

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-225-240

**Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре
с неоднородным анизотропным внешним слоем
вблизи плоскости¹**

С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Пешков Никита Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nikita.peshkoff@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается задача дифракции плоской монохроматической звуковой волны на упругом цилиндре со слоисто неоднородным трансверсально-изотропным внешним слоем. Предполагается, что цилиндр располагается вблизи плоскости с идеальной поверхностью (абсолютно жесткой или акустически мягкой). Для того, чтобы избавиться от граничных условий на плоскости, в соответствии с так называемым методом мнимых рассеивателей вводится в рассмотрение дополнительное препятствие в виде второго упругого цилиндра, расположенного зеркально по отношению к исходному по другую сторону плоскости. Сама плоскость исключается из рассмотрения, а выполнение граничных условий на ней обеспечивается введением второй падающей плоской волны с такой же амплитудой, что и у первой. Направление распространения второй волны зеркально направлению исходной волны относительно плоскости. Фазовый сдвиг во второй волне равен фазовому сдвигу в первой в случае, если плоскость является абсолютно жесткой. В случае, если плоскость является абсолютно мягкой, фазовый сдвиг во второй волне смещен относительно фазового сдвига в первой на π . Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских волн двумя одинаковыми упругими цилиндрами с параллельными осями. В предположении, что падающая волна распространяется по нормали к оси цилиндра, решается двумерная задача. Решение задачи в модифицированной постановке проводится с использованием метода конечных элементов. Проведено численное моделирование решения в ближней зоне рассеянного акустического поля. Результаты расчетов показывают, что в ряде случаев сочетания параметров цилиндра и падающей волны анизотропия и неоднородность свойств материала внешнего слоя цилиндра оказывают существенное влияние на рассеянное поле.

Ключевые слова: дифракция, плоская звуковая волна, упругий цилиндр, неоднородный анизотропный слой, подстилающая поверхность, метод мнимого рассеивателя, метод конечных элементов.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным внешним слоем вблизи плоскости // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 225–240.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-225-240

Sound waves diffraction by an elastic cylinder with inhomogeneous anisotropic outer layer near the plane²

S. A. Skobel'tsyn, N. Y. Peshkov

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Peshkov Nikita Yurievich — postgraduate TSU, Tula State University (Tula).

e-mail: nikita.peshkoff@yandex.ru

Abstract

The problem of diffraction of a plane monochromatic sound wave by an elastic cylinder with a layered inhomogeneous transversely isotropic outer layer is considered. It is assumed that the cylinder is located near a plane with an ideal surface (absolutely hard or acoustically soft). In order to get rid of the boundary conditions in the plane, in accordance with the so-called imaginary scatterer method, an additional obstacle is introduced in the form of a second elastic cylinder, which is mirror-like with respect to the initial one on the other side of the plane. The plane itself is excluded from consideration, and the fulfillment of the boundary conditions on it is ensured by introducing a second incident plane wave with the same amplitude as that of the first. The direction of propagation of the second wave is mirrored to the direction of the original wave relative to the plane. The phase shift in the second wave is equal to the phase shift in the first if the plane is absolutely rigid. If the plane is absolutely soft, the phase shift in the second wave is shifted relative to the phase shift in the first one by π . Thus, the problem is reduced to the problem of scattering of two plane waves by two identical elastic cylinders with parallel axes. Assuming that the incident wave propagates along the normal to the cylinder axis, a two-dimensional problem is solved. The solution of the problem in a modified formulation is carried out using the finite element method. Numerical simulation of the solution in the near zone of a scattered acoustic field is carried out. The calculation results show that in a number of cases of combinations of the parameters of the cylinder and the incident wave, the anisotropy and inhomogeneity of the material properties of the outer layer of the cylinder have a significant effect on the scattered field.

Keywords: diffraction, plane sound wave, elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic layer, underlying surface, imaginary scatterer method, finite element method.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

S. A. Skobel'tsyn, N. Y. Peshkov, 2021, "Sound waves diffraction by an elastic cylinder with inhomogeneous anisotropic outer layer near the plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 225–240.

²The study was carried out at the expense of grant from the Russian Science Foundation № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

1. Введение

Активное внедрение композитных материалов в конструкциях различного назначения существенно влияет на их акустические свойства. Современные композитные материалы часто характеризуются не только анизотропией, но и неоднородностью. Значительное влияние на эффекты рассеяния звука оказывают также ограничивающие поверхности вблизи рассеивателей. В данной работе показан подход к оценке влияния анизотропии и неоднородности внешнего слоя упругого кругового цилиндра на рассеяние звука в случае, когда цилиндр располагается вблизи плоской поверхности с идеальными акустическими свойствами.

2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечный упругий круговой цилиндр радиуса a с неоднородным анизотропным покрытием, который располагается в идеальной жидкости вблизи плоской поверхности Π с идеальными акустическими свойствами (она является абсолютно жесткой или абсолютно мягкой). Пусть на цилиндр из внешнего полупространства падает плоская гармоническая звуковая волна с круговой частотой ω (см. рис. 1).

