

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 514.172.45

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-253-264

О существовании RR -многогранников, связанных с икосаэдром

В. И. Субботин

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент, Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).

e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

Работа относится к тому направлению в теории многогранников в E^3 , в котором изучаются классы выпуклых многогранников, расширяющих класс правильных (платоновых): многогранники таких классов сохраняют лишь некоторые свойства правильных многогранников.

Ранее автором были найдены новые классы многогранников, объединённых такими условиями симметрии на элементы многогранника, при которых условия правильности граней не предполагались заранее. При этом была доказана полнота списков рассмотренных классов.

Далее автором был рассмотрен класс так называемых RR -многогранников.

RR -многогранником (от слов *rombic* и *regular*) называется выпуклый многогранник, у которого существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду ромбической вершины, являются правильными многоугольниками.

Если гранная звезда $Star(V)$ вершины V многогранника состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V , то V называется ромбической. Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами.

Примером RR -многогранника является удлинённый ромбододекаэдр.

Ранее автором были найдены все RR -многогранники с двумя симметричными ромбическими вершинами.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании замкнутых выпуклых RR -многогранников в E^3 с одной симметричной тупоугольной ромбической вершиной и правильными гранями одного типа. Доказывается теорема о том, что существует только два таких многогранника: 13-гранник и 19-гранник. Оба этих многогранника получены из правильного: икосаэдра. Доказательство существования 19-гранника основано, в частности, на теореме А.Д.Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой.

Ключевые слова: симметричные ромбические вершины, RR -многогранник, звезда ромбической вершины, развёртка

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

В. И. Субботин. О существовании RR -многогранников, связанных с икосаэдром // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 253–264.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 514.172.45

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-253-264

On the existence of RR -polyhedra associated with the icosahedron

V. I. Subbotin

Subbotin Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Don State Agrarian University (Novocherkassk).

e-mail: geometry@mail.ru

Abstract

The work refers to the direction in the theory of polyhedra in E^3 , in which classes of convex polytopes are studied that extend the class of regular (Platonic) polyhedra: polyhedra of such classes retain only some properties of regular polyhedra.

Earlier, the author found new classes of polyhedra united by such symmetry conditions under which the conditions for the regularity of the faces were not assumed in advance. At the same time, the completeness of the lists of the considered classes was proved.

Further, the author considered the class of so-called RR -polyhedra. A RR -polyhedron (from the words rhombic and regular) is a convex polyhedron that has symmetric rhombic vertices and there are faces that do not belong to any star of these vertices; moreover, all faces that are not included in the star of the rhombic vertex are regular polygons.

If a faceted star $Star(V)$ of a vertex V of a polyhedron consists of n equal and equally spaced rhombuses (not squares) with a common vertex V , then V is called rhombic. If the vertex V belongs to the axis of rotation of the order n of the star $Star(V)$, then V is called symmetric. A symmetric rhombic vertex V is called obtuse if the rhombuses of the star $Star(V)$ at the vertex V converge at their obtuse angles.

An example of an RR -polyhedron is an elongated rhombododecahedron.

Previously, the author found all RR -polyhedra with two symmetric rhombic vertices.

In this paper, we consider the question of the existence of closed convex RR -polyhedra in E^3 with one symmetric obtuse rhombic vertex and regular faces of the same type. A theorem is proved that there are only two such polyhedra, a 13-faced and a 19-faced. Both of these polyhedra are obtained from the regular — icosahedron. The proof of the existence of a 19-hedron is based, in particular, on A.D. Aleksandrov's theorem on the existence of a convex polyhedron with a given unfolding.

Keywords: symmetric rhombic vertices, RR -polyhedron, rhombic vertex star, unfolding.

Bibliography: 28 titles.

For citation:

V. I. Subbotin, 2021, "On the existence of RR -polyhedra associated with the icosahedron", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 253–264.

