

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ
АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ
КЛАССАМИ ГРУПП ОБОБЩЕННЫХ
СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ
С НОРМАЛЬНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ
ПОДГРУППОЙ

Е. А. Туманова (г. Иваново)

Аннотация

Получено достаточное условие аппроксимируемости произвольным корневым классом групп $\mathcal{K}$ обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$ -групп с нормальными объединенными подгруппами.

Ключевые слова: корневые классы групп, аппроксимационные свойства, обобщенные свободные произведения.

CERTAIN CONDITIONS
OF THE ROOT-CLASS
RESIDUALITY OF GENERALIZED FREE
PRODUCTS WITH A NORMAL
AMALGAMATED SUBGROUP

E. A. Tumanova (Ivanovo)

Abstract

Let $\mathcal{K}$ be an arbitrary root class of groups. We prove a sufficient condition of the $\mathcal{K}$ -residuality of the generalized free product of two $\mathcal{K}$ -groups with a normal amalgamated subgroup.

Keywords: root classes of groups, residual properties, generalized free products.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ -аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента x относительно φ отличен от единицы.

Если в качестве $\mathcal{K}$ взять класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$ -аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с аппроксимируемостью всеми конечными группами изучаются также свойства аппроксимируемости конечными p -группами, где p — простое число, конечными π -группами, где π — непустое множество простых чисел, разрешимыми группами, нильпотентными группами.

Напомним далее, что содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым [1], если выполняются следующие три условия.

1. Если группа X принадлежит классу $\mathcal{K}$ и Y — подгруппа группы X , то группа Y также принадлежит классу $\mathcal{K}$.
2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.
3. Если $1 \leq Z \leq Y \leq X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Примерами корневых классов могут служить упоминавшиеся выше классы всех конечных π -групп и всех разрешимых групп, а также класс разрешимых групп без кручения. Известно и много других корневых классов групп. Вместе с тем, класс нильпотентных групп не является корневым, так как он не замкнут относительно взятия расширений и, следовательно, не удовлетворяет условию 3 из определения корневого класса.

В данной статье рассматриваются условия аппроксимируемости произвольным корневым классом групп обобщенного свободного произведения

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

двух групп A и B с нормальными подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi: H \rightarrow K$ (введенные обозначения предполагаются фиксированными до конца статьи, в формулировках выделенных утверждений подразумеваются выполненными также предположения о нормальности объединяемых подгрупп).

Г. Баумслаг [2] доказал, что свободное произведение двух конечных групп с произвольными (необязательно нормальными) объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на аппроксимируемость конечными p -группами. Критерий аппроксимируемости данным классом обобщенного свободного произведения двух конечных p -групп был получен Хигманом [3].

При дополнительном предположении о нормальности объединенных подгрупп H и K в соответствующих свободных множителях подгруппа H являет-

ся нормальной в обобщенном свободном произведении G , и потому ограничение на подгруппу H любого внутреннего автоморфизма группы G оказывается автоморфизмом группы H . Множество $\text{Aut}_G(H)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\text{Aut } H$ всех автоморфизмов группы H . В этом случае следствием критерия Хигмана служит

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если A и B являются конечными p -группами, то обобщенное свободное произведение G аппроксимируется конечными p -группами тогда и только тогда, когда $\text{Aut}_G(H)$ — конечная p -группа [3].*

Ранее автором было показано, что аналогичное утверждение справедливо в более общей ситуации. А именно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Если A и B являются конечными π -группами, то обобщенное свободное произведение G аппроксимируется конечными π -группами тогда и только тогда, когда $\text{Aut}_G(H)$ — конечная π -группа [4, теорема 1].*

Сформулируем основные результаты данной работы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Если фактор-группы A/H , B/K и группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$, то обобщенное свободное произведение G является $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группой.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$, подгруппы H и K конечны. Обобщенное свободное произведение G является $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$, подгруппы H и K являются циклическими. Тогда группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$ и хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя. Тогда группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема.*

Из полученных в данной статье результатов следует, что утверждение предложения 2 можно распространить на свойство аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом конечных групп. Далее приведем примеры, показывающие, что в случае произвольного корневого класса $\mathcal{K}$ ни одно из условий $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ не является необходимым для $\mathcal{K}$ -аппроксимируемости группы G .

