнера для границы $\mathcal{A}_r$). *Множество всех компактов Штейнера $\Sigma(\mathcal{A}_r)$ состоит из единственного класса $\Sigma_d(\mathcal{A}_r)$, где*

$$d = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}r, \frac{2}{\sqrt{3}}r, 1 - \frac{r}{\sqrt{3}} \right), & \text{если } r \in [0, \sqrt{3}]; \\ \left(\sqrt{r^2 + 1}, \sqrt{r^2 + 1}, 0 \right), & \text{если } r \in [\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

При $r > 0$ максимальный компакт Штейнера является выпуклым и имеет мощность континуума, а при $r = 0$ он является одноточечным. Множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ минимальных компактов Штейнера устроено следующим образом:

1. при $r = 0$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ совпадает с $\Sigma(\mathcal{A}_r)$ и состоит из единственного одноточечного элемента $A_1 = A_2$ (см. рисунок 2);
2. при $r \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ состоит из единственного двухточечного элемента $\{f_1, f_2\}$ (см. рисунок 3);
3. при $r \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ имеет мощность континуума, каждый его элемент — конечный и состоит из точек f_1, f_2 и центров кругов, составляющих минимальное покрытие множества $[f_1, f_2] \setminus B_{|t_1 f_1|}(\{f_1, f_2\})$, причем минимальная мощность этих элементов равна $\lceil \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-r} \rceil$ (см. рисунок 4);
4. при $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ совпадает с $\Sigma(\mathcal{A}_r)$ и состоит из единственного элемента A_3 (см. рисунок 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатами из раздела 3. Вычислим $\sigma_{\mathcal{A}_r}$. Несложно проверить, что

$$\max_{a'_1 \in A_1} \min_{a'_j \in A_j, j \neq 1} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \max_{a'_2 \in A_2} \min_{a'_j \in A_j, j \neq 2} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = |a_1 a_2| = 2r,$$

$$\max_{a'_3 \in A_3} \min_{a'_j \in A_j, j \neq 3} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \sigma_{a_1 a_2 t_1} = \sigma_{a_1 a_2 t_2} > 2r.$$

Поэтому $\sigma_{\mathcal{A}_r} = \sigma_{a_1 a_2 t_1}$.

Из алгоритмического построения точек Ферма — Штейнера и имеющихся симметрий точек a_1, a_2 относительно оси абсцисс и точек t_1, t_2 относительно оси ординат вытекают равенства

$|t_1 f_1| = |t_2 f_2|$ и $|a_1 f_1| = |a_1 f_2| = |a_2 f_1| = |a_2 f_2|$, а также тот факт, что f_i лежит на отрезке $[o, t_i]$, $i = 1, 2$. Заметим, что для $i = 1, 2$ верно равенство

$$d_H(A_i, [f_1, f_2]) = \sup_{f \in [f_1, f_2]} |a_i f| = |a_i f_1|.$$

Поскольку $[f_1, f_2] \subset [t_1, t_2]$, то

$$d_H(A_3, [f_1, f_2]) = \sup_{t \in [t_1, t_2]} \inf_{f \in [f_1, f_2]} |tf| = |t_1 f_1|.$$

Поэтому $S_{\mathcal{A}_r}([f_1, f_2]) = \sigma_{a_1 a_2 t_1}$. Значит, граница $\mathcal{A}_r$ является точечно реализуемой и, согласно утверждению 7, $[f_1, f_2]$ является компактом Штейнера. Единственность класса $\Sigma_d(\mathcal{A}_r)$ одинаковой взвешенности, содержащего $[f_1, f_2]$, вытекает из следствия 5 и единственности точки Ферма — Штейнера для каждой тройки точек $\{a_1, a_2, t_i\}$, $i = 1, 2$. Здесь $d = (d_1, d_2, d_3)$, где $d_1 = d_2 = |a_i f_j|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $d_3 = |t_1 f_1| = |t_2 f_2|$.

