

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-200-224

Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru

Аннотация

При решении ряда аддитивных задач с почти равными слагаемыми наряду с оценкой коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

в малых дугах, также нужны оценки этих сумм в больших дугах за исключением малой окрестности их центров, и асимптотическая формула в малой окрестности центра больших дуг.

В работе, воспользовавшись вторым моментом L -функций Дирихле на критической прямой для $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathcal{L}^{-b_1}$, $\mathcal{L} = \ln xq$ за исключением малой окрестности их центров $|\alpha - \frac{a}{q}| > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$, при $y \geq x^{1 - \frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}$,

$$\eta_k = \frac{2}{4k - 5 + 2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \quad c_k = \frac{2A + 22 + \left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}} - 1\right) b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)} - (2k-3)},$$

получена нетривиальная оценка вида

$$S_k(\alpha; x, y) \ll y \mathcal{L}^{-A},$$

где A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, а в малой окрестности центров больших дуг доказана асимптотическая формула.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, большие дуги, плотностная теорема, L -функция Дирихле

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

З. Х. Рахмонов. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 200–224.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-200-224

Estimates of short exponential sums with primes in major arcs

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru

Abstract

For a number of additive problems with almost equal summands, in addition to the estimates for short exponential sums with primes of the form

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

in minor arcs, we need to have an estimate of these sums in major arcs, except for a small neighborhood of their centers. We also need to have an asymptotic formula on a small neighborhood of the centers of major arcs.

In this paper, using the second moment of Dirichlet L -functions on the critical line, we obtained a nontrivial estimate of the form

$$S_k(\alpha; x, y) \ll y \mathcal{L}^{-A},$$

for $S_k(\alpha; x, y)$ in major arcs $M(\mathcal{L}^b)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathcal{L}^{-b_1}$, $\mathcal{L} = \ln xq$, except for a small neighborhood of their centers $|\alpha - \frac{a}{q}| > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$, when $y \geq x^{1 - \frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}$, where

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \quad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

and A, b_1, b are arbitrary fixed positive numbers. Furthermore, and we also proved an asymptotic formula on a small neighborhood of the centers of major arcs.

Keywords: Short exponential sum with primes, major arcs, density theorem, Dirichlet L -function

Bibliography: 22 titles.

For citation:

Z. Kh. Rakhmonov 2021, “Estimates of short exponential sums with primes in major arcs”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 200–224.

1. Введение

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varkappa, 1 - \varkappa]$, $\varkappa\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α , для которых $q \leq P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α . $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [1, 2] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln \ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq 2N \\ x-y < mn \leq x}} b_n e(\alpha(mn)^k)$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \leq \tau^c(m)$, $|b_n| \leq \tau^c(n)$, $M, N, U \geq N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же.

Затем Хейзелгроув С.Б. [3], Статулявичус В. [4], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [5], Тао Ж. [6] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geq x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leq H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \quad \frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [7] как в малых дугах, так и в больших дугах получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \quad \left| p_j - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

и в работе [8, 9] решили задачу Хуа [10] о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N , $N \equiv 5 \pmod{24}$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \dots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [11] воспользовавшись теоремой М. Ютилы [12] о четвертом моменте L -функций Дирихле в критической прямой, получили нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$, $k \geq 3$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^{c_1})$, $\tau = y^{2k-1} x^{-k+1} \mathcal{L}^{-c_3}$ при $y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1}+\varepsilon}$, где $\mathcal{L} = \ln xq$. Кумчев А.В. [13] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}} P^{-1}$ при $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$. Яо Я. [14], воспользовавшись этими оценками, обобщил теорему Хуа [10] в проблеме Варинга – Гольдбаха для кубов, то есть доказал, что всякое достаточно большое нечетное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \dots + p_9^3 = N, \quad \left| p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}} \right| \leq N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [15, 16], воспользовавшись методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, получили нетривиальную оценку вида

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}(\mathcal{L}^{32(B+20)})$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathcal{L}^{-32(B+20)}$ при $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathcal{L}^{8B+151}$, где B — абсолютная постоянная (см. также [17, 18, 19, 20]).

Основным результатом этой работы является теорема о поведении суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$, $\tau = y^{2k-1} x^{-k+1} \mathcal{L}^{-b_1}$, где b, b_1 — произвольные фиксированные положительные числа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $x \geq x_0$, $k \geq 3$ — фиксированное целое число, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}} \mathcal{L}^{-b_1}.$$

Тогда при $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$ справедливо равенство

$$S_k(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{an^k}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du + O(y \mathcal{L}^{-A}),$$

а при $\lambda > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}$, где

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \quad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

имеет место оценка

$$S_k(\alpha; x, y) \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Явные значения параметра η_k при k равным 3, 4, 5 и 6 имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta_3 &= \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0,1435935394, & \eta_4 &= \frac{2}{11+2\sqrt{30}} \approx 0,0910976998, \\ \eta_5 &= \frac{2}{15+4\sqrt{14}} \approx 0,0667409058, & \eta_6 &= \frac{2}{19+2\sqrt{90}} \approx 0,052668078. \end{aligned}$$

Эта теорема чуть слабее, чем вышеуказанная теорема Лю Дж. и Тао Ж. [11], и в её доказательстве используется теорема о втором моменте L -функций Дирихле на критической прямой [21, 22] (см. также [23, 24]).

2. Известные леммы

ЛЕММА 1. Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geq m_1 > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [25]

ЛЕММА 2. Пусть действительная функция — $f(u)$, и монотонная функция — $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f''(u)| \geq m_2 > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{\sqrt{m_2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [25]

ЛЕММА 3. Пусть $2 \leq T_0 \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s, \chi)$. Тогда

$$\psi(x, \chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x, T_0), \quad R(x, T_0) \ll \frac{x \mathcal{L}^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [26]

ЛЕММА 4. При подходящем $c > 0$ функция $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$ не имеет нулей в области

$$\sigma \geq 1 - \delta(q, t), \quad \delta(q, t) = \frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t| + 3) \ln^{3/4} \ln(|t| + 3))},$$

для всех характеров χ по $\bmod q$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L -функции, определенной исключительным характером χ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [27]

ЛЕММА 5. Число нулей ρ функции $L(s, \chi)$, $\chi \pmod{q}$, для которых $T \leq |\gamma| \leq T + 1$, не превосходит $c \ln q T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [28].

ЛЕММА 6. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что если χ_1 — действительный характер по модулю q и β_1 — действительный нуль $L(s, \chi_1)$, то

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [28].

ЛЕММА 7. Пусть ε сколь угодно малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108} + \varepsilon} \leq H \leq T$, тогда справедливы оценки

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u, T + H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)} (\ln qH)^9, & \text{для } \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{4} \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u) + \varepsilon}, & \text{для } \frac{3}{4} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [22].

ЛЕММА 8. Пусть a , k и q — натуральные числа, $(a, q) = 1$, $\nu_k(q)$ — число вычетов степени k по модулю q ,

$$\tau(\chi, a, k) = \sum_{h=1}^q \chi(h) e\left(\frac{ah^k}{q}\right),$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\tau(\chi, a, k)| \leq 2(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}} \sqrt{q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Утверждение леммы следует из задач 8.а) и 8.б), стр. 103 учебника [29].

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы разобьём на несколько этапов.