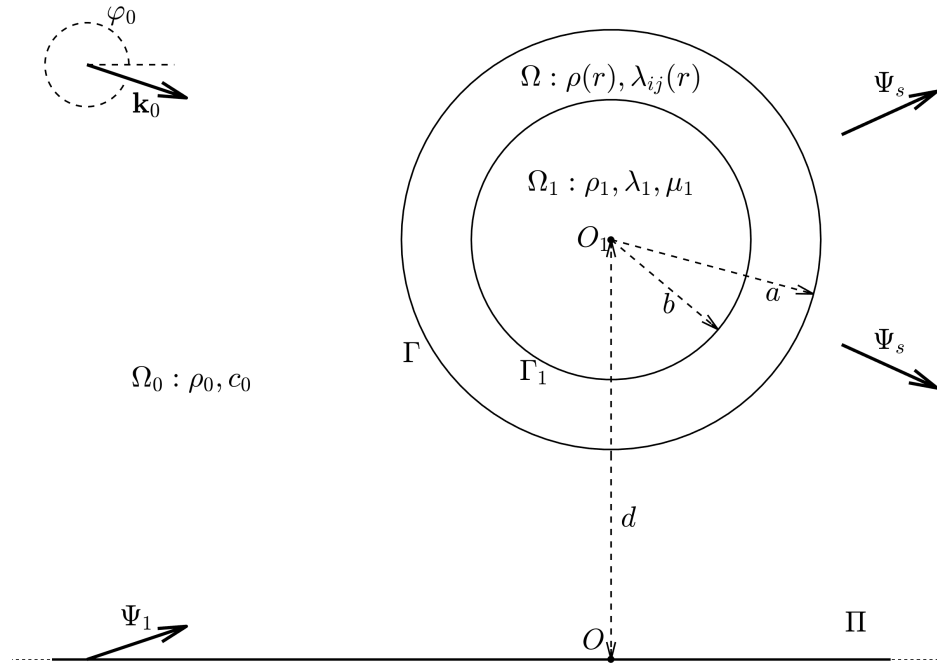


Рис. 1: Геометрическая постановка задачи

На рис. 1, построенном в сечении нормальном к оси цилиндра, Ω_0 – полупространство содержащей идеальной жидкости с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 ; волновой вектор $\mathbf{k}_0$ падающей плоской звуковой волны ($|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$ – волновое число падающей волны); внутренняя часть препятствия Ω_1 – круговой цилиндр радиуса b , материал которого – однородный изотропный с плотностью ρ_1 и модулями упругости Ламе – λ_1, μ_1 ; внешняя часть цилиндра – неоднородный анизотропный слой Ω толщины $h = a - b$, материал которого характеризуется плотностью ρ и модулями упругости λ_{ij} . Как показано на рисунке, предполагается, что направление распространения падающей волны перпендикулярно оси цилиндра и его образующей. Расстояние оси цилиндра от плоскости Π обозначено d . Через Γ и Γ_1 обозначены внешние поверхности всего цилиндра и его однородной части соответственно.

Введем две декартовы системы координат. Локальная система координат x_1, y_1, z_1 , связанная с цилиндром, такова, что ось O_1z_1 совпадает с осью цилиндра, ось O_1x_1 параллельна плоскости Π , а ось O_1y_1 направлена от плоскости Π . Глобальная система координат (система отсчета) x, y, z с началом O на плоскости Π вводится так, чтобы координаты x и z совпадали с x_1, z_1 . Тогда O оказывается проекцией O_1 на подстилающую поверхность, а связь координат y и y_1 выражается соотношением $y = y_1 + d$. При этом поверхность Π задается уравнением $y = 0$ или $y_1 = -d$.

На рис. показано, что направление распространения падающей волны задается углом φ_0 между осью Ox (или O_1x_1) и вектором $\mathbf{k}_0$. Тогда проекции волнового вектора на оси координат имеют вид: $k_{0x} = k_0 \cos \varphi_0$, $k_{0y} = k_0 \sin \varphi_0$, $k_{0z} = 0$.

Далее будем также использовать цилиндрические система координат r, φ, z и r_1, φ_1, z_1 такие, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и $x_1 = r_1 \cos \varphi_1$, $y_1 = r_1 \sin \varphi_1$. В локальной цилиндрической системе координат поверхность Γ задается уравнением $r_1 = a$, а Γ_1 – уравнением $r_1 = b$.

Предполагается, что механические свойства материала покрытия Ω зависят только от расстояния от оси цилиндра, то есть являются функциями

$$\rho = \rho(r_1), \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r_1). \quad (1)$$

Потенциал смещения в падающей волне представим в виде [1]

$$\Psi_p = e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y - \omega t)} = e^{i(k_0 r \cos(\varphi - \varphi_0) - \omega t)}, \quad (2)$$

где i – мнимая единица; t – время. Без ограничения общности полагается, что амплитуда Ψ_p равна единице.

Заметим, что все величины задачи, зависящие от времени, будут иметь зависимость от t такую же, что и в падающей волне. Поэтому для таких величин множитель вида $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

В соответствии с (2) смещение в падающей волне имеет вид

$$\mathbf{u}_p = \text{grad } \Psi_p = ie^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)}(k_{0x}\mathbf{i}_x + k_{0y}\mathbf{i}_y) \quad (\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y \text{ – орты осей } Ox, Oy),$$

а его физические компоненты в декартовой и цилиндрической системах координат

$$\begin{aligned} u_{px} &= ik_{0x}e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)}, u_{py} = ik_{0y}e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)}, u_{pz} = 0; \\ u_{pr} &= ik_0e^{ik_0r \cos(\varphi - \varphi_0)} \cos(\varphi - \varphi_0), u_{p\varphi} = -ik_0e^{ik_0r \cos(\varphi - \varphi_0)} \sin(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Акустическое давление в волне (2) представляется выражением

$$p_p = \rho_0 \omega^2 \Psi_p.$$

В результате дифракции падающей волны на упругом цилиндре и отражения от плоскости Π (см. составляющую поля Ψ_1 на рис.) формируется рассеянное акустическое поле, которое будем характеризовать потенциалом смещений Ψ_s . Потенциал Ψ_s должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [1]

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0, \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа. Кроме того, потенциал смещений Ψ_s должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [2]

$$\Psi_s = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_0 \Psi_s \right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Движение частиц упругого цилиндра будем описывать общими уравнениями движения сплошной среды [3]

$$\text{Div } \sigma = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}, \quad (5)$$

где $\text{Div } \sigma$ – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений σ ; $\mathbf{u}$ – вектор смещений частиц упругой среды.

Уравнения (5) имеют одинаковую форму для сред в Ω и в Ω_1 , но в них отличаются выражения связи компонентов тензора напряжений и компонентов вектора смещений через закон Гука. Будем обозначать тензор напряжений, вектор смещений и их компоненты в области Ω_1 индексом 1 – σ_1 (σ_{1ij}), $\mathbf{u}_1$ (u_{1i}). В области Ω для соответствующих величин не будем использовать дополнительный индекс помимо индекса координаты – σ (σ_{ij}), $\mathbf{u}$ (u_i).

Закон Гука в анизотропном внешнем слое цилиндра Ω зададим в форме [4]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r_1 r_1} \\ \sigma_{\varphi_1 \varphi_1} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\varphi_1 z} \\ \sigma_{r_1 z} \\ \sigma_{r_1 \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{22} - \lambda_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{r_1 r_1} \\ \varepsilon_{\varphi_1 \varphi_1} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\varphi_1 z} \\ \varepsilon_{r_1 z} \\ \varepsilon_{r_1 \varphi} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где σ_{ij} – физические компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат; ε_{ij} – компоненты тензора малых деформаций.