Непосредственными вычислениями найдем длины d_i при разных значениях параметра r . При $r \in [0, \sqrt{3}]$ расстояния $d_i = d_H(\{a_i\}, [f_1, f_2])$ равны по $\frac{2}{\sqrt{3}}r$, $i = 1, 2$, а $d_3 = d_H([t_1, t_2], [f_1, f_2]) = 1 - \frac{r}{\sqrt{3}}$. При $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$ расстояние $d_3 = d_H([t_1, t_2], [f_1, f_2])$ равно 0, а расстояния $d_i = d_H(\{a_i\}, [f_1, f_2])$ по теореме Пифагора равны $\sqrt{r^2 + 1}$. Тогда длина минимального дерева Штейнера $S_{\mathcal{A}_r}$ выражается следующим образом:

$$S_{\mathcal{A}_r} = \begin{cases} 1 + \sqrt{3}r, & \text{если } r \in [0, \sqrt{3}]; \\ 2\sqrt{r^2 + 1}, & \text{если } r \in [\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

Эта функция возрастает при $r \in [0, +\infty)$.

Максимальный компакт Штейнера $K_{\max}$ при всех значениях r равен, согласно теореме 2, компакт $B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}([t_1, t_2])$. При $r > 0$ он выпуклый и имеет мощность континуума. При $r = 0$ происходит совпадение точек a_1 и a_2 (а значит, и точек f_i) с серединой отрезка $[t_1, t_2]$. Следовательно, $d_1 = d_2 = 0$ и максимальный компакт равен одноточечному компакт $A_1 = A_2$.

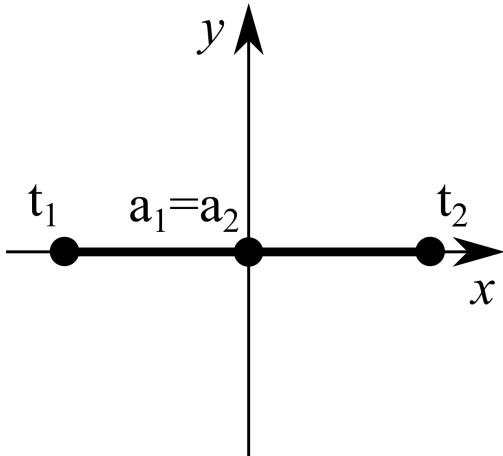


Рис. 2: Случай $r = 0$

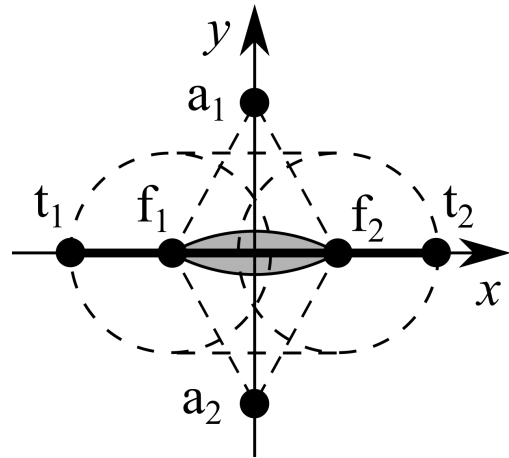


Рис. 3: Случай $r \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

Теперь для каждого значения параметра r найдем все минимальные компакты Штейнера.

Случай 1. При $r = 0$, как показано выше, максимальный компакт Штейнера совпадает с одноточечным компакт $A_1 = A_2$, поэтому он является единственным элементом в $\Sigma(\mathcal{A}_0)$ (см. рисунок 2).

Случай 2. При $r \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ (см. рисунок 3) выполняется $|t_i f_i| \in [\frac{1}{2}, 1)$, поэтому, с учетом равенства $d_3 = |t_i f_i|$, верно включение $[t_1, t_2] \subset B_{d_3}(\{f_1, f_2\})$. Кроме того, очевидно, что $\{f_1, f_2\} \subset B_{d_3}([t_1, t_2])$. Тогда выполняется $d_H([t_1, t_2], \{f_1, f_2\}) \leq d_3 = d_H([t_1, t_2], [f_1, f_2])$. Поскольку $d_H(\{a_i\}, \{f_1, f_2\}) = d_H(\{a_i\}, [f_1, f_2])$, верно неравенство $S_{\mathcal{A}_r}(\{f_1, f_2\}) \leq S_{\mathcal{A}_r}([f_1, f_2])$, и из минимальности функции $S_{\mathcal{A}_r}$ на компакте $[f_1, f_2]$ следует, что $\{f_1, f_2\}$ также является компактом Штейнера. Он является минимальным, так как удаление из него любой точки приведет, очевидно, к увеличению расстояния до $[t_1, t_2]$ при сохранении расстояний до $\{a_i\}$.