3.1. Сведение доказательства теоремы к оценке суммы $W(\alpha; x, y)$

Из условия $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$, $k \geq 3$ — фиксированное целое число, следует, что

$$\frac{q(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}}}{\varphi(q)} \ll \mathcal{L}.$$

Применяя к сумме $\tau(\chi, a, k)$ лемму 8, а затем последнюю оценку, найдем

$$|\tau(\chi, a, k)| = \left| \sum_{h=1}^q \chi(h) e\left(\frac{ah^k}{q}\right) \right| \leq 2\sqrt{q}(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}} \ll \frac{\varphi(q)\mathcal{L}}{\sqrt{q}}. \quad (1)$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, находим

$$S_k(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \tau(\bar{\chi}, a, k) \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(\lambda n^k) + O(\mathcal{L}^2). \quad (2)$$

Далее применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем

$$\sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(\lambda n^k) = - \int_{x-y}^x \psi(u, \chi) d e(\lambda u^k) + e(\lambda x^k) \psi(x, \chi) - e(\lambda(x-y)^k) \psi(x-y, \chi).$$

Пользуясь леммой 3 при $T_0 = (xy^{-1} + |\lambda|x^k) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3}$, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(\lambda n^k) &= - \int_{x-y}^x \left(E_0 u - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{u^\rho}{\rho} \right) d e(\lambda u^k) + e(\lambda x^k) \left(E_0 x - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} \right) - \\ &\quad - e(\lambda(x-y)^k) \left(E_0(x-y) - \sum_{|\gamma| \leq T_0} \frac{(x-y)^\rho}{\rho} \right) - \\ &\quad - \int_{x-y}^x R(u, T_0) 2\pi i k \lambda u^{k-1} e(\lambda u^k) du + e(\lambda x^k) R(x, T_0) - e(\lambda(x-y)^k) R(x-y, T_0). \end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям, а также пользуясь оценкой для $R(u; T_0, \chi)$ из леммы 3 и значением параметра T_0 , найдем

$$\begin{aligned} \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(\lambda n^k) &= E_0 \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du - \sum_{|\gamma| \leq T_0} I(\rho, \lambda) + O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+1}}\right), \\ I(\rho, \lambda) &= \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e\left(\lambda u^k + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u\right) du. \end{aligned}$$

Подставляя найденную формулу в (2) и воспользовавшись оценкой (1), находим

$$\begin{aligned} S_k(\alpha; x, y) &= \frac{\tau(\chi_0, a, k)}{\varphi(q)} \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du - W(\alpha; x, y) - E_1 W_1(\alpha; x, y) + O(y \mathcal{L}^{-A}), \\ W(\alpha; x, y) &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \tau(\bar{\chi}, a, k) \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} I(\rho, \lambda), \end{aligned} \quad (3)$$

$$W_1(\alpha; x, y) = \frac{\tau(\chi_1, a, k)}{\varphi(q)} I(\beta_1, \lambda),$$

где $E_1 = 1$, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль β_1 , $\beta_1 \geq 1 - c/\ln q$ и $E_1 = 0$ в противном случае.

Оценка $|W_1(\alpha; x, y)|$. Пользуясь тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1, a, k)$ и интеграла $I(\beta_1, \lambda)$, найдем

$$|W_1(\alpha; x, y)| = \left| \frac{\tau(\chi_1, a, k)}{\varphi(q)} \int_{x-y}^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1} e(\lambda u^k) du \right| \ll yx^{\beta_1-1}.$$

Согласно лемме 6, имея в виду, что $q \leq \mathcal{L}^b$, при $\varepsilon = (2b)^{-1}$ имеем

$$x^{\beta_1-1} = \exp((\beta_1 - 1)\mathcal{L}) \leq \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathcal{L}}{q^\varepsilon}\right) \leq \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathcal{L}}{\mathcal{L}^{b\varepsilon}}\right) = \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathcal{L}}).$$

Следовательно,

$$|W_1(\alpha; x, y)| \ll y \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathcal{L}}) \ll y\mathcal{L}^{-A}. \quad (4)$$

Преобразование $|W(\alpha; x, y)|$. Переходя к оценкам, имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \leq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} |\tau(\bar{\chi}, a, k)| W(\lambda, \chi), \quad W(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, \lambda)|, \quad (5)$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 \geq 1 - c/\ln q$. Сумму $|W(\alpha; x, y)|$ будем оценивать только в случае $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda \leq 0$, сводится к случаю $\lambda \geq 0$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned} W(\lambda, \chi) &= \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |\overline{I(\rho, \lambda)}| = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} \left| \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e\left(-\lambda u^k - \frac{1}{2\pi} \gamma \ln u\right) du \right| = \\ &= \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\bar{\rho}, -\lambda)| = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, -\lambda)| = W(\chi, -\lambda), \end{aligned}$$

Оценивая интеграл $I(\rho, \lambda)$, воспользовавшись леммой 1, при $M = x^{\beta-1}$, $f(u) = \lambda u^k + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u$ и $m_1 = \min f'(u)$, найдем

$$|I(\rho, \lambda)| \leq \frac{x^{\beta-1}}{\min |f'(u)|} = \frac{x^\beta}{\min |xf'(u)|}, \quad f'(u) = k\lambda u^{k-1} + \frac{\gamma}{2\pi u} = \frac{\gamma + 2\pi k\lambda u^k}{2\pi u}.$$

Интеграл $I(\rho, \lambda)$ оценим также и при помощи леммы 2, полагая $M = x^{\beta-1}$, $m_2 = \min f''(u)$. Имеем

$$|I(\rho, \lambda)| \leq \frac{x^{\beta-1}}{\sqrt{\min |f''(u)|}} = \frac{x^\beta}{\sqrt{\min |x^2 f''(u)|}}, \quad f''(u) = \frac{2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma}{2\pi u^2}.$$

Следовательно, с учётом следующей тривиальной оценки

$$|I(\rho, \lambda)| \leq \int_{x-y}^x u^{\beta-1} du \leq yx^{\beta-1},$$

имеем

$$|I(\rho, \lambda)| \leq x^\beta \min \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |xf'(u)|}, \frac{1}{\sqrt{\min |x^2 f''(u)|}} \right).$$

Эту оценку, пользуясь соотношениями

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi k\lambda u^k| \frac{x}{2\pi u} \geq |\gamma + 2\pi k\lambda u^k| \frac{x}{2\pi x} \geq \frac{1}{2\pi} |\gamma + 2\pi k\lambda u^k|,$$

$$|x^2 f''(u)| = \frac{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|x^2}{2\pi u^2} \geq \frac{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|}{2\pi},$$

представим в виде

$$|I(\rho, \lambda)| \ll x^\beta \min \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min |\gamma + 2\pi k\lambda u^k|}, \frac{1}{\sqrt{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|}} \right). \quad (6)$$

Подставляя эту оценку и (1) в (5), получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \bmod q} W(\lambda, \chi). \quad (7)$$

3.2. Доказательство теоремы в случае $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$

В этом пункте будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18} \leq y \leq x \mathcal{L}^{-A-0,5b-3}. \quad (8)$$

Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ с условием $|\gamma| \leq T_0$ разобьём на множества D_1 , D_2 и D_3 следующим образом:

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 \leq \gamma < -2\pi k\lambda x^k - \frac{x}{y} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \rho : -2\pi k\lambda x^k - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq -2\pi k\lambda(x-y)^k + \frac{x}{y} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ \rho : -2\pi k\lambda(x-y)^k + \frac{x}{y} < \gamma \leq T_0 \right\}.$$

Обозначая через $W_j(\lambda, \chi)$, $j = 1, 2, 3$ сумму модулей интеграла $I(\rho, \lambda)$ по нулям ρ , принадлежащим множеству D_j , представим сумму $W(\lambda, \chi)$ в (5) в виде:

$$W(\lambda, \chi) = W_1(\lambda, \chi) + W_2(\lambda, \chi) + W_3(\chi, \lambda). \quad (9)$$

Оценка $W_1(\lambda, \chi)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k\lambda u^k$, $x - y \leq u \leq x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1 , получим

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 + 2\pi k\lambda u^k \leq \gamma + 2\pi k\lambda u^k < -2\pi k\lambda x^k + 2\pi k\lambda u^k - \frac{x}{y} \right\},$$