Такой тип анизотропии относится к так называемой криволинейной анизотропии [5], которая часто называется цилиндрической трансверсальной анизотропией. В этом случае тензор модулей упругости определяется 5 модулями: λ_{11} , λ_{12} , λ_{22} , λ_{23} , λ_{55} , а поверхности вида $r_1 = \text{const}$ являются поверхностями изотропии.

Закон Гука в однородной части цилиндра Ω_1 определяется связью [3]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1r_1 r_1} \\ \sigma_{1\varphi_1 \varphi_1} \\ \sigma_{1zz} \\ \sigma_{1\varphi_1 z} \\ \sigma_{1r_1 z} \\ \sigma_{1r_1 \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\mu_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 + 2\mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 + 2\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1r_1 r_1} \\ \varepsilon_{1\varphi_1 \varphi_1} \\ \varepsilon_{1zz} \\ \varepsilon_{1\varphi_1 z} \\ \varepsilon_{1r_1 z} \\ \varepsilon_{1r_1 \varphi} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В соответствии с общей теорией взаимодействия идеальной жидкости и линейного упругого тела при малых деформациях [6] на внешней поверхности цилиндра Γ должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений и напряжений и отсутствия касательных напряжений

$$r_1 = a : \quad u_{r_1} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1}; \quad \sigma_{r_1 r_1} = \rho_0 \omega^2 \Psi_0; \quad \sigma_{r_1 \varphi_1} = 0. \quad (8)$$

Здесь ρ_0 – плотность жидкости; Ψ_0 – полное звуковое давление в ней; u_{r_1} , $\sigma_{r_1 r_1}$, $\sigma_{r_1 \varphi_1}$ – компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$ и тензора напряжений σ в неоднородном покрытии. При этом

$$\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s, \quad (9)$$

где Ψ_s – потенциал смещения в рассеянной волне.

На внутренней поверхности покрытия Γ_1 должны выполняться граничные условия непрерывности смещения и напряжения

$$r_1 = b : \quad u_{r_1} = u_{1r_1}; \quad u_{\varphi_1} = u_{1\varphi_1}; \quad \sigma_{r_1 r_1} = \sigma_{1r_1 r_1}; \quad \sigma_{r_1 \varphi_1} = \sigma_{1r_1 \varphi_1}. \quad (10)$$

На плоскости Π в зависимости от типа ее поверхности должно выполняться одно из условий:

$$\partial\Psi_0/\partial y = 0 \text{ — для абсолютно жесткой поверхности;} \quad (11)$$

$$\Psi_0 = 0 \text{ — для абсолютно мягкой поверхности.} \quad (12)$$

Физически условие (11) обозначает условие отсутствия смещения частиц жидкости в направлении оси y — нормальном к поверхности Π . Механический смысл условия (12) состоит в требовании обращения акустического давления на поверхности Π в ноль. Это условие приближенно моделирует реальную ситуацию, когда с другой стороны поверхности находится сильно разреженная среда.

Заметим, основной целью при решении задачи о дифракции звука неоднородным анизотропным цилиндром является нахождение потенциала смещения в рассеянной волне Ψ_s . Но для его нахождения нужно определить поля смещений и напряжений в упругом цилиндре. Таким образом, требуется найти решения уравнений (3) в Ω_0 , (5) в Ω и Ω_1 . Решения должны удовлетворять граничным условиям (8), (10), (11) (или (12)) и условиям излучения на бесконечности (4).

3. Решение задачи с использованием метода мнимого рассеивателя и метода конечных элементов

Эффективным методом решения задач дифракции волн различной природы отдельным объектом T , находящимся вблизи идеальной плоскости Π , является метод мнимого рассеивателя [7]. Согласно этому подходу из задачи дифракции в полупространстве исключается идеальная плоскость Π (граница полупространства), а вместо нее вводится второй рассеивающий объект T' , являющийся зеркальным отражением объекта T относительно плоскости Π . Кроме того, в задачу включается вторая падающая волна, которая имеет амплитуду равную амплитуде первичной волны, а распространяется «зеркально» первичной относительно плоскости Π . Выбором фазы второй падающей волны добиваются выполнения «идеальных» граничных условий в плоскости, в которой в начальной задаче располагалась плоскость Π . Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух волн одинаковой природы двумя симметричными объектами в полном пространстве. Этот подход не раз использовался в работах автора (см. [8, 9, 10, 11, 12, 13]).

В рассматриваемом случае для того, чтобы избавиться от граничных условий на плоскости, в соответствии с методом мнимого рассеивателя введем в рассмотрение дополнительное препятствие в виде второго упругого цилиндра, расположенного зеркально по отношению к исходному по другую сторону плоскости. Ось нового цилиндра будет иметь координаты $x = 0$, $y = -d$ (см. рис. 2). Саму плоскость исключаем из рассмотрения, а выполнение граничных условий (11) (или (12)) на ней обеспечим введением второй падающей плоской волны с такой же амплитудой, что и у первой. Направление распространения второй волны зеркально направлению исходной волны относительно плоскости $y = 0$. Будем характеризовать его волновым вектором $\mathbf{k}_1 = k_{0x}\mathbf{i}_x - k_{0y}\mathbf{i}_y$. По аналогии с (2) вторую падающую волну представим потенциалом смещений Ψ'_p

$$\Psi'_p = B e^{i(k_{0x}x - k_{0y}y - \omega t)} = B e^{i(k_0 r \cos(\varphi + \varphi_0) - \omega t)}, \quad (13)$$

где $|B| = 1$.

Легко видеть, что в отсутствии препятствий условие (11) будет выполнено, если положить $B = 1$. Действительно, на Π (при $y = 0$) получаем $\partial\Psi_p/\partial y = k_{0y}e^{i(k_{0x}x - \omega t)}$, $\partial\Psi'_p/\partial y = -k_{0y}e^{i(k_{0x}x - \omega t)}$. Тогда

$$\partial\Psi_0/\partial y = \partial(\Psi_p + \Psi'_p)/\partial y = \partial\Psi_p/\partial y + \partial\Psi'_p/\partial y \equiv 0. \quad (14)$$

Из соображений симметрии можно показать, что внесение в поле волн Ψ_p, Ψ'_p двух одинаковых цилиндров с осесимметричными свойствами не нарушит тождества вида (14) для $\partial\Psi_0/\partial y$ на плоскости $y = 0$. Следовательно, такая конфигурация двух падающих волн и двух рассеивателей обеспечивает выполнение условия (11). Заметим, в этом случае фазовый сдвиг во второй волне Ψ'_p равен фазовому сдвигу в первой волне Ψ_p .