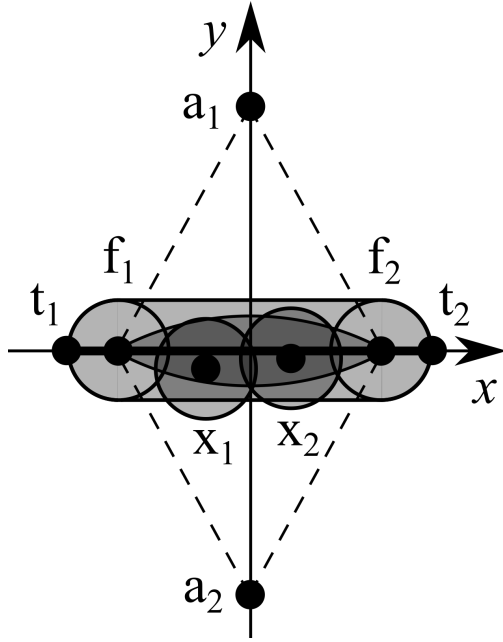


Рис. 4: Случай $r \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$

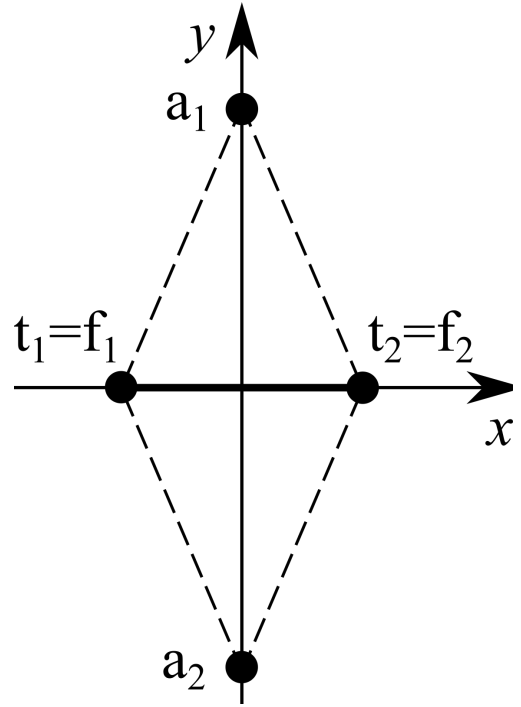


Рис. 5: Случай $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$

Случай 3. При $r \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ (см. рисунок 4) выполняется $|t_i f_i| \in (0, \frac{1}{2})$, поэтому компакт $B_{d_3}(\{f_1, f_2\})$ не покрывает $[t_1, t_2]$. Рассмотрим всевозможные минимальные покрытия отрезка $T := [t_1, t_2] \setminus B_{d_3}(\{f_1, f_2\})$ открытыми кругами радиуса d_3 с центрами, лежащими в $K_{\max}$. Поскольку T — компакт, каждое такое покрытие является конечным. Рассмотрим замыкания этих кругов; если покрытие перестало быть минимальным, то удалим избыточные круги. Центры оставшихся кругов обозначим через $\{x_1, \dots, x_n\}$. Таким образом, компакт $\{f_1, f_2, x_1, \dots, x_n\}$ является минимальным компактом Штейнера.

Посчитаем наименьшую возможную мощность минимального компакта Штейнера в этом случае. Пересечение отрезка T и круга $B_{d_3}(x_i)$, где x_i — точка из минимального компакта Штейнера, является отрезком длины, не превышающей $2d_3$. Поскольку отрезок T имеет длину $2 - 4d_3$, то для его покрытия требуется $\lceil \frac{2-4d_3}{2d_3} \rceil = \lceil \frac{1}{d_3} \rceil - 2$ кругов. Ещё два круга, $B_{d_3}(f_1)$ и $B_{d_3}(f_2)$, покрывают оставшуюся часть отрезка $[t_1, t_2]$, поэтому наименьшая возможная мощность минимального компакта Штейнера равна $\lceil \frac{1}{d_3} \rceil = \lceil \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-r} \rceil$.

Докажем теперь, что множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ минимальных компактов Штейнера имеет мощность континуума.

Скажем, что точка $t \in T$ имеет *кратность* k , если она принадлежит k разным элементам покрытия $\{B_{d_3}(x_i)\}_{i=1}^{m'}$. Покрытие $\{B_{d_3}(x_i)\}_{i=1}^{m'}$ является минимальным для T тогда и только тогда, когда для каждого i существует точка $t \in T \cap B_{d_3}(x_i)$ кратности 1. Это также

равносильно условию, что $\{x_1, \dots, x_{m'}\}$ является минимальным компактом Штейнера.