В отрезке $x - y \leq u \leq x$ функция $2\pi k\lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1 , имеем

$$-2\pi k\lambda x^k + 2\pi k\lambda u^k - \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_1 , то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi k\lambda u^k < -\frac{x}{y}$, поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k\lambda u^k$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi k\lambda u^k| = -\max(\gamma + 2\pi k\lambda u^k) = -\gamma - 2\pi k\lambda x^k \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_1.$$

Отсюда с учетом второй оценки (6), находим

$$W_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k \lambda x^k}.$$

Все нули в множестве

$$D_1 = \left\{ \rho : \frac{x}{y} \leq -\gamma - 2\pi k \lambda x^k < T_0 - 2\pi k \lambda x^k \right\},$$

разобьем на классы $D_{11}, \dots, D_{1r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ , для которых выполняются условия:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 2\pi k \lambda x^k \leq \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$W_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k \lambda x^k} \leq \frac{y}{x} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{1 \leq n \leq r} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Оценка $W_3(\chi, \lambda)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k \lambda u^k$, $x - y \leq u \leq x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3 , получим

$$D_3 = \left\{ \rho : 2\pi k \lambda u^k - 2\pi k \lambda (x - y)^k + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi k \lambda u^k \leq T_0 + 2\pi k \lambda u^k \right\}.$$

В отрезке $x - y \leq u \leq x$ функция $2\pi k \lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множество D_3 , имеем

$$2\pi k \lambda u^k - 2\pi k \lambda (x - y)^k + \frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_3 , то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi k \lambda u^k > \frac{x}{y}$, поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k \lambda u^k$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi k \lambda u^k| = \min(\gamma + 2\pi k \lambda u^k) = \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_3.$$

Отсюда с учетом второй оценки (6), находим

$$W_3(\chi, \lambda) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k}.$$

Все нули в множестве

$$D_3 = \left\{ \rho : \frac{x}{y} \leq \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k < T_0 + 2\pi k \lambda (x - y)^k \right\},$$

разобьем на классы $D_{31}, \dots, D_{3r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$ следующим образом: в класс D_{3n} отнесем те нули ρ , для которых выполняются условия:

$$\frac{nx}{y} < \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k \leq \frac{(n+1)x}{y}, \quad \text{если } 1 \leq n \leq r.$$

Поэтому

$$W_3(\chi, \lambda) \ll \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi k \lambda (x-y)^k} \leq \frac{y}{x} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Оценка $W_2(\lambda, \chi)$. Представляя множество D_2 в виде

$$D_2 = \left\{ \rho : T_1 - 2\pi k \lambda (x^k - (x-y)^k) + \frac{2x}{y} \leq -\gamma \leq T_1 \right\}, \quad T_1 = 2\pi k \lambda x^k + \frac{x}{y} \leq T_0,$$

имея в виду, что при $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ для длины множество D_2 выполняется неравенство

$$2\pi k \lambda (x^k - (x-y)^k) + \frac{2x}{y} \leq 2\pi k^2 \lambda x^{k-1} y + \frac{2x}{y} \leq \frac{(2k+2)x}{y},$$

и воспользовавшись тривиальной оценкой интеграла $I(\rho, \lambda)$, то есть первой оценкой (6), имеем

$$W_2(\lambda, \chi) \leq \sum_{\rho \in D_2} |I(\rho, \lambda)| \ll \frac{y}{x} \sum_{\rho \in D_2} x^\beta \leq \frac{(2k+2)y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} \leq -\gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq T} x^\beta.$$

Подставляя полученные оценки для $W_1(\lambda, \chi)$, $W_3(\chi, \lambda)$ и $W_3(\chi, \lambda)$ в (9), а затем (7), найдем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}^2}{\sqrt{q}x} \max_{|T| \leq T_0} V_q \left(T, \frac{x}{y} \right), \quad (10)$$

$$V_q(T, U) = \sum_{\chi \bmod q} \sum_{T-U < \gamma \leq T} x^\beta, \quad U \leq T.$$

Для оценки $V_q(T, U)$ воспользуемся плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы для нулей L -рядов Дирихле по модулю q и теоремой о границе этих нулей. Имеем

$$V_q(T, U) = \mathcal{L} \int_0^1 x^u \sum_{\chi \bmod q} (N(u, T, \chi) - N(u, T-U, \chi)) du + \sum_{\chi \bmod q} (N(T, \chi) - N(T-H, \chi)) \leq$$

$$\leq 2\mathcal{L} \max_{0.5 \leq u \leq 1} x^u \sum_{\chi \bmod q} (N(u, T, \chi) - N(u, T-U, \chi)).$$

Согласно лемме 4 функция $L(u+it, \chi)$ не имеет нулей в области

$$u \geq 1 - \delta(q, t), \quad \delta(q, t) = \frac{c_1}{\max \left(\ln q, (\ln(t+3) \ln \ln(t+3))^{\frac{3}{4}} \right)},$$

для всех характеров $\chi \bmod q$, за исключением, быть может, простого действительного нуля β_1 у L -функции, определенной исключительным характером χ_1 . Поэтому имея в виду, что $\delta(q, T) \geq \delta(q, T_0)$, найдем

$$V_q(T, U) \leq 2\mathcal{L} \max_{0.5 \leq u \leq 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} (N(u, T, \chi) - N(u, T-U, \chi)), \quad \delta = \delta(q, T_0). \quad (11)$$

Подставляя правую часть этого неравенства при $U = \frac{x}{y}$ в (10), найдем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}^3}{\sqrt{q}x} \max_{|T| \leq T_0} \max_{0.5 \leq u \leq 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u, T, \chi) - N \left(u, T - \frac{x}{y}, \chi \right) \right). \quad (12)$$

Из соотношения $|T| \leq T_0 = (xy^{-1} + |\lambda|x^k) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3}$, $0 \leq \lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и условия (8), имеем

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3} \leq \left(\frac{y^2}{x^2} + \lambda x^{k-3} y^3 \right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{2\pi k^2 x} \right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq 1.$$

Отсюда следует, что в сумме по $\chi \bmod q$ в (12) выполняется условие $\frac{x}{y} \geq T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме можно применить лемму 7. Полагая в этой лемме $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{y \mathcal{L}^{12}}{\sqrt{q} x} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} x^u \left(\frac{qx}{y} \right)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{y \mathcal{L}^3}{\sqrt{q} x} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left(\frac{qx}{y} \right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Оценка $\mathcal{A}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{q^{1,5} x \mathcal{L}^{12}}{y} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} f_1(u), \quad f_1(u) = x^u \left(\frac{qx}{y} \right)^{\frac{1}{u-1,5}} > 0, \\ f_1'(u) &= f_1(u) \left(\ln x + \frac{\ln \left(\frac{y}{qx} \right)}{(u-1,5)^2} \right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln \frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}}. \end{aligned}$$

Из условий $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$ и $q \leq \mathcal{L}^b$, а также из соотношения

$$\max_{0,5 \leq u \leq 0,75} (-u^2 + 3u - 1, 25) = (-u^2 + 3u - 1, 25)|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln \frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}} \geq \ln \frac{y x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathcal{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \geq \ln x^{\frac{3}{16}} \mathcal{L}^{1,5A+18-0,75b} > \ln x^{\frac{1}{8}} > 0,$$