1. Введение

Известно много работ, в которых понятие правильных (платоновых) многогранников в E^3 , а также исторически первое расширение этого класса — класс равноугольно-полуправильных (архимедовых) многогранников — переносятся на многомерное пространство, на пространства постоянной кривизны, на многогранники другой эйлеровой характеристики (см., например, [1] — [21]). В частности, найдены также все выпуклые многогранники, которые разделяют с

правильными только свойство правильности граней: не предполагая заранее других условий симметрии помимо выпуклости многогранника и правильности граней, в работе [18] было доказано, что эмпирически найденные многогранники работы [19] исчерпывают класс всех замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с правильными гранями.

В работе автора [22] найден класс многогранников (“сильно симметричные” многогранники) с условиями симметрии на элементы многогранника, причём условий правильности граней не требуется. Оказалось, что класс сильно симметричных многогранников допускает полное перечисление. Некоторые обобщения результатов работы [22] имеются в [23].

Продолжением изучения влияния симметрии на геометрию многогранника является работа [24], в которой, в частности, был определён класс симметричных многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами — так называемых RR -многогранников. В той же работе было дано доказательство существования двух RR -многогранников с двумя ромбическими вершинами: 24-гранника и 20-гранника. У обоих этих многогранников имеются зеркальные оси симметрии.

Напомним определение класса RR -многогранников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR -многогранником (от слов *rombic* и *regular*), если у него существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду симметричной ромбической вершины, являются правильными многоугольниками.*

При этом под ромбической вершиной понимается такая вершина V , звезда $Star(V)$ граней которой состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V . Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами.

Таким образом, RR -многогранники наследуют свойство правильности граней правильных многогранников с появлением в них остроугольных или тупоугольных ромбических вершин. Примером RR -многогранника с остроугольной ромбической вершиной является известный в кристаллографии удлинённый ромбододекаэдр.

В [25]–[27] доказана полнота списка RR -многогранников с двумя симметричными, изолированными — как остроугольными, так и тупоугольными — ромбическими вершинами. Кроме того, в [27] найдены многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и анонсировано существование двух RR -многогранников с тупоугольными ромбическими вершинами.

Настоящая работа посвящена доказательству существования двух RR -многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной и однотипными правильными гранями. Доказано также, что других таких RR -многогранников не существует.

2. Теорема о существовании

Следующая теорема показывает, что дополняя список RR -многогранников с одной остроугольной вершиной из [27] двумя возможными RR -многогранниками с тупоугольной ромбической вершиной, мы получаем полный список всех RR -многогранников с одной ромбической вершиной.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют только два RR -многогранника с одной тупоугольной ромбической вершиной и правильными гранями одного типа — 13-гранник и 19-гранник; их правильные грани являются треугольными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Удалим одну из треугольных граней икосаэдра, а также три грани, соседние с ней по ребру икосаэдра. Получим многогранник M с треугольными гранями, ограниченный замкнутой ломаной $ABCDEF A$ (Рис.1, а)). Обозначим эту ломаную Γ . Плоский угол между звеньями BA и BC ломаной, а также углы, эквивалентные ему относительно оси вращения третьего порядка многогранника M , перпендикулярной грани RTK , обозначим α . Углы между звеньями CB и CD и им эквивалентные, обозначим β .

Многогранник M допускает непрерывные изометрические деформации (изгибания). Для доказательства этого воспользуемся теоремой А.Д. Александрова о реализации развёртки с неотрицательной кривизной, заданной на сфер, [28].

Развернём удалённую часть икосаэдра на плоскость. Получим треугольник ACE , составленный из четырёх правильных треугольников (Рис.1, с)). Обозначим этот треугольник Δ . Будем изометрически деформировать граничную плоскую ломаную треугольника Δ , составленную из шести звеньев (Рис.3, d)). Деформацию будем проводить так, чтобы не только длины рёбер сохранялись, но и сохранялась симметрия Δ . Получим переменный симметричный 6-угольник $\bar{\Delta}$.

Склеим развёртку многогранника M с переменным 6-угольником $\bar{\Delta}$. По теореме А.Д.Александрова, полученная развёртка реализуется замкнутым выпуклым многогранником M' , единственным для каждого $\bar{\Delta}$. Для каждого $\bar{\Delta}$ частью многогранника M' является единственный многогранник M .