Заметим, что для любого $f = |f_1 f_2| > 2d_3$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $f \in (md_3, (m+1)d_3]$. Поскольку $m+1 < 2k$ при $m > 1$, то $md_3 < f < 2md_3$. Расположим на $[f_1, f_2]$ точки $x_1 = f_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1} = f_2$ так, чтобы для $i = 1, \dots, m$ выполнялось $|x_m x_{m+1}| = \frac{|f_1 f_2|}{m} = t$. Из доказанного выше следует, что $d_3 < t < 2d_3$. Условие $t > d_3$ означает, что в некоторой $U_{\varepsilon_i}(x_i)$ содержатся только точки кратности 1, $i = 1, \dots, m+1$. Условие $t < 2d_3$ означает, что в некоторой $U_{\delta_i}(y_i)$, где y_i — середина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, содержатся только точки кратности 2, $i = 2, \dots, m$. Так как неравенства строгие, а функция расстояния — непрерывная, то для любой точки $x'_2 \in U_{\min\{\varepsilon_i, \delta_{i+1}\}}(x_2)$ неравенства $d_3 < |x'_2 x_1| < 2d_3$ и $d_3 < |x'_2 x_3| < 2d_3$ также будут строгими. Значит, заменив в минимальном компакте $\{x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\}$ точку x_2 на x'_2 , мы получим новый минимальный компакт Штейнера. Поскольку существует континуум способов выбрать точку x'_2 , то $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ имеет мощность континуума.

Случай 4. Наконец, при $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$ точка f_i совпадает с точкой t_i , $i = 1, 2$ (см. рисунок 5), откуда следует, что $d_H([t_1, t_2], [f_1, f_2]) = 0$. Значит, для любого компактного подмножества L такого, что $\{t_1, t_2\} \subset L \subset [t_1, t_2]$, расстояние $d_H([t_1, t_2], L) > d_3 = 0$, а $d_H(\{a_i\}, L) = d_H(\{a_i\}, \{t_1, t_2\}) = d_i$, $i = 1, 2$. Значит, L не является компактом Штейнера, поэтому $[t_1, t_2]$ — минимальный.

Теорема доказана. $\square$

4.2. Пример, для которого число классов одинаковой взвешенности непостоянно и конечно

Нам потребуется вспомогательные утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть t_1, t_2 — точки на окружности $\partial B_1(o)$, прямая l проходит через o и перпендикулярна $[t_1, t_2]$. Тогда при движении точки q по большой дуге окружности $\partial B_1(o)$ с концами t_1 и t_2 от точки t_2 до пересечения с прямой l значение $\sigma_{t_1 t_2 q}$ строго монотонно увеличивается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим правильный треугольник $\Delta t_0 t_1 t_2$ так, что отрезок $[o, t_0]$ пересекается с $[t_1, t_2]$. Пусть q_0 — точка пересечения прямой $t_0 t_2$ и окружности $\partial B_1(o)$, отличная от t_2 (см. рисунок 6).

Пусть сначала q лежит на малой дуге окружности $\partial B_1(o)$ с концами t_2 и q_0 (на рисунке такая q обозначена через q_1). Поскольку $\angle t_1 t_2 q_0 = \frac{2\pi}{3}$, то $\angle t_1 t_2 q > \frac{2\pi}{3}$. Значит, для таких q выполняется $\sigma_{t_1 t_2 q} = |t_1 t_2| + |t_2 q|$. Тогда при движении q по малой дуге окружности от t_2 к q_0 значение $|t_2 q|$ строго монотонно возрастает, а значит, строго монотонно возрастает значение $\sigma_{t_1 t_2 q}$.

Теперь пусть q лежит на малой дуге окружности $\partial B_1(o)$ между q_0 и точкой пересечения окружности с прямой l (на рисунке такая q обозначена через q_2). Построим отрезок $[t_0, q]$, он является линией Симпсона и его длина, как известно (см. [16]), равняется $\sigma_{t_1 t_2 q}$. В треугольнике $\Delta t_0 o q$ при движении q по дуге окружности сохраняются длины сторон $[t_0, o]$ и $[o, q]$, а угол $\angle t_0 o q$ увеличивается, следовательно, увеличивается длина стороны $[t_0, q]$. Таким образом, $\sigma_{t_1 t_2 q}$ строго монотонно возрастает.