то есть $f_1'(u) > 0$ и $f_1(u)$ возрастающая функция. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$\mathcal{A}_1 = \frac{x q^{1,5} \mathcal{L}^{12}}{y} x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{qx}{y} \right)^{-\frac{4}{3}} = y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} q^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}^{18}}{y} \right)^{\frac{2}{3}} \leq y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{0,25b+18}}{y} \right)^{\frac{2}{3}} \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Оценка $\mathcal{A}_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \frac{y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} f_2(u), \quad f_2(u) = x^u \left(\frac{qx}{y} \right)^{\frac{2}{u}} > 0, \quad \delta = \delta(q, T_0). \\ f_2'(u) &= f_2(u) \left(\ln x + \frac{\ln \left(\frac{y}{qx} \right)}{u^2} \right) = \frac{f_2(u)}{u^2} \ln \frac{y}{qx^{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Из условий $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$ и $q \leq \mathcal{L}^b$, а также из соотношения

$$\max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta} (-u^2 + 1) = (-u^2 + 1)|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln \frac{y}{qx^{1-u^2}} \geq \ln \frac{x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathcal{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \geq \ln \left(x^{\frac{3}{16}} \mathcal{L}^{1,5A+18-0,75b} \right) > 0,$$

то есть $f'_2(u) > 0$ и $f_2(u)$ возрастающая функция. Воспользовавшись этим свойством, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \frac{y^{3-\varepsilon} \mathcal{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} x^{1-\delta} \left(\frac{qx}{y} \right)^{\frac{2}{1-\delta}} = y \cdot \frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon} \mathcal{L}^3}{q^{0,5+\frac{2\delta}{1-\delta}-\varepsilon} y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} \leq y \cdot \frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon} \mathcal{L}^3}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} = \\ &= y \mathcal{L}^3 \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}}{y} x^{f(\delta,\varepsilon)} \mathcal{L}^{-1,5A-0,25b-18} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}, \\ f(\delta,\varepsilon) &= \frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Отсюда имея в виду, что $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$, получим

$$\mathcal{A}_2 \ll y \cdot x^{f(\delta,\varepsilon) \frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}} \mathcal{L}^3.$$

Далее при $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, воспользовавшись соотношением

$$f(\delta,\varepsilon) \frac{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = -\frac{\delta}{8} + \frac{3}{8} \left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3(1-\delta)} \right) \leq -\frac{\delta}{8},$$

находим

$$\mathcal{A}_2 \ll y x^{-0,125\delta} \mathcal{L}^3 \ll y \mathcal{L}^3 \exp(-0,125\delta \mathcal{L}).$$

Пользуясь условиями $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$T_0 = \left(\frac{x}{y} + \lambda x^k \right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq \left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2\pi k^2 y^2} \right) \mathcal{L}^{A+0,5b+3} \leq \frac{x^2}{y^2} \mathcal{L}^{A+0,5b+3} < x,$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$:

$$\delta(q, T_0) = \frac{c_1}{\max \left(\ln q, (\ln(T_0 + 3) \ln \ln(T_0 + 3))^{\frac{3}{4}} \right)} \geq \frac{c_1}{\max \left(b \ln \mathcal{L}, (\mathcal{L} \ln \mathcal{L})^{\frac{3}{4}} \right)} \geq c_1 \mathcal{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_2 \ll y \mathcal{L}^3 \exp(-0,125c_1 \mathcal{L}^{0,24}) \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку полученной для суммы $\mathcal{A}_1$ в (13), получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Из этой оценки и (4) ввиду (3) получим первое утверждение теоремы.

3.3. Доказательство теоремы в случае $\lambda > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$

Вводим параметр $H = 2\pi k^2 \lambda x^{k-1} y$, который при $\lambda > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$H \geq \frac{x}{y}. \quad (14)$$

Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ с условием $|\gamma| \leq T_0$ разобьём на множества D_1 , D_2 и D_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ \rho : -T_0 \leq \gamma < -2\pi k \lambda x^k - H \right\}, \\ D_2 &= \left\{ \rho : -2\pi k \lambda x^k - H \leq \gamma \leq -2\pi k \lambda (x-y)^k + H \right\}, \\ D_3 &= \left\{ \rho : -2\pi k \lambda (x-y)^k + H < \gamma \leq T_0 \right\}. \end{aligned}$$

Обозначая через $W_j(\lambda, \chi)$, $j = 1, 2, 3$ сумму модулей интеграла $I(\rho, \lambda)$ по нулям ρ , принадлежащим множеству D_j , представим сумму $W(\lambda, \chi)$ в виде

$$W(\lambda, \chi) = W_1(\lambda, \chi) + W_2(\lambda, \chi) + W_3(\chi, \lambda). \quad (15)$$

Оценка $W_1(\lambda, \chi)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k \lambda u^k$, $x - y \leq u \leq x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1 , получим

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 + 2\pi k \lambda u^k \leq \gamma + 2\pi k \lambda u^k < -2\pi k \lambda x^k + 2\pi k \lambda u^k - H \right\},$$

В отрезке $x - y \leq u \leq x$ функция $2\pi k \lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1 , имеем

$$-2\pi k \lambda x^k + 2\pi k \lambda u^k - H \leq -H.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_1 , то выполняется неравенство

$$\gamma + 2\pi k \lambda u^k < -H,$$

поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k \lambda u^k$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi k \lambda u^k| = -\max(\gamma + 2\pi k \lambda u^k) = -\gamma - 2\pi k \lambda x^k \geq H, \quad \text{если } \rho \in D_1,$$

Отсюда с учетом оценки (6), находим

$$W_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k \lambda x^k}.$$

Все нули в множестве

$$D_1 = \left\{ \rho : H \leq -\gamma - 2\pi k \lambda x^k < T_0 - 2\pi k \lambda x^k \right\},$$

разобьём на классы $D_{11}, \dots, D_{1t}$, $t \ll T_0 H^{-1}$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ , для которых выполняются условия:

$$nH < -\gamma - 2\pi k \lambda x^k \leq (n+1)H, \quad \text{если } 1 \leq n \leq t.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} W_1(\lambda, \chi) &\ll \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k \lambda x^k} \leq \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{nH} \leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{1 \leq n \leq t} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \\ &\leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{\mathcal{L}}{\lambda x^{k-1} y} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-\lambda x^{k-1} y < \gamma \leq T} x^\beta. \end{aligned}$$

Оценка $W_3(\lambda, \chi)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k \lambda u^k$, $x - y \leq u \leq x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3 , получим

$$D_3 = \left\{ \rho : 2\pi k \lambda u^k - 2\pi k \lambda (x - y)^k + H < \gamma + 2\pi k \lambda u^k \leq T_0 + 2\pi k \lambda u^k \right\}.$$

В отрезке $x - y \leq u \leq x$ функция $2\pi k \lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множества D_3 имеем

$$2\pi k \lambda u^k - 2\pi k \lambda (x - y)^k + H \geq H.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_3 , то выполняется неравенство

$$\gamma + 2\pi k \lambda u^k > H,$$

поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k \lambda u^k$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi k \lambda u^k| = \min(\gamma + 2\pi k \lambda u^k) = \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k \geq H, \quad \text{если } \rho \in D_3.$$

Все нули в множестве

$$D_3 = \left\{ \rho : H < \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k \leq T_0 + 2\pi k \lambda (x - y)^k \right\},$$

разобьем на классы $D_{31}, \dots, D_{3t}$, $t \ll T_0 H^{-1}$ следующим образом: в класс D_{3n} отнесем те нули ρ , для которых выполняются условия

$$nH < \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k \leq (n+1)H, \quad \text{если } 1 \leq n \leq t.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} W_3(\lambda, \chi) &\ll \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k} \leq \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{nH} \leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{1 \leq n \leq t} \sum_{\rho \in D_{3n}} x^\beta \leq \\ &\leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{\mathcal{L}}{\lambda x^{k-1} y} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-\lambda x^{k-1} y < \gamma \leq T} x^\beta. \end{aligned}$$

Оценка $W_2(\lambda, \chi)$. Вводя обозначения

$$T_1 = 2\pi k \lambda x^k + H, \quad H_1 = 2\pi k \lambda (x^k - (x - y)^k) + 2H, \quad T_2 = T_1 + 2\pi k(k-1)\lambda u^k,$$