Таким образом, изгибание многогранника M можно рассматривать как полученное непрерывным изменением угла α и сохранением симметрии многогранника M . Для каждого α дополняя многогранник M "крышкой" $\bar{M}$ до замкнутого выпуклого многогранника, вырезая образовавшуюся фигуру $\bar{M}$ из четырёх треугольников и разворачивая эту фигуру на плоскость, мы будем получать переменный симметричный 6-угольник $\bar{\Delta}$. Изометрической деформации 6-угольника $\bar{\Delta}$ соответствует изгибание многогранника M .

Покажем, что геометрический смысл имеет только следующий интервал изменения угла: $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Действительно, неравенство $\alpha \geq \frac{2\pi}{3}$ невозможно, так как уже при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ грани ABL и BLC лежат в одной плоскости и они образуют один ромб. А при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ четырёхугольная пирамида $ACRKL$ будет правильной, и пары граней (BCL, LCR) и (ABL, AKL) вырождаются в ромбы.

Для того, чтобы путём присоединения ромбов к граничной ломаной Γ достроить многогранник M до RR -многогранника с трёхгранной ромбической вершиной, должно выполняться условие: $\alpha = \beta$.

Найдём теперь связь величины углов α с углами β граничной ломаной Γ .

Рассмотрим трёхгранный угол $CBDR$. Обозначим через θ его равные плоские углы $\widehat{BCR}$ и $\widehat{DCR}$. Тогда получим:

$$\cos \beta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \Phi, \quad (1)$$

где Φ — двугранный угол с ребром RC .

Сразу заметим, что четырёхугольник $KRAC$, в силу симметрии многогранника M является равнобедренной трапецией: $KR \parallel AC, AK = CR$; равные тупые углы $\widehat{KRC}$ и $\widehat{AKR}$ через γ .

Так как $\widehat{ABC} = \widehat{ALC} = \alpha$, то, считая рёбра икосаэдра единичными, получаем, что длина отрезка $AC = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Поэтому,

$$\cos \gamma = \frac{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Покажем теперь, что угол θ связан с углом α соотношением:

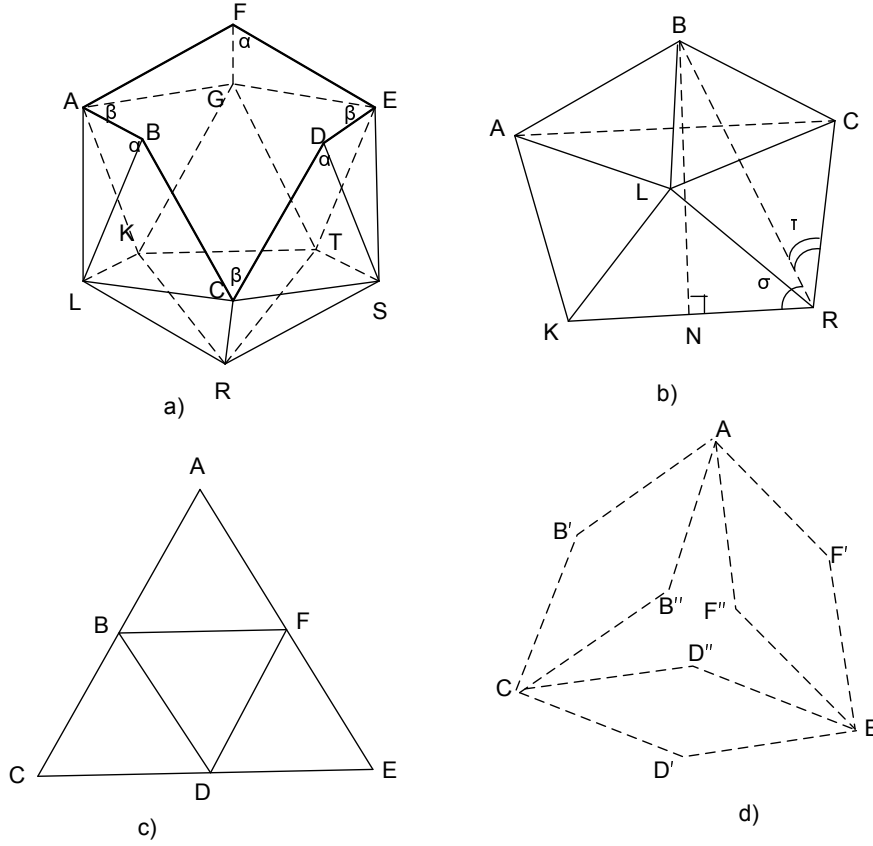


Рис. 1: К доказательству теоремы 1

$$\cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} + \arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (2)$$

Двугранный угол λ с ребром LC представим как сумму двух углов: угла между плоскостями ALC и LBC и угла между плоскостями ALC и LCR . Обозначим эти углы соответственно λ' и λ'' .

Рассматривая трёхгранный угол $CBKL$, получим:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \cos \lambda'.$$

Отсюда находим:

$$\cos \lambda' = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Аналогично, из трёхгранного угла $CALR$ получим:

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \lambda'', \quad \cos \lambda'' = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (4)$$

Из трёхгранного угла $CBLR$ находим:

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \cos \lambda, \quad \cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \lambda.$$

Учитывая, что $\lambda = \lambda' + \lambda''$, и принимая во внимание равенства (3) и (4), последнее равенство можно записать в виде (2), что и требовалось.

Пусть угол φ — двугранный угол при ребре RC трёхгранного угла $RKTC$. Тогда для φ имеем соотношение:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos \varphi, \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \right)^2 \right) \cos \varphi.$$

Отсюда находим:

$$\cos \varphi = \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

Очевидно, что угол $\Phi = \varphi \pm 2\kappa$, где κ — двугранный угол между плоскостью RCB и плоскостью $CRKA$. Причём, знак "+" выбирается при $\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \frac{3\pi}{5}$.

При $\frac{3\pi}{5} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ выбирается знак "-". Это связано с тем, что при $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ 5-угольная пирамида $ABCKRL$ становится правильной и при дальнейшем увеличении угла α угол κ следует вычитать из угла φ .

Выразим угол κ через угол α .

Рассмотрим трёхгранный угол $RKBC$. Его плоские углы $\widehat{BRK}$ и $\widehat{BRC}$ обозначим σ и τ соответственно.

В трёхгранном угле $RKBC$ косинус двугранного угла κ найдём из соотношения:

$$\cos \sigma = \cos \tau \cos \gamma + \sin \tau \sin \gamma \cos \kappa. \quad (6)$$

Проведём $BN \perp KR$; в силу симметрии многогранника M отрезок $KN = NR$. Из треугольника BLR найдём длину отрезка BR : $|BR| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta}$. Теперь можно найти косинусы углов σ и τ :

$$\cos \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta}}; \quad \cos \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos \theta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая, что

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

найдем:

$$\cos \kappa = \frac{1 + (1 - \cos \theta) (2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1)}{\sin \theta \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad (8)$$

Теперь можем найти $\cos \Phi$:

$$\begin{aligned} \cos \Phi &= \cos \left(2 \operatorname{sign} \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \kappa + \varphi \right) = \\ &= \cos \left(2 \operatorname{sign} \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \arccos \frac{1 + (1 - \cos \theta) (2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1)}{\sin \theta \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + \arccos \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

С учётом (9) равенство (1) принимает вид:

$$\cos \beta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \left(2 \operatorname{sign} \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \arccos \frac{1 + (1 - \cos \theta) (2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1)}{\sin \theta \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + \arccos \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right), \quad (10)$$

где:

$$\cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} + \arccos \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Формула (10) даёт необходимую связь величин углов α и β .

Положив в формуле (10) $\beta = \alpha$ и решая полученное уравнение относительно α , получим приближённое значение тупого угла ромба в градусах: $\alpha \approx 91,4397^\circ$.

На Рис.2 представлены графики левой и правой части уравнения (10) при $\beta = \alpha$.