Аналогично можно проверить, что в отсутствии препятствий условие (12) будет выполнено, если положить $B = -1$. Действительно, в этом случае при $y = 0$ получаем $\Psi_p = e^{i(k_0x - \omega t)}$, $\Psi'_p = -e^{i(k_0x - \omega t)}$. Тогда

$$\Psi_0 = \Psi_p + \Psi'_p = e^{i(k_0x - \omega t)} - e^{i(k_0x - \omega t)} \equiv 0. \quad (15)$$

Также из соображений симметрии можно показать, что внесение в поле волн Ψ_p и такой Ψ'_p двух одинаковых цилиндров с осесимметричными свойствами не нарушит тождества вида (15) для Ψ_0 на плоскости $y = 0$. Следовательно, такая конфигурация двух падающих волн и двух рассеивателей обеспечивает выполнение условия (12). Заметим, коэффициент $B = -1$ можно рассматривать как то, что фазовый сдвиг в волне Ψ'_p смещен относительно фазового сдвига в первой волне Ψ_p на π .

Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских волн двумя одинаковыми упругими цилиндрами с параллельными осями. Измененная конфигурация геометрической схемы задачи представлена на рис. 2.

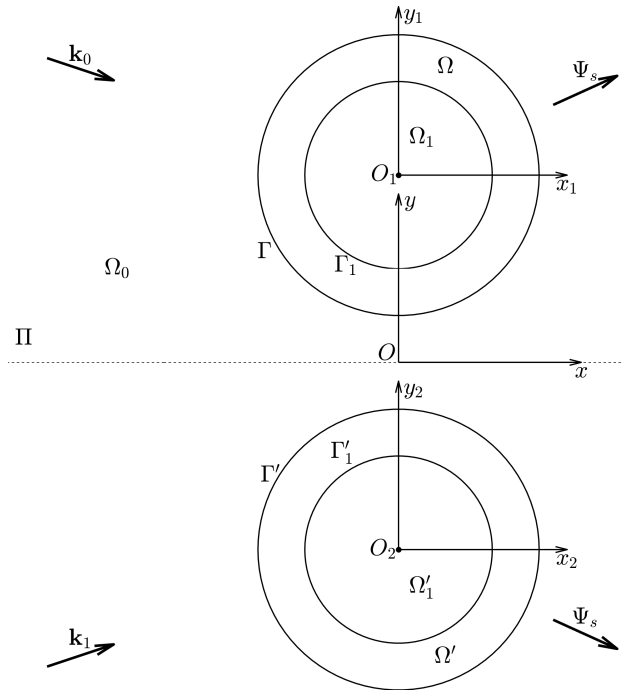


Рис. 2: Модификация постановки задачи

На схеме 2 показано, что для второго цилиндра вводится новая локальная система координат x_2, y_2, z_2 , которая связывается с цилиндром аналогично тому, как x_1, y_1, z_1 связана с исходным цилиндром. Так же выполняются соотношения $x_2 = x, z_2 = z$, а вот $y_1 = y + d$.

Также вводится локальная цилиндрическая система координат r_2, φ_2, z_2 такая, что $x_2 = r_2 \cos \varphi_2, y_2 = r_2 \sin \varphi_2$.

Для обозначения элементов геометрии и полей смещения и напряжения во втором рассеивателе будем использовать соответствующие символы, использованные для исходного цилиндра. Например, внутренняя однородная часть второго цилиндра обозначается Ω'_1 , область

внешнего неоднородного анизотропного слоя – Ω' . Соответственно их поверхности обозначаются Γ'_1, Γ' . Во второй локальной цилиндрической системе координат поверхность Γ' задается уравнением $r_2 = a$, а Γ'_1 – уравнением $r_2 = b$.

Поля смещений и тензоры напряжений в Ω'_1, Ω' обозначаются $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}', \sigma'_1, \sigma'$. Компоненты векторов смещений и напряжений в Ω'_1, Ω' в системе $r_2, \varphi_2, z_2 - u'_{1i}, u'_i, \sigma'_{1ij}, \sigma'_{ij}$. Поля $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}', \sigma'_1, \sigma'$, как и для первого цилиндра удовлетворяют уравнениям вида (5) и связям вида (6), (7).

Вместо падающей волны (2) далее будем использовать первичное поле с суммарным потенциалом смещения

$$\Psi_p = e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)} + \Psi'_p = e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)} + B e^{i(k_{0x}x - k_{0y}y)}. \quad (16)$$

Подбор варианта второй составляющей первичного поля обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий (11) (или (12)), однако в связи со вторым рассеивателем требуется введение дополнительных условий вида (8), (10).

На внешней поверхности второго цилиндра Γ' должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений и напряжений и отсутствия касательных напряжений

$$r_2 = a : \quad u'_{r_2} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_2}; \quad \sigma'_{r_2 r_2} = \rho_0 \omega^2 \Psi_0; \quad \sigma'_{r_2 \varphi_2} = 0. \quad (17)$$

На внутренней поверхности покрытия второго цилиндра Γ'_1 должны выполняться граничные условия непрерывности смещения и напряжения

$$r_2 = b : \quad u'_{r_2} = u'_{1r_2}; \quad u'_{\varphi_2} = u'_{1\varphi_2}; \quad \sigma'_{r_2 r_2} = \sigma'_{1r_2 r_2}; \quad \sigma'_{r_2 \varphi_2} = \sigma'_{1r_2 \varphi_2}. \quad (18)$$

Поле рассеянной волны Ψ_s в новой постановке остается таким же, но область его определения расширяется до полного пространства (за исключением областей занятых цилиндрами).

Далее решение задачи дифракции выполняется с использованием метода конечных элементов (МКЭ) [14]. Используем подход, который предложен в работах [15, 16]. В соответствии с ним в задаче о рассеянии звуковых волн в неограниченном пространстве область упругих препятствий и некоторая часть прилегающей жидкости заключается в круговую область D . Вне этой области потенциал смещения Ψ_s в рассеянной волне ищется в виде разложения по цилиндрическим гармоникам, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца (3) и образующим полную систему функций. Внутри области D и потенциал смещения в жидкости – Ψ и поля смещений $\mathbf{u}$ в упругих препятствиях ищутся методом конечных элементов. На первом этапе решения из одного граничного условия коэффициенты разложения Ψ_s выражаются через узловые значения Ψ на границе D и подставляются в другое граничное условие. После этого получается внутренняя краевая задача для неизвестных полей в области D . Она решается стандартными средствами МКЭ для ограниченных областей. После решения краевой задачи в области D находятся значения коэффициентов разложения Ψ_s по цилиндрическим гармоникам. Потенциал Ψ_s используется для анализа внешней части рассеянного акустического поля.