где $x - y < u \leq x$, представим множество D_2 в следующих видах:

$$D_2 = \{ \rho : T_1 - H_1 \leq -\gamma \leq T_1 \} = \left\{ \rho : T_2 - H_1 \leq 2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma \leq T_2 \right\}. \quad (16)$$

Воспользовавшись неравенством

$$(x - y)^k \geq x^k - kx^{k-1}y, \quad (17)$$

являющиеся следствием теоремы Лагранжа о конечных разностях, а затем значением параметра $H = 2\pi k^2 \lambda x^{k-1} y$, имеем

$$\begin{aligned} T_2 - H_1 &= 2\pi k(k-1)\lambda u^k + 2\pi k\lambda(x-y)^k - H \geq 2\pi k^2\lambda(x-y)^k - H \geq \\ &\geq 2\pi k^2\lambda \left(x^k - kx^{k-1}y \right) - H = 2 \left(1 - \frac{(k+1)y}{x} \right) \pi k^2 \lambda x^k > \pi k^2 \lambda x^k, \end{aligned}$$

Поэтому, если $\rho \in D_2$, то пользуясь третьей оценкой (6), найдем

$$|I(\rho, \lambda)| \ll \frac{x^\beta}{\sqrt{2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma}} \leq \frac{x^\beta}{\sqrt{T_2 - H_1}} \leq \frac{x^\beta}{\sqrt{\pi k^2 \lambda x^k}}.$$

Отсюда, затем из представления множества D_2 в виде (16), получим

$$W_2(\lambda, \chi) = \sum_{\rho \in D_2} |I(\rho, \lambda)| \ll \sum_{T_2 - H_1 \leq 2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma \leq T_2} \frac{x^\beta}{\sqrt{\pi k^2 \lambda x^k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k^2 \lambda x^k}} \sum_{T_1 - H_1 \leq -\gamma \leq T_1} x^\beta. \quad (18)$$

Пользуясь неравенством (17), оценим сверху H_1 — длину множества D_2 и снизу её нижнюю границу $T_1 - H_1$:

$$\begin{aligned} H_1 &= 2\pi k\lambda(x^k - (x-y)^k) + 4\pi k^2\lambda x^{k-1}y \leq 6\pi k^2\lambda x^{k-1}y, \\ T_1 - H_1 &= 2\pi k\lambda(x-y)^k - 2\pi k^2\lambda x^{k-1}y \geq 2\pi k\lambda x^k \left(1 - \frac{2ky}{x} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из $T_1 = 2\pi k\lambda x^k \left(1 + \frac{ky}{x} \right)$ следует, что в (18) границы суммы по γ , то есть $T_1 - H_1$ и T_1 являются величинами порядка λx^k , а её длина H_1 является величиной порядка $\lambda x^{k-1}y$. Разобьём интервал суммирования $T_1 - H_1 \leq \gamma \leq T_1$ на не более $6\pi k^2$ интервалов вида

$$\mathfrak{a}\lambda x^k - \lambda x^{k-1}y < \gamma \leq \mathfrak{a}\lambda x^k,$$

где постоянная $\mathfrak{a}$ принимает значение из интервала $2\pi k \left(1 - \frac{2ky}{x} \right) < \mathfrak{a} \leq 2\pi k \left(1 + \frac{ky}{x} \right)$, и правую часть (18) представим в виде

$$W_2(\lambda, \chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^k}} \sum_{\mathfrak{a}\lambda x^k - \lambda x^{k-1}y < \gamma \leq \mathfrak{a}\lambda x^k} x^\beta.$$

Для удобства не ограничивая общности будем считать, что $\mathfrak{a} = 1$. Подставляя эту оценку, оценки $W_1(\lambda, \chi)$ и $W_3(\lambda, \chi)$ в (15) и имея в виду, что $\lambda x^k < T_0$, а затем и $\lambda > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$, имеем

$$W(\lambda, \chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda q x^k}} \left(1 + \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{\lambda x^{k-2} y}} \right) \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \lambda x^{k-1} y < \gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{\lambda q x^k}} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \lambda x^{k-1} y < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Подставляя эту оценку в (7), получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^k}} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{T - \lambda x^{k-1} y < \gamma \leq T} x^\beta = \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^k}} \max_{|T| \leq T_0} V_q(T, \lambda x^{k-1} y),$$

где сумма $V_q(T, U)$ определена в (10), и в формуле (11) полагая $U = \lambda x^{k-1} y$, найдем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{\mathcal{L}^3}{\sqrt{\lambda q x^k}} \max_{|T| \leq T_0} \max_{0.5 \leq u \leq 1 - \delta} x^u \sum_{\chi \bmod q} \left(N(u, T, \chi) - N(u, T - \lambda x^{k-1} y, \chi) \right), \quad (19)$$

где $\delta = \delta(q, T_0)$. Далее будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k} \leq y \leq x \mathcal{L}^{-A-0,5b-10}. \quad (20)$$

Из определения параметра T_0 , условия $\lambda > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и (20), имеем

$$\begin{aligned} \frac{T}{(\lambda x^{k-1} y)^3} &\leq \frac{T_0}{(\lambda x^{k-1} y)^3} = \frac{\sqrt{q} \mathcal{L}^{A+3}}{\lambda^3 x^{3k-4} y^4} + \frac{\sqrt{q} \mathcal{L}^{A+3}}{\lambda^2 x^{2k-3} y^3} \leq \\ &\leq \frac{(2\pi k^2)^3 y^2 \mathcal{L}^{A+0,5b+3}}{x^2} + \frac{(2\pi k^2)^2 y \mathcal{L}^{A+0,5b+3}}{x} \ll \mathcal{L}^{-7}, \end{aligned}$$

следует, что в сумме по $\chi \bmod q$ в (19) выполняется условие $\lambda x^{k-1} y \geq T^{\frac{1}{3}}$, то есть можно применить лемму 7. Полагая в этой лемме

$$\varepsilon = \min \left(\frac{\eta_k}{8(k-1)}, \frac{2k-5+\eta_k}{2} \delta \right), \quad (21)$$

имеем

$$\begin{aligned} |W(\alpha; x, y)| &\ll \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2, \\ \mathcal{B}_1 &= \frac{\mathcal{L}^{12}}{\sqrt{\lambda q x^k}} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} x^u \left(q \lambda x^{k-1} y \right)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \\ \mathcal{B}_2 &= \frac{\mathcal{L}^3}{\sqrt{q \lambda x^k}} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta(q, T_0)} x^u \left(q \lambda x^{k-1} y \right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценка $\mathcal{B}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} \exp(f_1(u)), \quad f_1(u) = u \ln x + \left(\frac{1}{u-1,5} + \frac{3}{2} \right) \ln(q \lambda x^{k-1} y), \\ f_1'(u) &= \ln x - \frac{\ln(q \lambda x^{k-1} y)}{(u-1,5)^2}, \quad f_1''(u) = \frac{2 \ln(q \lambda x^{k-1} y)}{(u-1,5)^3} < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что $f_1'(0,5) > 0$. Действительно воспользовавшись условиями $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1} \mathcal{L}^{b_1}}$ и $y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}$, имеем

$$\begin{aligned} -f_1'(0,5) &= \ln(q \lambda x^{k-2} y) \leq \ln\left(\frac{x^{k-2} y}{\tau}\right) = \ln\left(\frac{x^{2k-3} \mathcal{L}^{b_1}}{y^{2k-2}}\right) \leq \ln\left(\frac{x^{2k-3} \mathcal{L}^{b_1}}{x^{2k-2-\frac{2k-2}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{(2k-2)c_k}}\right) = \\ &= \ln\left(x^{-\frac{1+\eta_k}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{b_1-(2k-2)c_k}\right) = -\frac{1+\eta_k}{2k-1+\eta_k} \mathcal{L} + (b_1 - (2k-2)c_k) \ln \mathcal{L} < 0. \end{aligned}$$

Далее для оценки $\mathcal{B}_1$ рассмотрим два случая: $q \lambda x^{k-1} y < x^{\frac{9}{16}}$ и $q \lambda x^{k-1} y \geq x^{\frac{9}{16}}$.