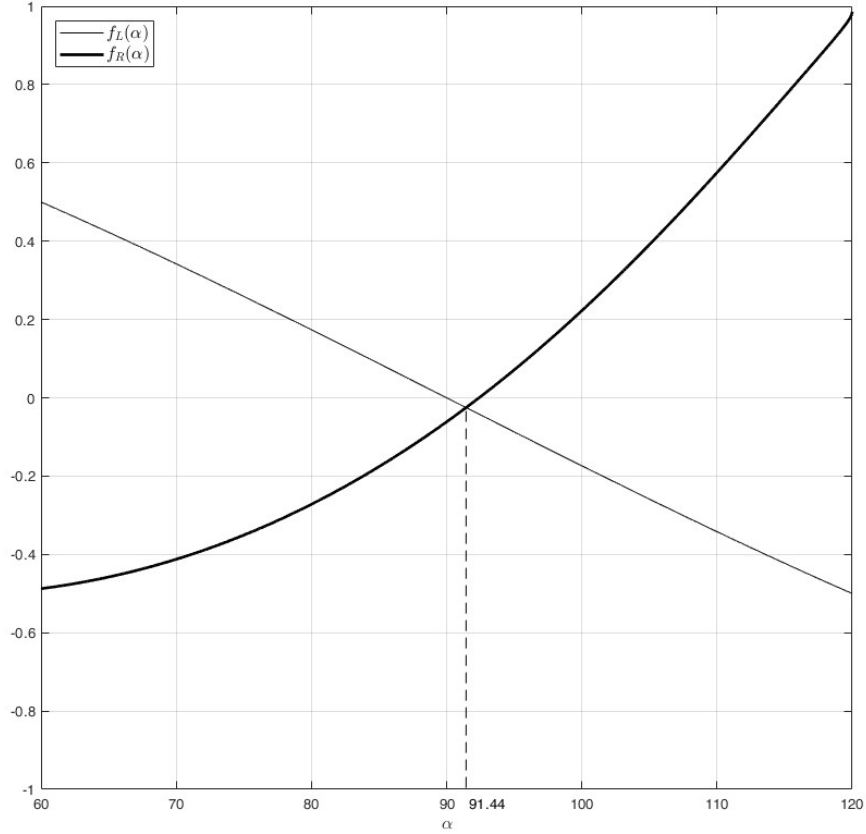
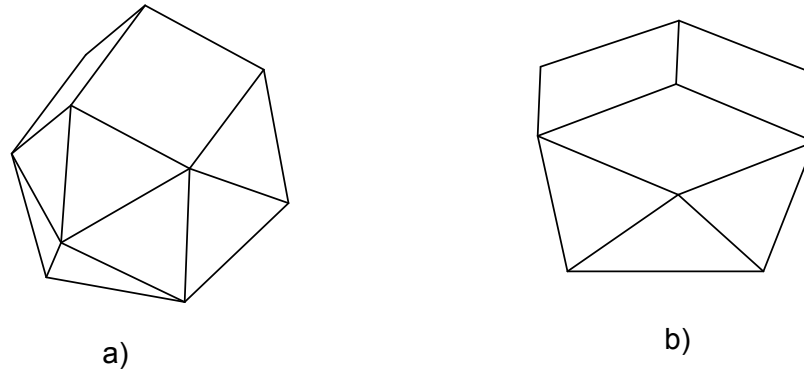


Рис. 2: Графическое решение уравнения

Существование такого многогранника с тупоугольной ромбической вершиной доказано. Соответствующий 19-гранник показан на Рис.3,а).

2. Покажем теперь, что существует ещё только один многогранник с тупоугольной ромбической вершиной и правильными треугольными гранями.

Удалим из икосаэдра 10 граней: четыре грани как в предыдущем случае, а также шесть граней, соседних по рёбрам с удалёнными. Получим многогранник P с граничной ломаной L . Очевидно, все углы между соседними звеньями ломаной L равны $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому возможно,

Рис. 3: RR -многогранники с тупоугольной ромбической вершиной

присоединение к границе ломаной L трёх ромбов с тупыми углами $\frac{2\pi}{3}$. В результате получим 13-гранник с тупоугольной ромбической вершиной (Рис.3, b)).