В рассматриваемой задаче в качестве круга D выберем круг с центром в точке O радиусом $R = d + 1.5a$, который обеспечивает расстояние от внешней границы $D - \Gamma_0$ до точек цилиндра не меньше $0.5a$. Тогда уравнение границы Γ_0 примет вид $r = R$. Соответственно множество точек круга D можно представить так $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Область жидкости, попавшую в D , обозначим Ω'_0 . Суммарный потенциал смещения (вместе с составляющими падающей волны) в Ω'_0 обозначим Ψ . Как и Ψ_s потенциал Ψ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца вида (3)

$$\Delta \Psi + k_0^2 \Psi = 0. \quad (19)$$

В связи с этим немного изменяются условия (8), (17) на внешних поверхностях цилиндров Γ и Γ' : в них вместо Ψ_0 надо использовать Ψ .

На внешней границе D должны выполняться условия непрерывности давления и нормального смещения

$$r = R: \quad \Psi = \Psi_0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}. \quad (20)$$

Решим уравнение (3) в глобальной цилиндрической системе координат r, φ, z методом разделения переменных. Получим ряд [17]

$$\Psi_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m(k_0 r) \exp(im\varphi) \quad (21)$$

где A_m – пока неизвестные коэффициенты; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка m , которая обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности (4) для Ψ_s .

Разложим по функциям Бесселя в форме (21) и сумму плоских волн Ψ_p

$$\Psi_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m J_m(k_0 r) \exp(im\varphi), \quad (22)$$

где $J_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка m ; γ_m – известные коэффициенты, которые определяются по (2), (13).

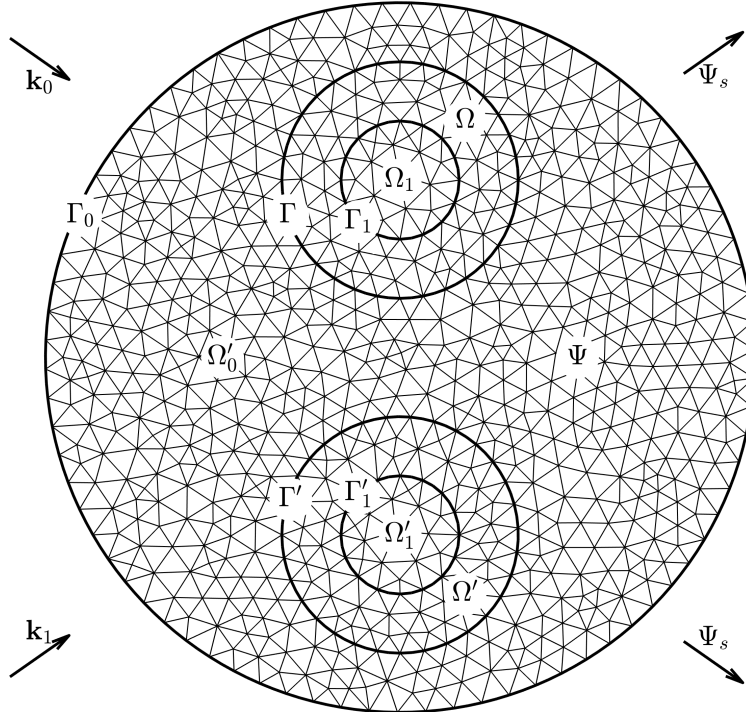


Рис. 3: Схема разбиения области решения задачи конечными элементами

В соответствии с методом МКЭ область D разбивается на конечные элементы (пример разбиения см. на рис. 3) и неизвестные функции в ней представляются в виде линейных комбинаций

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^K \Psi_k f_k(x, y), \quad (23)$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{k=1}^K \mathbf{U}_k f_k(x, y). \quad (24)$$

где K – число узлов конечно-элементной сетки; k – номер узла; $f_k(x, y)$ – координатная функция узла k ; $\Psi_k, \mathbf{U}_k$ значения искомых функций в узле k . Здесь $\mathbf{u}$ рассматривается как общее обозначение для смещений $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{u}'_1$, введенных выше.

Подставим (9), (21), (22) и выражение Ψ из (23) в первое из граничных условий (20) и воспользуемся ортогональностью функций $e^{im\varphi}$ при различных m на отрезке $[0, 2\pi]$. Получим выражение коэффициентов A_m через узловые значения потенциала Ψ на окружности Γ_0

$$A_m = \frac{1}{H_m(k_0 R)} \left[-\gamma_m J_m(k_0 R) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^K \Psi_k \langle f_k, e^{im\varphi} \rangle \right], \quad (25)$$

где $\langle f_k, e^{im\varphi} \rangle$ – скалярное произведение координатной функции $f_k(x, y)$ и функции $e^{im\varphi}$ на поверхности Γ_0 .

Используя (25) во втором граничном условии (20), получим уравнение, которое содержит только узловые значения Ψ_k .

После решения МКЭ внутренней краевой задачи для уравнений (5) в областях $\Omega_1, \Omega, \Omega'_1, \Omega'$ и (19) в Ω'_0 с граничными условиями (8), (10), (17), (18) и второго из (20) коэффициенты A_m определим по (25) через узловые значения Ψ_k на поверхности Γ_0 .

Таким образом, задача дифракции оказывается полностью решенной и для анализа полей колебаний внутри D используются ряды (23), (24), а для анализа рассеянного акустического поля вне D – ряд (21).

4. Численные исследования

Полученное решение использовано для анализа влияния неоднородности анизотропного покрытия упругого покрытия цилиндра на рассеяние звука для частных значений параметров падающей волны, геометрических и материальных параметров сред.

Переменные параметры неоднородного слоя (1) представлялись в виде

$$\rho = \rho^* \cdot f(r_1); \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ij}^* \cdot g(r_1) \quad (26)$$

где ρ^*, λ_{ij}^* – среднее значение соответствующей величины по толщине слоя. Для слоя Ω' в зависимостях (26) координата r_1 меняется на r_2 .