Случай $q \lambda x^{k-1} y < x^{\frac{9}{16}}$. Имеем

$$f_1'(u) \geq f_1'(0,75) = \ln x - \frac{16}{9} \ln(q \lambda x^{k-1} y) > \ln x - \frac{16}{9} \ln x^{\frac{9}{16}} = 0,$$

то есть $f_1'(u)$ положительна и $f_1(u)$ возрастающая функция в интервале $0,5 \leq u \leq 0,75$. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением (20), имеем

$$\mathcal{B}_1 = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp(f_1(0,75)) = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{6} \ln(q \lambda x^{k-1} y)\right) = (q \lambda x^{k-1} y)^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} <$$

$$< x^{\frac{11}{32}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} = y \left(\frac{x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}}{y} \right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{10k+5\eta_k-21}{32(2k-1+\eta_k)}} \mathcal{L}^{12-0,5c_k} \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Случай $q\lambda x^{k-1}y \geq x^{\frac{9}{16}}$. Ради удобства вводя обозначение

$$y = x^{1-\mu^2} \mathcal{L}^c, \quad (23)$$

будем искать наибольшее значение параметра μ и наименьшее значение параметра c , для которого выполняется оценка

$$\mathcal{B}_1 \ll y \mathcal{L}^{-A}. \quad (24)$$

Воспользовавшись условиями $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1} \mathcal{L}^{b_1}}$ и $y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}$, имеем

$$q\lambda x^{k-1}y \leq \frac{x^{k-1}y}{\tau} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2k-2} \mathcal{L}^{b_1} \leq \left(x^{\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{-c_k}\right)^{2k-2} \mathcal{L}^{b_1} = x^{1-\frac{1+\eta_k}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{b_1-(2k-2)c_k}.$$

Следовательно,

$$f'_1(0,5) = \ln x - \ln(q\lambda x^{k-1}y) > 0, \quad f'_1(0,75) = \ln x - \frac{16}{9} \ln(q\lambda x^{k-1}y) \leq 0,$$

и точка $u_0 = \frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda x^{k-1}y)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$, где $f'_1(u_0) = 0$ принадлежит интервалу интегрирования, также в этом интервале выполняется условие $f''(u) < 0$. Следовательно, в интервале $0,5 \leq u \leq 0,75$ график функции $f(u)$ является выпуклым вверх, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp(f_1(u_0)) = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(u_0 \ln x + \left(\frac{1}{u_0 - 1,5} + \frac{3}{2}\right) \ln(q\lambda x^{k-1}y)\right) = \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda x^{k-1}y)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ln x + \left(-\left(\frac{\ln x}{\ln(q\lambda x^{k-1}y)}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\right) \ln(q\lambda x^{k-1}y)\right) = \\ &= xy^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} \exp\left(\frac{3}{2} \ln(q\lambda x^{k-1}y) - 2 \left(\ln(q\lambda x^{k-1}y) \ln x\right)^{\frac{1}{2}}\right) = xy^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} \exp(g(q\lambda x^{k-1}y)), \quad (25) \end{aligned}$$

где $g(t) = \frac{3}{2} \ln t - 2(\ln t \ln x)^{\frac{1}{2}}$. Из условий

$$q\lambda x^{k-1}y \geq x^{\frac{9}{16}}, \quad \lambda \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1} \mathcal{L}^{b_1}},$$

и формулы (23) следует, что

$$x^{\frac{9}{16}} \leq q\lambda x^{k-1}y \leq \frac{x^{k-1}y}{\tau} = \frac{x^{2k-2} \mathcal{L}^{b_1}}{y^{2k-2}} = x^u \mathcal{L}^v, \quad u = (2k-2)\mu^2, \quad v = b_1 - (2k-2)c. \quad (26)$$

Поэтому имея в виду, что $t = q\lambda x^{k-1}y \geq x^{\frac{9}{16}}$, получим

$$g'(t) = \frac{3}{2t} - \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{t(\ln t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9 \ln t - 4 \ln x}{2t(\ln t)^{\frac{1}{2}}(3(\ln t)^{\frac{1}{2}} + 2(\ln x)^{\frac{1}{2}})} > 0,$$

то есть $g(t)$ в интервале своего изменения возрастающая функция, поэтому

$$g(q\lambda x^{k-1}y) \leq g(x^u \mathcal{L}^v).$$

Отсюда с учётом соотношения

$$y^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2} + \frac{u}{4k-4}} \mathcal{L}^{-\frac{b_1-v}{4k-4}},$$

правую часть (25) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &\leq xy^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} \exp(g(x^u \mathcal{L}^v)) = yx^{\frac{1}{2} + \frac{u}{4k-4}} \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1-v}{4k-4}} \exp(g(x^u \mathcal{L}^v)) = \\ &= yx^{\frac{1}{2} + \frac{u}{4k-4}} \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1-v}{4k-4}} \exp\left(\frac{3}{2} \ln(x^u \mathcal{L}^v) - 2(\ln(x^u \mathcal{L}^v) \mathcal{L})^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1-v}{4k-4} + \frac{3v}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2} + \frac{u}{4k-4} + \frac{3u}{2}} \exp\left(-2(u \mathcal{L}^2 + v \mathcal{L} \ln \mathcal{L})^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1}{4k-4} + \frac{v}{4k-4} + \frac{3v}{2}} x^{\frac{3u}{2} + \frac{u}{4k-4} + \frac{1}{2}} \exp\left(-2\sqrt{u} \mathcal{L} \left(1 + \frac{v \ln \mathcal{L}}{u \mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Воспользуемся при $|t| \leq 0,1$ формулой

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R(t), \quad R(t, \theta) = -\frac{(1-\theta)t^2}{8(1+\theta t)^{\frac{3}{2}}},$$

которая получается разложением функции $f(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Коши вида

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + \sum_{n=1}^m \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-(n-1))}{n!} t^n + R_m(t, \theta), \quad R_m(t, \theta) = \frac{f^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!} (1-\theta)^m t^{m+1}, \\ 0 < \theta < 1, \quad f'(t) &= \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

при $m = 1$. Остаточный член $R_1(t, \theta) = -\frac{t^2(1-\theta)}{8(1+\theta t)^{\frac{3}{2}}}$ будем рассматривать как функцию от θ . Имеем

$$\frac{\partial R_1(t, \theta)}{\partial \theta} = \frac{((3-\theta)t+2)t^2}{16(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} > 0.$$

Следовательно,

$$\min R(t, \theta) = R(t, 0) = -\frac{t^2}{8}, \quad (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R(t) \geq 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -2\sqrt{u} \mathcal{L} \left(1 + \frac{v \ln \mathcal{L}}{u \mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq -2\sqrt{u} \mathcal{L} \left(1 + \frac{v \ln \mathcal{L}}{2u \mathcal{L}} - \frac{v^2 \ln^2 \mathcal{L}}{8u^2 \mathcal{L}^2}\right) = \\ &= \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln \mathcal{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + \frac{v^2 \ln^2 \mathcal{L}}{4u^{\frac{3}{2}} \mathcal{L}} \leq \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln \mathcal{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + 1. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (27), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &\ll y \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1}{4k-4} + \frac{v}{4k-4} + \frac{3v}{2}} x^{\frac{3u}{2} + \frac{u}{4k-4} + \frac{1}{2}} \cdot x^{-2\sqrt{u}} \mathcal{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} = \\ &= yx^{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4k-4}\right)u - 2\sqrt{u} + \frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1}{4k-4} + \left(\frac{1}{4k-4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)v}. \end{aligned} \quad (28)$$