Утверждение доказано. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть t_1, t_2, q_1, q_2 — точки на окружности $\partial B_1(o)$, причем q_1, q_2 лежат на большой дуге с концами t_1, t_2 . Если длина дуги с концами q_1 и ближайшей к q_1 точке t_i меньше, чем длина дуги с концами q_2 и ближайшей к q_2 точке t_i , то $\sigma_{t_1 t_2 q_1} < \sigma_{t_1 t_2 q_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l — серединный перпендикуляр к отрезку $[t_1, t_2]$. Если q_1, q_2 лежат по одну сторону от прямой l , то, согласно утверждению 13, $\sigma_{t_1 t_2 q_1} < \sigma_{t_1 t_2 q_2}$. Если q_1, q_2

разделены прямой l , то построим точку q'_1 симметрично l , для нее справедливо неравенство $\sigma_{t_1 t_2 q'_1} = \sigma_{t_1 t_2 q_1}$. Поскольку q'_1 попадает на малую дугу с концами в q_2 и ближайшей к q_2 точке t_i , то, по утверждению 13, $\sigma_{t_1 t_2 q'_1} < \sigma_{t_1 t_2 q_2}$, откуда получаем требуемое неравенство. Следствие доказано. $\square$

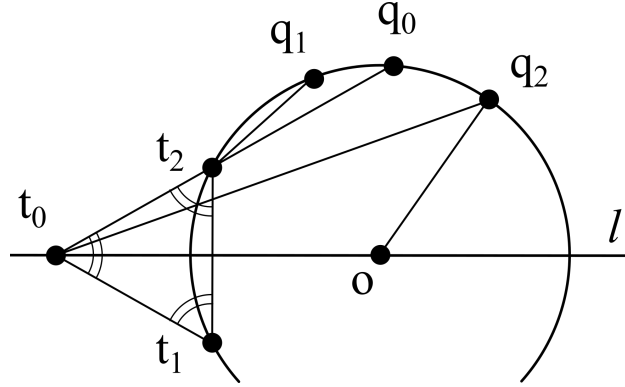


Рис. 6: К утверждению 13.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$, где $A_i = \{a_i, b_i\}$, $|a_i b_i| = 2$, $\{a_1, b_1\}$ и $\{a_3, b_3\}$ получаются из $\{a_2, b_2\}$ поворотом относительно середины o отрезка $[a_2, b_2]$ на углы $-\alpha$ и α соответственно, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (см. рисунок 7).

ТЕОРЕМА 10. В сделанных выше обозначениях,

$$S_{\mathcal{A}_\alpha} = \begin{cases} \sigma_{a_1 a_2 a_3} = 4 \sin \frac{\alpha}{2}, & \text{если } \alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]; \\ \sigma_{a_1 a_2 b_3} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \alpha, & \text{если } \alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, строго монотонно возрастает от 0 до 2 при $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, строго монотонно убывает от 2 до $\sqrt{2}$ при $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ и дифференцируема на $(0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

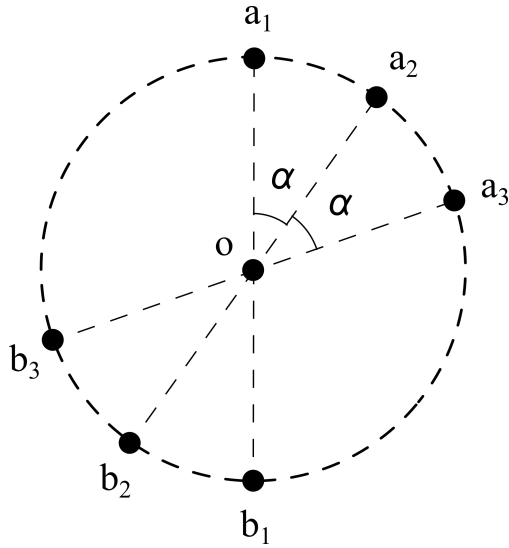
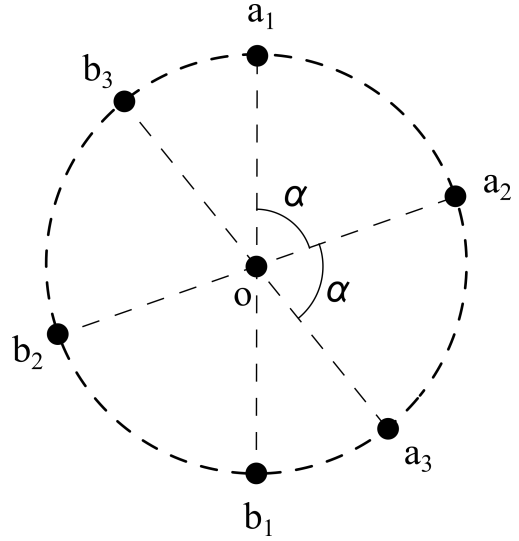
Каждый класс одинаковой взвешенности состоит ровно из одного компакта, совпадающего с одним из граничных компактов. Подробная характеристика множеств $\Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$ приведена в таблице:

α	$N_{cl}(\mathcal{A}_\alpha)$	$A_1 \in \Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$	$A_2 \in \Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$	$A_3 \in \Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$
0	1	+	+	+
$(0, \frac{\pi}{3})$	1	—	+	—
$\frac{\pi}{3}$	3	+	+	+
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	2	+	—	+
$\frac{\pi}{2}$	1	+	—	+

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1. При $\alpha = 0$ все граничные компакты совпадают, поэтому, согласно утверждению 12, единственным компактом Штейнера является граничный компакт $A_1 = A_2 = A_3$, и $S_{\mathcal{A}_\alpha} = 0$.

Случай 2. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ совпадают два граничных компакта: $A_1 = A_3$, поэтому, согласно утверждению 12, единственным компактом Штейнера является граничный компакт $A_1 = A_3$, и $S_{\mathcal{A}_\alpha} = d_H(A_1, A_2)$. Поскольку $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ — перпендикулярные диаметры окружности, то $d_H(A_1, A_2) = \sqrt{2}$.

Случай 3. При $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ вычислим $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha}$. В силу имеющихся симметрий достаточно взять максимум по $i \in \{1, 2\}$, а в каждом из вариантов фиксировать $a'_i = a_i$.

Рис. 7: Случай $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$.Рис. 8: Случай $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Если $i = 1$, то

$$\min_{a'_j \in A_j, j \neq 1} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \min\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 b_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}, \sigma_{a_1 b_2 b_3}\},$$

причем $\sigma_{a_1 a_2 b_3} = \sigma_{a_1 b_2 b_3}$.

Если $i = 2$, то

$$\min_{a'_j \in A_j, j \neq 2} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \min\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{b_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}, \sigma_{b_1 a_2 b_3}\},$$

причем $\sigma_{a_1 a_2 b_3} = \sigma_{b_1 a_2 a_3}$.

Поскольку $\triangle a_1 a_2 a_3$ и $\triangle a_1 b_2 a_3$ — равнобедренные треугольники с общим основанием $a_1 a_3$ и соотношением боковых сторон $|a_1 b_2| > |a_1 a_2|$, то $\sigma_{a_1 b_2 a_3} > \sigma_{a_1 a_2 a_3}$. Поскольку также $\sigma_{b_1 a_2 b_3} = \sigma_{a_1 b_2 a_3}$, то на этих значениях не могут достигаться минимумы. Осталось сравнить $\sigma_{a_1 a_2 b_3}$ и $\sigma_{a_1 a_2 a_3}$ при разных значениях α , используя утверждение 13.

Случай 3.1. При $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$ малая дуга с концами a_2 и a_3 короче, чем малая дуга с концами a_1 и b_3 (см. рис. 7), поэтому $\sigma_{a_1 a_2 b_3} > \sigma_{a_1 a_2 a_3}$. Значит, оба минимума и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha}$, равны $\sigma_{a_1 a_2 a_3}$.

Кроме того, при данных α выполняется $\angle a_1 a_2 a_3 = \pi - \alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$, поэтому $\sigma_{a_1 a_2 a_3} = |a_1 a_2| + |a_2 a_3|$ и a_2 является точкой Ферма — Штейнера для (a_1, a_2, a_3) . С учетом симметрий, $\sigma_{a_1 a_2 a_3} = \sigma_{b_1 b_2 b_3} = |b_1 b_2| + |b_2 b_3|$ и b_2 является точкой Ферма — Штейнера для (b_1, b_2, b_3) . Заметим, что $S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_2) = \sigma_{a_1 a_2 a_3}$, поэтому $\mathcal{A}_\alpha$ — точно реализуемая граница, и, согласно утверждению 7, A_2 является компактом Штейнера. Обе A_2 -реализующие астросети имеют вектор длин ребер $d = (|a_1 a_2|, 0, |a_2 a_3|)$, поэтому, с учетом следствия 5, класс одинаковой взвешенности единственный.