Функции $f(r_1), g(r_1)$ принимала одну из трех линейных зависимостей

$$f_0(r_1) = 1; \quad f_1(r_1) = 1.5 - (r_1 - b)/h; \quad f_2(r_1) = 0.5 + (r_1 - b)/h, \quad (27)$$

первая из которых представляет вариант неизменного значения параметра по толщине слоя; вторая представляет зависимость, в которой значение параметра убывает с ростом r_1 на отрезке $[a, b]$ от 1.5 до 0.5; третья – зависимость, в которой значение параметра возрастает с ростом r_1 на отрезке $[a, b]$ от 1.5 до 0.5.

При расчетах использовались следующие геометрические соотношения и параметры падающей волны: $a/b = 1.5$; $d/a = 2$; $k_0 a = 5$; $\varphi_0 = -\pi/4$. Плотность и скорость звука содержащей среды – $\rho_0 = 1000$ кг/м³; $c_0 = 1485$ м/с. Плотность и модули упругости Ламе внутренней части цилиндра – $\rho_1 = 2700$ кг/м³; $\lambda_1 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м². Для внешнего слоя цилиндра рассматривались два типа анизотропного материала с плотностью, совпадающей с плотностью изотропной части цилиндра ($\rho = \rho_1$), а модули упругости задавались значениями:

1-й тип – $\lambda_{11} = 5.74 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\lambda_{12} = 3.28 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\lambda_{22} = 16.40 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$;
 $\lambda_{55} = 2.54 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$;
 2-й тип – $\lambda_{11} = 16.40 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\lambda_{12} = 8.19 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $\lambda_{22} = 5.74 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$;
 $\lambda_{55} = 2.95 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Для обоих типов анизотропного материала скорость распространения квазипоперечных волн приближенно равна скорости поперечных волн в однородной (внутренней) части цилиндра Ω_1 и почти не зависит от направления распространения. Диаграммы распределения скоростей квазипродольных волн по углу между направлением распространения и осью упругой симметрии имеют форму эллипсов с отношением полуосей около 2. При этом большая ось эллипса для материала типа 1 направлена по оси упругой симметрии, а для материала типа 2 – ортогональна оси упругой симметрии.

В качестве исследуемой величины рассматривалась амплитуда нормированного давления $p(\varphi) = \Psi_0$ в точках окружности $r_1 = 1.1a$ (вблизи поверхности первого цилиндра)

На рис. 4, 5 зависимости $|p(\varphi)|$ представлены в виде полярных диаграмм, в которых ось $\varphi = 0$ соответствует направлению оси O_1x_1 . Для интерпретации геометрических соотношений в цилиндре и контуре наблюдения на рисунках пунктирной линией изображены три окружности. Внешняя окружность единичного радиуса соответствует амплитуде нормированного давления в падающей волне (2). Соотношение между внешней окружностью и второй окружностью соответствует соотношению между контуром наблюдения давления и радиусом цилиндра a . Наконец соотношение между второй и внутренней окружностями соответствует соотношению между внешним радиусом цилиндра a и радиусом однородной его части b .

На каждом из рисунков изображены две зависимости $|p(\varphi)|$, одна сплошной линией, другая (для сравнения) – штриховой. Направление распространения первичной волны (2) показано тремя стрелками с подписью " Ψ_p ".

На рис. 4 сплошной линией диаграмма распределения давления в случае наличия жесткой поверхности Π для однородного изотропного цилиндра, а пунктирной – аналогичная диаграмма для того же цилиндра в свободном пространстве.

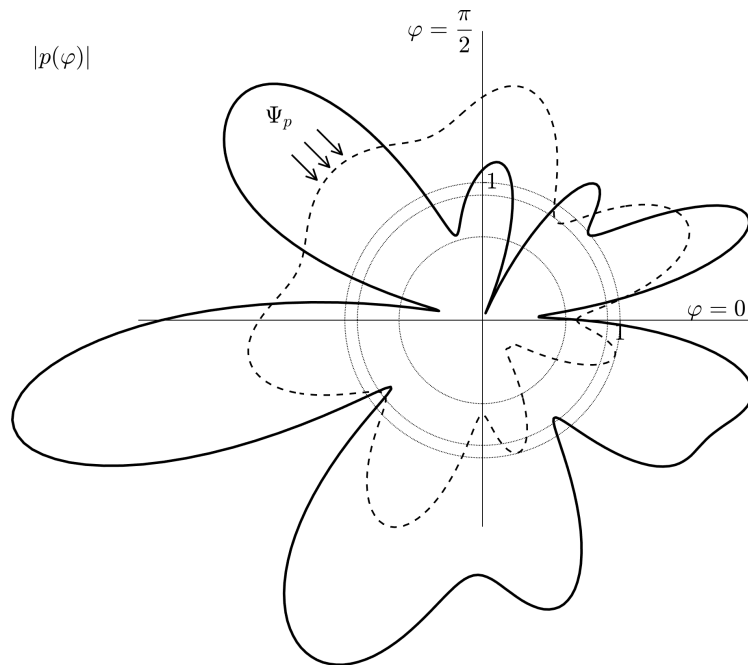


Рис. 4: Диаграмма распределения давления в случае наличия жесткой поверхности

Видно, что наличие поверхности радикально изменяет картину распределения амплитуды

давления.

На рис. 5 показаны диаграммы распределения давления в случае когда внешний слой цилиндра является анизотропным (но однородным). Пунктирная линия соответствует случаю однородного изотропного цилиндра.