Воспользовавшись соотношением (26) показатели x и $\mathcal{L}$ в правой части последнего неравенства выражаем через μ и c . Обозначая эти показатели через $\mathfrak{x}(\mu)$ и $\omega(\mu, c)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}(\mu) &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4k-4}\right) (2k-2)\mu^2 - 2\sqrt{(2k-2)} \mu + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left((6k-5)\mu^2 - 4\sqrt{2k-2} \mu + 1\right), \\ \omega(\mu, c) &= 12 - \frac{b_1}{4k-4} + \left(\frac{1}{4k-4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{\mu\sqrt{2k-2}}\right) (b_1 - (2k-2)c) = \\ &= 12 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\mu\sqrt{2k-2}}\right) b_1 - \left(\frac{6k-5}{2} - \frac{\sqrt{2k-2}}{\mu}\right) c.\end{aligned}$$

Величина $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mu)$ является квадратичным многочленом относительно μ , с двумя положительными корнями, большим из них является число

$$\mu_k = \frac{2\sqrt{2k-2} + \sqrt{2k-3}}{6k-5} = \frac{1}{2\sqrt{2k-2} - \sqrt{2k-3}},$$

квадрат которого имеет вид

$$\mu_k^2 = \frac{1}{2k-1+\eta_k}, \quad \eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}. \quad (29)$$

Следовательно, наибольшее значение параметра μ , при котором $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mu)$ — показатель x в оценке (28) равен, нулю является число μ_k , а $\omega(\mu, c)$ — показатель $\mathcal{L}$ при $\mu = \mu_k$ принимает вид

$$\omega(\mu_k, c) = 12 + \left(\frac{\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}} - \frac{1}{2}\right) b_1 - \left(\sqrt{(2k-2)(2k-3)} - \frac{2k-3}{2}\right) c,$$

и при $c = c_k$, где

$$c_k = \frac{2A + 24 + \left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}} - 1\right) b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)} - (2k-3)},$$

имеет место равенство $\omega(\mu_k, c_k) = -A$, то есть оценка (28) превращается в оценку (24). Отсюда, из представлений параметра y в виде (23) и параметра μ_k^2 в виде (29) следует, что оценка (24) имеет место при

$$y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}, \quad \eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}.$$

Оценка $\mathcal{B}_2$. Имеем

$$\mathcal{B}_2 = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^3}{x^{\frac{1}{2}}} \left(q\lambda x^{k-1} y\right)^{-\frac{1}{2}} \max_{0.75 \leq u \leq 1-\delta} f_2(u), \quad f_2(u) = x^u \left(q\lambda x^{k-1} y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, \quad \delta = \delta(q, T_0).$$

В $\mathcal{B}_2$ функция $f_2(u)$ и её производная второго порядка положительны:

$$\begin{aligned}f_2'(u) &= f_2(u) \left(\ln x - \frac{2}{u^2} \ln(q\lambda x^{k-1} y)\right), \quad f_2''(u) = f_2(u) \left(\left(\ln x - \frac{2}{u^2} \ln(q\lambda x^{k-1} y)\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{u^3} \ln(q\lambda x^{k-1} y)\right) \geq \frac{4f_2(u)}{u^3} \ln(q\lambda x^{k-1} y) \geq \frac{4f_2(u)}{u^3} \ln\left(\frac{qx}{2\pi k^2 y}\right) > 0,\end{aligned}$$

то есть график функции $f_2(u)$ является выпуклым вниз, поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &\leq \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^2}{x^{\frac{1}{2}}} \left(q \lambda x^{k-1} y \right)^{-\frac{1}{2}} (f_2(0, 75) + f_2(1 - \delta)) = \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^2}{x^{\frac{1}{2}}} \left(x^{\frac{3}{4}} \left(q \lambda x^{k-1} y \right)^{\frac{1}{6} + \varepsilon} + x^{1-\delta} \left(q \lambda x^{k-1} y \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \right).\end{aligned}$$

Воспользовавшись условием рассматриваемого случая

$$\frac{1}{2\pi k^2 x^{k-2} y^2} < \lambda \leq \frac{1}{q\tau} = \frac{x^{k-1} \mathcal{L}^{b_1}}{qy^{2k-1}},$$

имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &\ll \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^2}{x^{\frac{1}{2}}} \left(x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{x^{2k-2} \mathcal{L}^{b_1}}{y^{2k-2}} \right)^{\frac{1}{6} + \varepsilon} + x^{1-\delta} \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \right) = y \mathcal{L}^2 \cdot \Delta(k, \varepsilon) \\ \Delta(k, \varepsilon) &= \left(\frac{x^{2k-2 + \frac{3}{2(1+6\varepsilon)}} \mathcal{L}^{b_1}}{y^{2k-2 + \frac{3}{1+6\varepsilon}}} \right)^{\frac{1}{6} + \varepsilon} + \left(\frac{x^{\frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} = \\ &= \left(\frac{x^{1 - \frac{3}{4k+2+24(k-1)\varepsilon}} \mathcal{L}^{\frac{b_1+6\varepsilon}{2k+1+12(k-1)\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{2k+1}{6} + 2(k-1)\varepsilon} + \left(\frac{x^{\frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} = \\ &= \left(\frac{x^{1 - \frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}}{y} x^{g(k, \varepsilon)} \mathcal{L}^{h(k, \varepsilon)} \right)^{\frac{2k+1}{6} + 2(k-1)\varepsilon} + \left(\frac{x^{1 - \frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}}{y} x^{f(\delta, \varepsilon)} \mathcal{L}^{-c_k} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}g(k, \varepsilon) &= -\frac{2k-5+3\eta_k-24(k-1)\varepsilon}{2(2k-1+\eta_k)(2k+1+12(k-1)\varepsilon)}, \\ h(k, \varepsilon) &= \frac{b_1+6\varepsilon}{2k+1+12(k-1)\varepsilon} - c_k, \\ f(\delta, \varepsilon) &= \frac{\delta(1-\delta)}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} + \frac{1}{2k-1+\eta_k}.\end{aligned}$$

Отсюда имея в виду, что $y \geq x^{1 - \frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k}$ и $c_k > 0$, получим

$$\Delta(k, \varepsilon) \ll \left(x^{g(k, \varepsilon)} \mathcal{L}^{h(k, \varepsilon)} \right)^{\frac{2k+1+12(k-1)\varepsilon}{6}} + x^{f(\delta, \varepsilon) \frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}. \quad (30)$$

Воспользовавшись явным значением параметра ε , то есть формулой (21), условиями $\eta_k > 0$, и $k \geq 3$, находим

$$\begin{aligned}g(k, \varepsilon) \frac{2k+1+12(k-1)\varepsilon}{6} &= -\frac{2k-5}{12(2k-1+\eta_k)} + \left(\varepsilon - \frac{\eta_k}{8(k-1)} \right) \frac{2k-2}{2k-1+\eta_k} \leq \\ &\leq -\frac{2k-5}{12(2k-1+\eta_k)} < -\frac{2k-5}{12(2k-1)} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6k-3} \leq -\frac{1}{60}, \\ f(\delta, \varepsilon) \frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} &= -\delta + \frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{(1-\delta)(2k-1+\eta_k)} \leq -\delta + \frac{2\delta+\varepsilon}{\frac{5}{6}(2k-1+\eta_k)} =\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{5}\delta + \frac{6}{5(2k-1+\eta_k)} \left(\varepsilon - \frac{2k-5+\eta_k}{2}\delta \right) \leq -\frac{2}{5}\delta.$$

С помощью этих двух неравенств и соотношения

$$h(k, \varepsilon) \left(\frac{2k+1}{6} + 2(k-1)\varepsilon \right) = \frac{b_1 - (2k+1)c_k + (6-12(k-1)c_k)\varepsilon}{6}$$