Докажем, что других RR -многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной и правильными гранями одного типа не существует.

В многограннике пункта 1 в вершинах граничной ломаной попеременно сходятся по две и по четыре треугольных грани: в вершине B — две, в вершине C — четыре, и т.д.

В многограннике пункта 2 в вершинах граничной ломаной попеременно сходятся по две и по три треугольных грани.

Очевидно, что возможен ещё только один случай: в вершинах граничной ломаной попеременно сходятся по три и по четыре треугольных грани. Покажем, что в этом случае RR -многогранник с одной ромбической вершиной невозможен.

Развёртка пояса граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с ромбами ромбической звезды, представлена на Рис.4, а); на нём отождествляемые концы двух рёбер отмечены одинаковыми буквами.

Присоединим, далее, к поясу равносторонних граней грани с вершинами, $C, C, C, D, D, D, E, E, E$ (Рис.4, b)). Легко видеть, что единственный способ дальнейшего присоединения правильных треугольных граней состоит именно в отождествлении вершин, обозначенных одинаковыми буквами C, D, E . После этого отождествления, получим граничную ломаную многогранника в виде пространственного 6-угольника B, C, B', D, B'', E (Рис.4, c)).

Так как вершины C, D, E имеют степени 3, то они могут быть инцидентны ещё только двум треугольным граням. Вершины B, B', B'' имеют степени 4, поэтому могут быть инцидентны одной треугольной грани.

Из этого следует, что дальнейшее присоединение треугольных граней невозможно, и RR -многогранник с одной ромбической вершиной в этом случае не существует.

Пусть связное множество M граней, не входящих в звезду ромбической вершины, состоит из квадратов. Тогда M таково, что вершины граней, не инцидентные ромбическим граням, должны иметь степени 3. Поэтому множество M представляет собой часть поверхности куба, и RR -многогранник в этом случае не существует.

Аналогично, RR -многогранник не существует, если множество M состоит из правильных 5-угольников; в этом случае M является частью додекаэдра. $\square$

Теорема доказана.