Случай 3.2. При $\alpha = \frac{\pi}{3}$ длина малой дуги с концами a_2 и a_3 равна длине малой дуги с концами a_1 и b_3 (см. рис. 8), поэтому $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha} = \sigma_{a_1 a_2 b_3} = \sigma_{a_1 a_2 a_3}$.

Поскольку $\angle a_1 a_2 a_3 = \frac{2\pi}{3}$, то $\sigma_{a_1 a_2 a_3} = |a_1 a_2| + |a_2 a_3|$ и a_2 является точкой Ферма — Штейнера для (a_1, a_2, a_3) . С учетом симметрий, каждая из шести точек $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ является точкой Ферма — Штейнера для набора, состоящего из нее и двух ближайших. Заметим, что $S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_i) = \sigma_{a_1 a_2 a_3} = 2$ для каждого $i = 1, 2, 3$, поэтому $\mathcal{A}_\alpha$ — точно реализуемая граница, и, согласно утверждению 7, A_i является компактом Штейнера. Для каждого i существуют ровно

две A_i -реализующие астросети с одинаковым вектором длин ребер, поэтому, с учетом следствия 5, существует три класса одинаковой взвешенности, соответствующие векторам $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.

Случай 3.3. При $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ малая дуга с концами a_1 и b_3 короче, чем малая дуга с концами a_2 и a_3 , поэтому $\sigma_{a_1a_2a_3} > \sigma_{a_1a_2b_3}$ и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha} = \sigma_{a_1a_2b_3}$.

Кроме того, при данных α выполняется $\angle b_3a_1a_2 = \pi - \angle b_3b_1a_2 = \pi - \frac{1}{2}\angle b_3oa_2 = \frac{\pi+\alpha}{2} \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$, поэтому $\sigma_{a_1a_2b_3} = |a_1a_2| + |a_1b_3|$ и a_1 является точкой Ферма — Штейнера для (a_1, a_2, b_3) . С учетом симметрий, $\sigma_{a_1a_2b_3} = \sigma_{a_1b_2b_3} = |b_1b_2| + |b_2b_3|$ и b_3 является точкой Ферма — Штейнера для (b_1, b_2, b_3) . Аналогично, a_3 и b_1 являются точками Ферма — Штейнера для (b_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, a_3) соответственно. Заметим, что $S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_1) = S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_3) = \sigma_{a_1a_2b_3}$, поэтому $\mathcal{A}_\alpha$ — точно реализуемая граница, и, согласно утверждению 7, A_1 и A_3 являются компактными Штейнера. Обе A_1 -реализующие астросети имеют вектор длин ребер $d = (0, |a_1a_2|, |a_1b_3|)$, обе A_3 -реализующие астросети имеют вектор длин ребер $d = (|b_1a_3|, |a_2a_3|, 0)$, поэтому, с учетом следствия 5, существует два класса одинаковой взвешенности.

Во всех трех случаях компакт Штейнера совпадает со своим каноническим расширением, поэтому является максимальным компактом Штейнера, а удаление из него любой точки увеличит расстояние до граничных компактов, поэтому он является также минимальным, а следовательно, единственным компактом Штейнера в своем классе.

Таким образом, при $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$ длина минимального дерева Штейнера равняется $\sigma_{a_1a_2a_3} = 4 \sin \frac{\alpha}{2}$, эта функция строго монотонно возрастает при данных α . При $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ длина минимального дерева Штейнера равняется $\sigma_{a_1a_2b_3} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \alpha$, эта функция строго монотонно убывает при данных α . Заметим, что в точке $\alpha = \frac{\pi}{3}$ график функции $S_{\mathcal{A}_\alpha}$ имеет излом, а сама функция не дифференцируема.