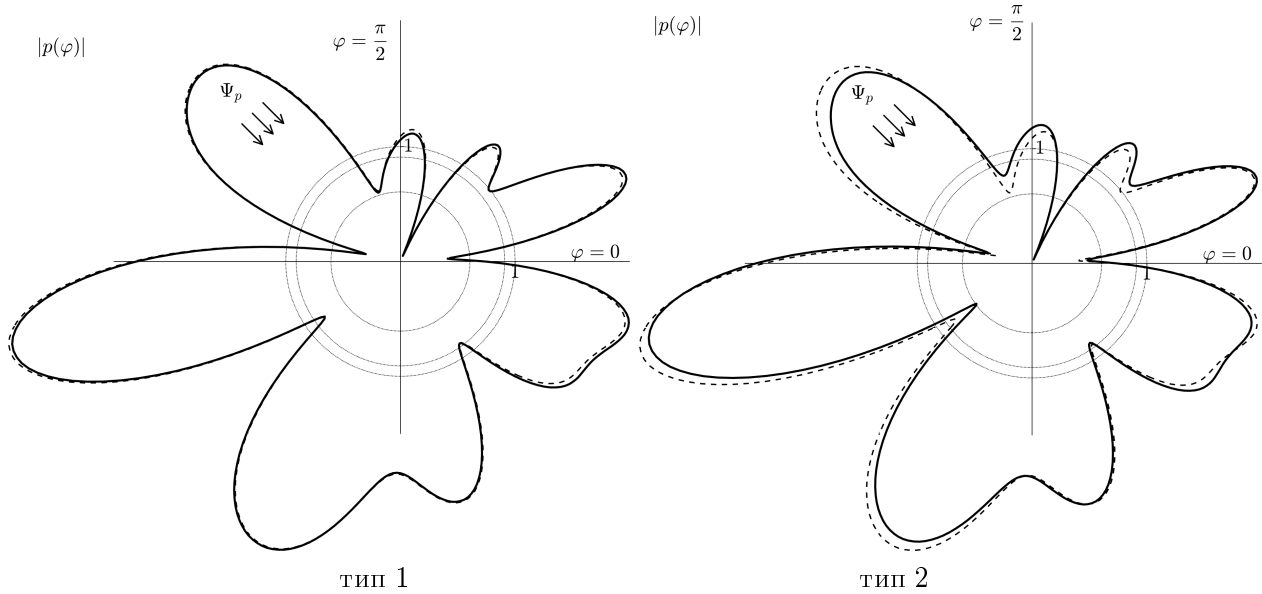


Рис. 5: Влияние анизотропии

Видно, что анизотропия слоя типа 2 влияет на рассеянное давление заметнее чем анизотропия типа 1.

На рис. 6 показано влияние переменной плотности материала внешнего слоя цилиндра. Сплошная линия соответствует зависимости $\rho(r_1)$ по закону $f_2(r_1)$, а пунктирная линия – по закону $f_1(r_1)$.

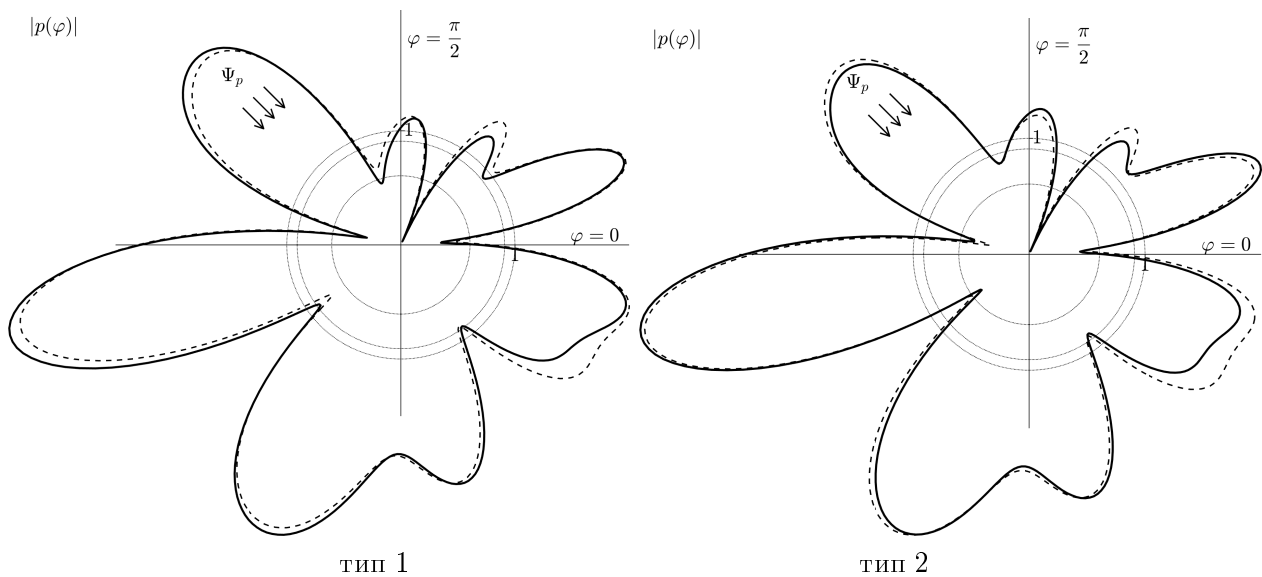


Рис. 6: Влияние переменной плотности

Результаты показывают, что изменяя закон зависимости $\rho^* \cdot f(r_1)$ можно добиться изменения давления в теневой области на 5-7%. Анализ влияния изменения отдельно вида зависи-

мостей $g(r_1)$ для модулей упругости и одновременно изменения законов $f(r_1)$ и $g(r_1)$ показал, что при выбранных параметрах падающей волны эффект изменения давления в ближней зоне не превышает 10-15%.

На последнем рисунке (рис. 7) показано влияние на рассеянное поле типа поверхности Π для случая цилиндра с однородным анизотропным слоем типа 1.