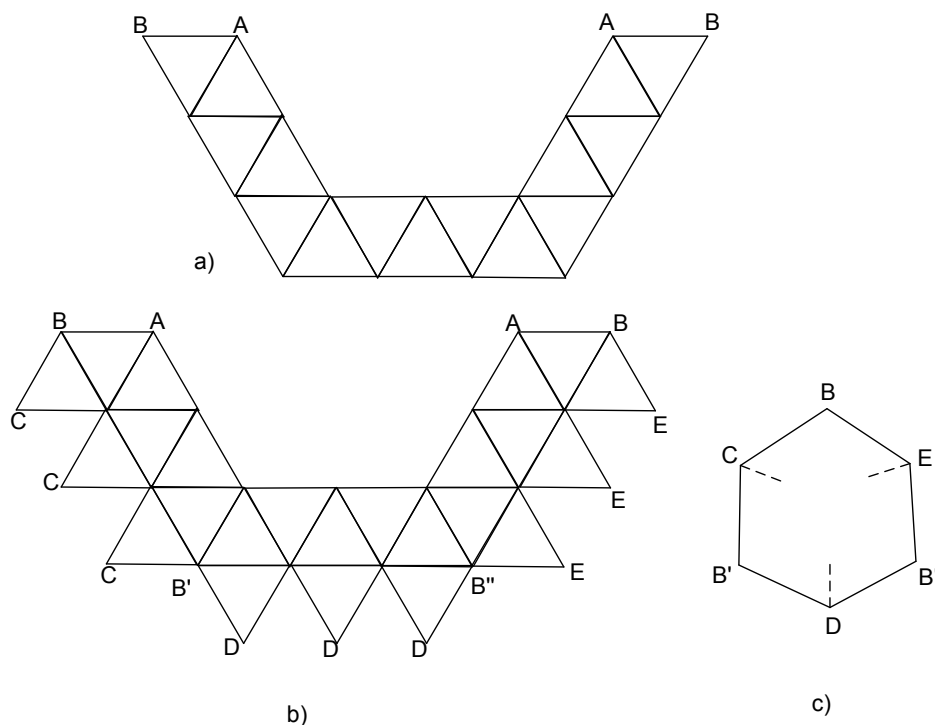


Рис. 4: К доказательству теоремы 1

3. Заключение

Итак, в E^3 существует только два RR -многогранника с тупоугольной ромбической вершиной и однотипными правильными гранями: 19-гранник и 13-гранник. В обоих многогранниках ромбическая вершина инцидентна оси вращения 3-го порядка многогранника и правильные грани являются треугольными. Учитывая доказанную теорему 1, можно найти все RR -многогранники с однотипными правильными гранями, как с остроугольными, так и с тупоугольными ромбическими вершинами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grunbaum B. Regular polyhedra — old and new. // Aequationes mathematicae. 1977. Vol. 16, №1-2. P.1-20.
2. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. II, // Mathematische Zeitschrift. 1985. Vol. 188, №4. P.559–591.
3. Coxeter H. S. Regular and Semi-Regular Polytopes. III. // Mathematische Zeitschrift, 1988/89. Vol. 200. P.3-46.
4. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.
5. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.
6. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.
7. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press. 1999.

8. Makarov P. V. On the derivation of four-dimensional semi-regular polytopes // *Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.* 1988. Vol. 103. P.139–150.
9. Макаров В. С. Правильные многогранники и многогранники с правильными гранями трехмерного пространства Лобачевского // *Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения"*. М.: МГУ. 2010. С.58-66.
10. Смирнов Е. Ю. Группы отражений и правильные многогранники. М.: МЦНМО, 2009.
11. Farris S. L. Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra. // *Geometriae Dedicata*. 1988. Vol. 26, №1. P.111-124.
12. Wills J. M. On polyhedra with transitivity properties // *Discrete and Computational Geometry*. 1986. Vol. 1, №3. P.195-199.
13. Berman M. Regular-faced Convex Polyhedra, // *Journal of The Franklin Institute*. 1971. Vol. 291, №5. P.329-352.
14. McMullen P. *Geometric Regular Polytopes*. Cambridge University Press. 2020.
15. Schulte E., Wills J. M. On Coxeter's regular skew polyhedra // *Discrete Mathematics*. 1986. Vol. 60. P. 253-262.
16. McMullen P., Schulte E. Higher Toroidal Regular Polytopes // *Advances in Mathematics*. 1996. Vol. 117, №1. P. 17-51.
17. Cunningham E., Pellicer D. Classification of tight regular polyhedra // *Journal of Algebraic Combinatorics*. 2016. Vol. 43. P. 665–691.
18. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // *Can. J. Math.* 1966. Vol. 18, №1. P. 169–200.
19. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1967. Т.2. С.1-220.
20. Милка А. Д. Почти правильные многогранники. // *Труды Ин-та мат. СО АН СССР*. 1987. Т.9. С.136-141.
21. Blind, G.; Blind, R. The semiregular polytopes // *Commentarii Mathematici Helvetici*. 1991. v.66, №1. P.150–154.
22. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // *Чебышевский сборник*. 2016. №4. С. 132-140.
23. Субботин В. И. Some classes of polyhedra with rhombic and deltoidal vertices // *Труды Международной конференции «Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100»*. Санкт-Петербург. 2019. С.86.
24. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // *Зап. научн. семин. ПОМИ*. – 2018. – Т. 476.. – С. 153–164.
25. Субботин В. И. Об одном классе многогранников с симметричными звездами вершин // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2019. Т.169. С. 86-95.
26. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR -многогранников // *Чебышевский сборник*. 2020. Т.21, №1. С. 297-309.

27. Субботин В. И. RR -многогранники: существование, полнота списка// Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 23–26 сентября 2020 года. С.271-272.
28. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007.