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a, b\}$, B, H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами c, b, c^3 соответственно, $\varphi: H \rightarrow K$ — изоморфизм, переводящий b в c^3 .

Тогда группы A, B принадлежат классу $\mathcal{K}$. Подгруппы H и K центральны в группах A и B соответственно, откуда следует, что группа $\text{Aut}_G(H)$ тривиальна и потому также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Фактор-группа A/H изоморфна $\mathbb{Z}$, значит, является $\mathcal{K}$ -группой, в то время как фактор-группа B/K изоморфна $\mathbb{Z}_3$ и, следовательно, не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Покажем, что при этом обобщенное свободное произведение G является $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группой.

В самом деле, поскольку задание группы G порождающими символами и определяющими соотношениями имеет вид

$$G = \langle a, b, c; ab = ba, b = c^3 \rangle = \langle a, c; ac^3 = c^3a \rangle,$$

легко видеть, что эта группа является расщепляемым расширением свободной группы ранга 3 при помощи бесконечной циклической группы. Известно [5, теорема 1], что любая свободная группа аппроксимируема произвольным корневым классом групп. Значит, G является расширением $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$ -группы и, следовательно, $\mathcal{K}$ -аппроксимируема (см. предложение 3 ниже).

ПРИМЕР 2. Пусть снова $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, A — свободная абелева группа ранга 2 с базисом $\{a, b\}$. Пусть также B — неабелево расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим c при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d , т. е.

$$B = \langle c, d; d^{-1}cd = c^{-1} \rangle;$$

H, K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами b и c^n , $n \geq 1$, соответственно; $\varphi: H \rightarrow K$ — изоморфизм подгрупп, отождествляющий элементы b и c^n .

Тогда A и B являются $\mathcal{K}$ -группами, но группа $\text{Aut}_G(H)$ не принадлежит классу $\mathcal{K}$, так как содержит элемент порядка 2 — автоморфизм группы H , совпадающий с ограничением на эту группу внутреннего автоморфизма группы G , производимого элементом d .

Фактор-группа A/H содержится в $\mathcal{K}$, так как она изоморфна $\mathbb{Z}$. Если $n = 1$, то фактор-группа B/K также изоморфна $\mathbb{Z}$ и, следовательно, является $\mathcal{K}$ -группой. Если же $n > 1$, то cK — отличный от 1 элемент конечного порядка фактор-группы B/K . Значит, B/K не является группой без кручения, а потому не содержится в классе $\mathcal{K}$.

Докажем $\mathcal{K}$ -аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G .

Обозначим через N нормальное замыкание элемента a в группе G . Так как подгруппа N нормальна в группе G и $N \cap H = 1$, то в силу теоремы о строении подгрупп обобщенного свободного произведения [6] группа N представима в виде свободного произведения некоторой свободной группы и семейства подгрупп, изоморфных $N \cap A$ или $N \cap B$.

Как уже было сказано выше, любая свободная группа аппроксимируема произвольным корневым классом групп. Отсюда и из того, что группы A и B принадлежат классу $\mathcal{K}$, следует, что N $\mathcal{K}$ -аппроксимируема как свободное произведение $\mathcal{K}$ -аппроксимируемых групп [1, теорема 4.1], [5, теорема 2]. Фактор-группа G/N изоморфна группе B и потому принадлежит классу $\mathcal{K}$. Значит, G является расширением $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группы N при помощи $\mathcal{K}$ -группы G/N и, следовательно, $\mathcal{K}$ -аппроксимируема в силу уже упоминавшегося предложения 3.

ПРИМЕР 3. Вначале проведем несложное общее построение.

Пусть A, B, C — некоторые изоморфные группы, $\varepsilon: A \rightarrow C$ и $\delta: B \rightarrow C$ — изоморфизмы, $L \leq C$, $H = L\varepsilon^{-1}$, $K = L\delta^{-1}$ и $\varphi = (\varepsilon \circ \delta^{-1})|_H$ — изоморфизм подгрупп H и K .