Теорема доказана. $\square$

5. Заключение

Таким образом, получена нижняя оценка длины минимальной параметрической сети через длину астросети с однотоочечными вершинами, содержащимися в граничных компактах, и изучены бифуркации решений задачи Ферма — Штейнера при 1-параметрической деформации трехэлементных границ в $H(\mathbb{R}^2)$, для которых достигается нижняя оценка длины минимальной астросети.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jarník V., Kössler M. O minimalních grafech, obsahujících n daných bodů // Casopis pro pestování matematiky a fysiky, 1934. Vol. 63, № 8. P. 223-235.
2. Cieslik D. k -Steiner minimal trees in metric spaces // Ernst–Moritz–Arndt–Univ. Greifswald, Inst. für Mathematik und Informatik, 1999.
3. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations // CRC Press, Boca Raton, Fl., 1994.
4. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Многозначные отображения, минимальные поверхности и мыльные пленки // Вестник МГУ, сер. матем., 1986, № 3. С. 3-12.
5. Степанова Е. И. Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера евклидовой плоскости // Вестн. Моск. Ун-та., Сер. 1, Математика. Механика. 2016, Т. 71, № 2. С. 48-51.

6. Степанова Е. И. Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости // Фунд. и прикл. матем. 2016. Т. 21, № 6. С. 183-204.
7. Арнольд В. И. Теория катастроф // Динамические системы — 5, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНТИ, М., 1986, Т. 5, С. 219-277
8. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].
9. Schlicker S. The geometry of the Hausdorff metric // GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008.
10. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова—Хаусдорфа: случай компактов // М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017.
11. Blackburn C. C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. An introduction to the geometry of $H(\mathbb{R}^n)$ // GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2007.
12. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов // Наука, М., 1990.
13. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва—Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004.
14. Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. Fermat—Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // J. Geom. 2017. Vol. 108. P. 575-590.
15. Галстян А. Х., Иванов А. О., Тужилин А. А. Проблема Ферма — Штейнера в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа // Матем. сб., 2021, Т. 212, № 1, С. 28-62.
16. Gilbert E. N. and Pollak H. O., Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16, № 1. P. 1-29 (1968).

REFERENCES

1. Jarnik, V., Kössler, M. 1934, “On minimal graphs containing n given points”, *Journal for Cultivation of Mathematics and Physics*, vol. 63, no. 8, pp. 223-235.
2. Cieslik, D. 1999, “ k -Steiner minimal trees in metric spaces”, Ernst—Moritz—Arndt—Univ. Greifswald, Inst. für Mathematik und Informatik.
3. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 1994, “Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations”, CRC Press, Boca Raton, Fl.
4. Tuzhilin, A. A., Fomenko, A. T. 1986, “Multivalued mappings, minimal surfaces and soap films”. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, № 3, pp. 3-12, 117-118 [in Russian].
5. Stepanova, E. I. 2016, “Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and Steiner subratio for the Euclidean plane”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 71, pp. 79–81.
6. Stepanova, E. I. 2020, “Bifurcations of Steiner tree topologies in the plane”, *J. Math. Sci.*, vol. 248, pp. 788-802.
7. Arnol'd, V. I. 1986, “Catastrophe theory”, In: *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya*, vol. 5, pp. 219-277

8. Hausdorff, F. 1914, “Grundzüge der Mengenlehre”, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].
9. Schlicker, S. 2008, “The geometry of the Hausdorff metric”, GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI.
10. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A., 2017, Geometry of Hausdorff and Gromov—Hausdorff distances, the case of compact spaces, Izd-vo Popech. Soveta Mech.-Mat. Facult. MGU, Moscow [in Russian].
11. Blackburn, C. C., Lund, K., Schlicker, S., Sigmon, P., Zupan, A. 2007, “An introduction to the geometry of $H(\mathbb{R}^n)$ ”, GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI.
12. Melnikov, O., Tyshkevich, R., Yemelichev, V., Sarvanov, V. 1994, “Lectures on graph theory”, Bibliographisches Institut, Mannheim.
13. Burago, D. Yu., Burago, Yu. D. & Ivanov, S. V. 2001, “A Course in Metric Geometry”, Graduate Studies in Mathematics, vol.33, American Mathematical Society, Providence, RI.
14. Ivanov, A., Tropin, A. & Tuzhilin, A. 2017, “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *J. Geom.*, vol. 108, pp. 575-590.
15. Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2021, “Fermat–Steiner problem in the space of compact sets of $\mathbb{R}^m$ endowed with Hausdorff distance”, *Matem. sb.*, vol. 212, № 1, p. 28-62 [in Russian].
16. Gilbert, E. N. & Pollak, H. O. 1968, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 16, no. 1, pp. 1-29.

Получено 27.07.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.