REFERENCES

1. Grunbaum B. 1977, "Polyhedra — old and new", *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no. 1-2, pp.1-20.
2. Coxeter H. S. 1985, "Regular and semi-regular polytopes. II", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 188, no.4, pp.559–591.
3. Coxeter H. S. 1988/89, "Regular and Semi-Regular Polytopes. III", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 200, pp.3-46.
4. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.
5. Deza M, Grishukhin V. P., Shtogrin M. I. 2008, *Isometricheskie poliedralnye podgrafy v gipercubach i kubicheskikh reshetkach [Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices]*, MCNMO, Moscow.
6. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizaciya. [Polyhedra. Graph. Optimization]*, Nauka, Moscow.
7. Cromwel P. R. 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge.
8. Makarov, P. V. 1988, "The derivation of four-dimensional semi-regular polytopes", *Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.*, vol. 103, pp.139–150.
9. Макаров В. С. 2010, "Regular polytopes and polyhedra with regular faces of the three-dimensional Lobachevsky space", *Materialy X Mezhdunarodnogo seminara "matematika i yeye prilozheniya"*, (*Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications"*), Moscow, pp.58-66.
10. Smirnov E. Yu. 2009, *Gruppy otrazheniy i pravil'nyye mnogogranniki [Reflection groups and regular polyhedra]*, MCNMO, Moscow.
11. Farris, S. L. 1988, "Classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra", *Geometriae Dedicata*, vol. 26, no. 1, pp.111-124.
12. Wills J. M. 1986, "On polyhedra with transitivity properties", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 1, no.3, pp.195-199.
13. Berman M. 1971, "Regular-faced Convex Polyhedra", *Journal of The Franklin Institute*, vol. 291, no.5, pp.329-352.
14. McMullen P. 2020, *Geometric Regular Polytopes*, Cambridge University Press.
15. Schulte E., Wills J. M. 1986, "Coxeter's regular skew polyhedra", *Discrete Mathematics*, vol. 60, pp. 253-262.

16. McMullen P., Schulte E. 1996, "Higher Toroidal Regular Polytopes", *Advances in Mathematics*, vol. 117, no.1, pp. 17-51.
17. Cunningham E., Pellicer D. 2016, "Classification of tight regular polyhedra", *Journal of Algebraic Combinatorics*, vol. 43, pp. 665–691.
18. Johnson N. W. 1966, "Convex polyhedra with regular faces", *Can. J. Math.*, vol. 18, №1, pp. 169–200.
19. Zalgaller V.A. 1967, "Convex polyhedra with regular faces", *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.
20. Milka A.D. 1987, "Almost regular polyhedra", *Trudy In-ta mat. SO AN SSSR*, vol.9, pp. 136-141.
21. Blind, G.; Blind, R. 1991 "The semiregular polytopes", *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.66, no.1, pp.150–154.
22. Subbotin V.I. 2016, "On a class of strongly symmetric polytopes", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 132-140.
23. Subbotin V.I. 2019, "Some classes of polyhedra with rhombic and deltoidal vertices" *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii "Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100" (Proc. of the Int. Conf. "Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin - 100")*, St.Petersburg, p.86.
24. Subbotin V.I. 2018, "On two classes of polyhedra with rhombic vertices", *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol.476, pp.153-164.
25. Subbotin V.I. 2019, "On one class of polyhedra with symmetric vertex stars", *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol. 169. pp. 86-95.
26. Subbotin V.I. 2020, "On the completeness of the list of convex RR -polytopes", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 21, no.1, pp. 297-309.
27. Subbotin V.I. 2020, " RR -polyhedra: existence, completeness of the list", *Materialy XVIII Mezhdunarodnoy konferentsii "Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennyye problemy, prilozheniya i problemy istorii", posvyashchennoy stoletiyu so dnya rozhdeniya professorov B. M. Bredikhina, V. I. Nechayeva i S. B. Stechkina (Proc. Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history")*, Tula, pp.271-272.
28. Alexandrov A.D. 2007, *Vypuklyye mnogogranniki [Convex polyhedra]*, Nauka, Novosibirsk.

Получено 22.08.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.