Отображения ε и δ , очевидно, согласованы с изоморфизмом φ , и поэтому их можно продолжить до гомоморфизма ψ группы G на группу C . Положим $N = \ker \psi$. Так как ε и δ инъективны, то $N \cap A = N \cap B = 1$. Отсюда в силу теоремы Х. Неймана следует, что N — свободная группа.

Если, кроме того, $\mathcal{K}$ — некоторый корневой класс групп и $C \in \mathcal{K}$, то группа G оказывается расширением $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группы N при помощи $\mathcal{K}$ -группы C и, следовательно, $\mathcal{K}$ -аппроксимируема.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — класс всех разрешимых групп без кручения, C — некоторое расщепляемое расширение бесконечной циклической группы с порождающим s при помощи бесконечной циклической группы с порождающим d (т. е. либо свободная абелева группа ранга 2, либо метабелева группа из примера 2), L — подгруппа группы C , порожденная элементом s^3 .

Тогда группы A и B принадлежат классу $\mathcal{K}$. При этом $s\varepsilon^{-1}H$ и $s\delta^{-1}K$ — отличные от 1 элементы конечного порядка фактор-групп A/H и B/K соответственно. Значит, A/H и B/K не содержатся в классе $\mathcal{K}$.

Если группа C абелева, то $\text{Aut}_G(H) = 1$ и, следовательно, $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$. Если же группа C не является абелевой, то, как и в примере 2, $\text{Aut}_G(H) \notin \mathcal{K}$.

Прежде, чем доказать сформулированные теорему и следствия, приведем необходимые нам вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Тогда произвольное расширение $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$ -группы является $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группой [1, лемма 1.5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть класс групп $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, X — произвольная группа, Y — нормальная подгруппа группы X . Если существует сюръективный гомоморфизм γ группы X в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на Y , то группа $\text{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. В частности, если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений, группа X $\mathcal{K}$ -аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то группа $\text{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{K}^*(X)$ множество всех нормальных подгрупп группы X , фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$. Пусть гомоморфизм с требуемыми свойствами существует и N — ядро этого гомоморфизма. Тогда $N \in \mathcal{K}^*(X)$ и $Y \cap N = 1$. Значит, подгруппы Y и N поэлементно перестановочны. Следовательно, N содержится в централизаторе $C_X(Y)$ подгруппы Y группы X . Отсюда и из того, что группа $\text{Aut}_X(Y)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$, получаем, что

$$\text{Aut}_X(Y) \cong X/C_X(Y) \cong (X/N)/(C_X(Y)/N) \in \mathcal{K},$$

так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации.

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений, то в силу теоремы Ремака пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства. Поэтому, пользуясь $\mathcal{K}$ -аппроксимируемостью группы X и конечностью подгруппы Y , можем найти подгруппу $N \in \mathcal{K}^*(X)$ такую, что $Y \cap N = 1$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y , $\rho: Y \rightarrow \text{Aut } Z$ — сопровождающий гомоморфизм. Если группы Z и Y $\mathcal{K}$ -аппроксимируемы, а группа $Y\rho$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то расщепляемое расширение X является $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположение о том, что группа X представляет собой расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y , означает, напомним, что Y — подгруппа группы X , Z — нормальная подгруппа группы X , $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Отображение ρ группы Y в группу автоморфизмов группы Z , сопоставляющее элементу $y \in Y$ ограничение на подгруппу Z внутреннего автоморфизма группы X , производимого элементом y , является гомоморфным и называется сопровождающим гомоморфизмом этого расщепляемого расширения.

Обозначим через C ядро гомоморфизма ρ . Так как подгруппа C нормальна в группе Y и подгруппа Z нормальна в группе X , то подгруппа CZ нормальна в X и

$$X/CZ = YZ/CZ = YCZ/CZ \cong Y/(Y \cap CZ) = Y/C \cong Y\rho.$$

Отсюда и из того, что группа $Y\rho$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, получаем, что $X/CZ \in \mathcal{K}$.