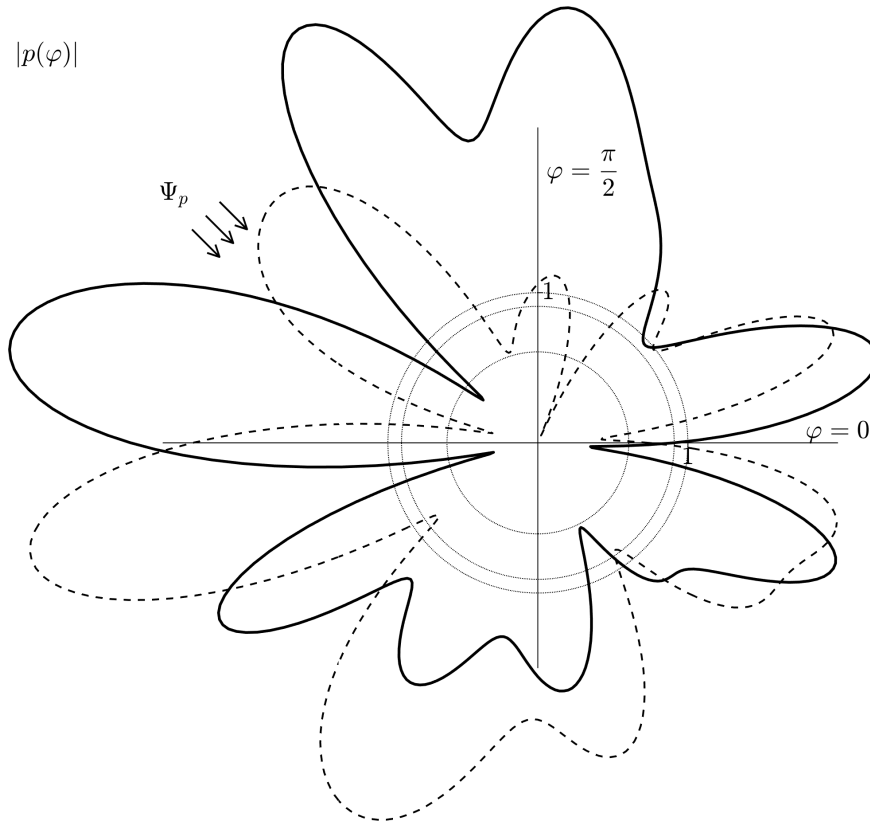


Рис. 7: Сравнение эффекта смены типа поверхности Π

Сплошная линия соответствует варианту, когда Π является идеально мягкой, а пунктирная линия – идеально жесткой. Видно, что изменение типа подстилающей поверхности имеет тот же порядок влияния на рассеянное поле, что и само введение подстилающей поверхности (см. рис. 4).

5. Заключение

Полученное решение позволяет оценить влияние на рассеяние звуковых волн типа подстилающей поверхности Π , анизотропии и неоднородности материала внешнего слоя упругого цилиндра.

Расчеты показали, что при рассмотренных параметрах падающей волны, геометрических и материальных параметров упругого цилиндра наиболее существенное влияние на рассеяние звука оказывает тип подстилающей поверхности, смена которого приводит к изменению давления на порядок, а выбором типа анизотропии и вида неоднородности можно изменить давление в ближнем поле на 5-10%.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах М.: Наука, 1965. 388 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
7. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
8. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64–75.
9. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение геометрических параметров конечного цилиндра, расположенного у границы полупространства, по рассеянному звуку // Сб. трудов Междунар. научно-технической конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" Воронеж: "Научно-исследовательские публикации". 2018. С. 1263–1269.
10. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 220–237.
11. Скобельцын С.А., Федотов И.С., Титова А.С. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4. С. 177–193.
12. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 7. С. 183–200.
13. Skobelt'syn S.A., Peshkov N.Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1203. 012023. P. 1–10
14. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 2013. 226 p.
15. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Изв. ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Тула: ТулГУ, 2008. С. 132–145.
16. Скобельцын С.А. О порядке решения задачи дифракции звука упругим телом с полостью с использованием МКЭ // Вестн. ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2012. Вып. 1. С. 51–58.
17. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

REFERENCES

1. E. Skudrzyk, 1976, *Basics of acoustics*, [*Osnovy akustiki*], vol. 1. Moscow, Mir.
2. N. S. Koshliakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, 1970. *Partial differential equations of mathematical physics*, [*Uravneniia v chastny'kh proizvodny'kh matematicheskoi' fiziki*], Moscow, Vysshaia shkola.
3. V. Novatckii, 1975, *Elasticity theory* [*Teoriia uprugosti*], Moscow, Mir.
4. F. I. Fedorov, 1965, *The theory of elastic waves in crystals*, [*Teoriya uprugikh voln v kristallakh*], Moscow, Vysshaia shkola.
5. S. G. Lekhnitskii, 1977, [*Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*], Moscow, Nauka.
6. M. A. Isakovich, 1973, *General acoustics* [*Obshchaia akustika*], Moscow, Nauka.
7. E. A. Ivanov, 1968, *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*, [*Difrakciya elektromagnitnykh voln na dvuh telakh*], Minsk, Science and Technology.
8. S. A. Skobeltsyn and L. A. Tolokonnikov, 2015, "Difraktsiia ploskoi zvukovoi volny na uprugom sferoide s neodnorodnym pokrytiem v prisutstvii podstilaiushchei poverkhnosti", *Izv. TulGU. Estestvennye nauki*, issue 2. pp. 64–75.
9. S. A. Skobeltsyn and N. Y. Peshkov, 2018, "Opredelenie geometricheskikh parametrov konechnogo tsilindra, raspolozhennogo u granitsy poluprostranstva, po rasseiannomu zvuku", *Sb. trudov Mezhdunar. nauchno-tekhnicheskoi konf. "Aktualnye problemy prikladnoi matematiki, informatiki i mehaniki"*, Voronezh, Nauchno-issledovatel'skie publikatsii.
10. S. A. Skobeltsyn, 2018, "Rasseianie zvukovykh voln uprugim ellipsoidom s neodnorodnym pokrytiem v poluprostranstve s idealnoi poverkhnosti", *Chebyshevskii sbornik*, vol 19, no 1, pp. 220–237.
11. S. A. Skobeltsyn, I. S. Fedotov and A. S. Titova, 2018, "Difraktsiia zvuka na uprugom share s neodnorodnym pokrytiem i polostiu v poluprostranstve", *Chebyshevskii sbornik*, vol 19, no 4, pp. 177–193.
12. S. A. Skobeltsyn and N. Y. Peshkov, 2018, "Rasseianie zvuka neodnorodnym uprugim ellipticheskim tsilindrom v akusticheskom poluprostranstve", *Izv. TulGU. Tekhnicheskie nauki*, issue 7, pp. 183–200.
13. S. A. Skobel'tsyn and N. Y. Peshkov, 2019, "Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border", *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol 1203. 012023, pp. 1–10
14. F. Ihlenburg, 2013, *Finite element analysis of acoustic scattering*, New York: Springer Publishing Company, Inc.
15. В.И.ИВАНОВ and S. A. Skobeltsyn, 2008, "Modelirovanie reshenii zadach akustiki s ispolzovaniem MKE", *Izv. TulGU. Estestvennye nauki*, issue 2. pp. 132–145.
16. S. A. Skobeltsyn, 2012, "O poriadke resheniia zadachi difraktsii zvuka uprugim telom s polostiu s ispolzovaniem MKE", *Vestn. TulGU. Seriya: Differentsialnye uravneniia i prikladnye zadachi*, issue 1, pp. 51–58.

17. E. L. Shenderov, 1972, *Wave problems of hydroacoustics*, [*Volnovye zadachi gidroakustiki*], Leningrad, Shipbuilding.

Получено 16.07.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.