оценку (30) представим в виде

$$\Delta(k, \varepsilon) \ll x^{-\frac{1}{60}} \mathcal{L}^{\frac{b_1 - (2k+1)c_k + (6-12(k-1)c_k)\varepsilon}{6}} + x^{-0,4\delta} \ll \mathcal{L}^{-A-2} + \exp(-0,4\delta\mathcal{L}).$$

Пользуясь условиями

$$\lambda \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}\mathcal{L}^{b_1}}, \quad y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{c_k},$$

имеем

$$T_0 \leq \left(\frac{x\sqrt{q}}{y} + \frac{x^{2k-1}\mathcal{L}^{b_1}}{y^{2k-1}} \right) \mathcal{L}^{A+3} \ll \frac{x^{2k-1}}{y^{2k-1}} \mathcal{L}^{A+b_1+3} \leq x^{\frac{2k-1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}^{A+b_1+3-(2k-1)c_k} < 0,1x,$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$:

$$\delta(q, T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q, (\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3))^{\frac{3}{4}}\right)} \geq \frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathcal{L}, (\mathcal{L}\ln\mathcal{L})^{\frac{3}{4}}\right)} \geq c_1\mathcal{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathcal{B}_2 \ll y\mathcal{L}^2 \cdot \Delta(k, \varepsilon) \ll y\mathcal{L}^2 (\mathcal{L}^{-A-2} + \exp(-0,4c_1\mathcal{L}^{0,24})) \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку для $\mathcal{B}_1$ в (22), получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y\mathcal{L}^{-A}. \quad (31)$$

Воспользовавшись оценкой (1), леммой 1 об оценке интеграла по величине первой производной, условиями $\lambda > (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и (20), имеем

$$\left| \frac{\tau(\chi_0, a, k)}{\varphi(q)} \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du \right| \ll \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\lambda x^{k-1}} \ll \frac{y^2 \mathcal{L}}{\sqrt{q}x} \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку, также оценки (31) и (4) в (3), получим второе утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М.: изд-во АН СССР. 1952.
2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.
3. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math.Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.
4. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммой трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. Сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.

5. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.
6. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3. P. 135 – 170.
7. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals // I. Mh Math, 1999, 127: 27 – 41. doi.org/10.1007/s006050050020
8. Liu J, Zhan T. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct., 2000. V. 16, No 4. P. 669–690.
9. Liu J., Lu G., Zhan T. Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. 2006. V. 49, No 5. P. 611 – 619. DOI:10.1007/s11425-006-0611-x
10. Hua L. K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. 1938. V. 9, No 1. P. 68 – 80.
11. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals II // In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam. 1996. Birkhauser. P. 571 – 606.
12. Jutila M. Mean value estimates for exponential sums with applications to L -functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93-114.
13. Kumchev A. V. On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.
14. Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9. Is. 5. P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.
15. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2016. Т. 59. № 7-8. С. 273 – 277.
16. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды МИАН. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.
17. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 11. С. 853 – 860.
18. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.
19. Рахмонов З. Х., Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 4(157). С. 7 – 23.
20. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З, Замонов Б. М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 217 – 231.
21. Rane, V. V., On the mean square value of Dirichlet L -series // J. London Math. Soc., (2) 21 (1980), 203-215.

22. Zhan T. On the Mean Square of Dirichlet L -Functions // *Acta Mathematica Sinica. New Series.* 1992. Vol. 8, No 2. pp. 204-224.
23. Рахмонов З. Х., Собиров А. А., Фозилова П. М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020. Т. 63. № 5-6. С. 279-288.
24. Рахмонов З. Х., Собиров А. А., Фозилова П. М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020. Т. 63. № 7-8. С.
25. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — Москва. Наука, 1987.
26. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел — М.: Наука, 1981.
27. Прахар К. Распределение простых чисел — М.: Мир, 1967.
28. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 2-ое изд.
29. Виноградов И. М. Основы теории чисел — М.: Наука, 1981. 9-ое изд.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow.
2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, "The method of trigonometric sums in number theory", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.
3. Haselgrove C. B., 1951, "Some theorems in the analitic theory of number", *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273-277.
4. Statulevicius, V., 1955, "On the representation of odd numbers as the sum of three almost equal prime numbers *Univ. Mokslo Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser*, vol. 3, pp. 5-23.
5. Pan Chengdong, Pan Chengbiao, 1990, "On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)", *Chinese Ann. of Math.*, vol. 2. pp. 138-147.
6. Zhan, T., 1991, "On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes", *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3. pp. 135 – 170.
7. Liu, J., & Zhan, T., 1999, "Estimation of exponential sums over primes in short intervals Γ ", *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 127, Is. 1, pp. 27-41.
8. Liu, J., & Zhan, T., 2000, "Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals", *Acta Mathematica Sinica. English Series*, vol. 16, Is. 4. pp. 669-690.
9. Liu J., & Lu, G., Zhan, T., 2006, "Exponential sums over primes in short intervals", *Science in China: Series A Mathematics*, vol. 49, Is. 5, pp. 611-619. doi:10.1007/s11425-006-0611-x
10. Hua, L. K., 1938, "Some results in the additive prime number theory", *Quart. J. Math.*, vol. 9, Is. 1, pp. 68-80.

11. Liu J., & Zhan T., 1996, "Estimation of exponential sums over primes in short intervals II", *In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam*, Birkhauser, pp. 571 – 606.
12. Jutila, M., 1991, "Mean value estimates for exponential sums with applications to L -functions", *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93-114.
13. Kumchev, A. V., 2012, "On Weyl sums over primes in short intervals", *"Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*, vol. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116–131.
14. Yao, Y., 2014, "Sums of nine almost equal prime cubes", *Frontiers of Mathematics in China*, vol. 9, Is. 5. pp. 1131-1140. doi:10.1007/s11464-014-0384-4.
15. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2016, "Estimation of short cubic exponential sums with prime numbers in minor arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 59, no 7-8, pp. 273-277, (in Russian).
16. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233. doi.org/10.1134/S0081543817010175
17. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2013, "The sum of short double trigonometric sums", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 11, pp. 853-860, (in Russian).
18. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2014, "Sum of short exponential sums over prime numbers", *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.
19. Rakhmonov, Z. Kh., & Zamonov, B. M., 2014, "Short cubic double exponential sums, with a long continuous summation", *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 7-23, (in Russian).
20. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Zamonov, B.M., 2016, "Estimates of short cubic double exponential sums with a long continuous summation", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, Is. 1, pp. 217–231.
21. Rane, V. V., 1980, "On the mean square value of Dirichlet L -series", *J. London Math. Soc.*, vol. s2-21, Is. 2, pp. 203-215, doi-org.eres.qnl.qa/10.1112/jlms/s2-21.2.203.
22. Zhan T., 1992, "On the Mean Square of Dirichlet L -Functions", *Acta Mathematica Sinica. New Series*, vol. 8, No 2, pp. 204-224.
23. Rakhmonov, Z. Kh., & Sobirov A. A., Fozilova P. M., 2020, "Behavior of short cubic exponential sums with primes in a small neighborhood of the center of major arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 63, no 5-6, pp. 279-288, (in Russian).
24. Rakhmonov, Z. Kh., & Sobirov A. A., Fozilova P. M., 2020, "Estimate of short cubic exponential sums with primes in major arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 63, no 7-8, pp.405-415, (in Russian).
25. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.
26. Davenport H., 1967, *Multiplicative Number Theory*, Markham Publishing Company, Chigago.

- 27. Prachar K., 1957, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag.
- 28. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.
- 29. Vinogradov I. M., 2003 *Elements of Number Theory*, Mineola, NY: Dover Publications, ISBN 0-486-49530-2.

Получено 17.08.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.