Очевидно, что подгруппа C поэлементно перестановочна с Z . Поэтому подгруппа CZ является прямым произведением $\mathcal{K}$ -аппроксимируемых групп C , Z и, следовательно, $\mathcal{K}$ -аппроксимируема. Значит, согласно предложению 3 группа X $\mathcal{K}$ -аппроксимируема как расширение $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$ -группы. Предложение доказано.

Теперь покажем справедливость утверждения теоремы.

Очевидно, что фактор-группа G/H изоморфна свободному произведению фактор-групп A/H и B/K . Рассмотрим гомоморфизм группы G/H на прямое произведение этих групп, действующий тождественно на подгруппах A/H и B/K . Хорошо известно, что ядро D данного гомоморфизма, называемое декартовой подгруппой группы G/H , является свободной группой.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G такая, что $D = N/H$. Тогда $G/N \cong A/H \times B/K$. Отсюда, из условий $A/H, B/K \in \mathcal{K}$ и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно прямых произведений, следует, что фактор-группа G/N принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Подгруппа N представляет собой расширение группы H с помощью свободной группы N/H . Как известно, такое расширение расщепляемо, то есть в N существует свободная подгруппа F , изоморфная N/H , такая, что N является расщепляемым расширением H при помощи F . Очевидно, что если ρ — сопровождающий гомоморфизм этого расширения, то $F\rho$ оказывается подгруппой группы $\text{Aut}_G(H)$.

Как уже отмечалось выше, каждая свободная группа $\mathcal{K}$ -аппроксимируема для любого корневого класса групп $\mathcal{K}$. Значит, группа F $\mathcal{K}$ -аппроксимируема. В силу замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп группа H принадлежит классу $\mathcal{K}$. Следовательно, она также $\mathcal{K}$ -аппроксимируема. Наконец, $F\rho$ содержится в классе $\mathcal{K}$ как подгруппа $\mathcal{K}$ -группы $\text{Aut}_G(H)$.

Следовательно, в силу предложения 5 расщепляемое расширение N является $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группой.

Таким образом, G — расширение $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группы N при помощи $\mathcal{K}$ -группы G/N . Следовательно, группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема в силу предложения 3. Теорема доказана.

Переходя к доказательству следствий, видим, что необходимость условия следствия 1 имеет место в силу предложения 4, а достаточность — в силу теоремы.

Докажем следствия 2 и 3. Для этого достаточно показать, что группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Тогда в силу теоремы группа G будет $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой.

Очевидно, что группа $\text{Aut}_G(H)$ порождается подгруппами $U = \text{Aut}_A(H)$ и $V = \varphi \text{Aut}_B(K) \varphi^{-1}$. Так как A и B — $\mathcal{K}$ -группы, то согласно предложению 4 группы $\text{Aut}_A(H)$ и $\text{Aut}_B(K)$ также принадлежат классу $\mathcal{K}$.

Если H — циклическая группа, то $\text{Aut } H$ — абелева группа. Известно, что подгруппа, порожденная двумя подгруппами в абелевой группе, является их

произведением. Поэтому $\text{Aut}_G(H) = UV$ и $\text{Aut}_G(H)/V \cong U/U \cap V$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации получаем, что $\text{Aut}_G(H)$ — расширение $\mathcal{K}$ -группы при помощи $\mathcal{K}$ -группы. Так как класс $\mathcal{K}$ корневой, то такое расширение является $\mathcal{K}$ -группой. Значит, группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя. Пусть для определенности подгруппа H центральна в группе A . Тогда группа $\text{Aut}_A(H)$ состоит только из тождественного отображения группы H , а потому является единичной. Следовательно, группа $\text{Aut}_G(H)$ совпадает со своей подгруппой $\varphi \text{Aut}_B(K) \varphi^{-1}$. Последняя принадлежит классу $\mathcal{K}$ ввиду изоморфности группе $\text{Aut}_B(K)$. Следствия доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29 — 62.
2. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193 — 209.
3. Higman G. Amalgams of p -groups // J. Algebra. 1963. Vol. 1. P. 301 — 305.
4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 150 — 152.
5. Азаров Д. Н., Тъеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6 — 10.
6. Karrass A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150. P. 227 — 255.

Ивановский государственный университет

Поступило 13.09.2013