ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 512.53 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-183-199

Частичные порядки и идемпотенты моноидов

В. Б. Поплавский

Поплавский Владислав Брониславович — доктор физико-математических наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).
e-mail: poplavskivb@mail.ru

Аннотация

Идемпотенты частично упорядоченного моноида играют разные роли в определении его свойств. В работе множество идемпотентов делится на три подмножества: несравнимых с единицей, не меньше и не больше единицы моноида. Идемпотенты первого подмножества названы первичными, а идемпотенты сравнимые с единицей названы вторичными. Исследуются свойства идемпотентов в терминах частичных порядков и эквивалентностей Грина Основное внимание в статье уделяется нахождению связей между различными классическими и неклассическими, стабильными и нестабильными частичными порядками и ролям, которые в этом играют идемпотенты. В частности, как результат, получен критерий стабильности частичного порядка Митча. Приводятся различные примеры упорядоченных моноидов в контексте построенной теории идемпотентов и частичных порядков.

Ключевые слова: идемпотенты, частично упорядоченный моноид, естественный порядок полугруппы, классы Грина.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. Б. Поплавский. Частичные порядки и идемпотенты моноидов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 183–199.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 512.53 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-183-199

Partial Orders and Idempotents of Monoids

V. B. Poplavski

Poplavski Vladislav Bronislavovich — doctor of physical and mathematical sciences, Saratov State University (Saratov).
e-mail: poplavskivb@mail.ru

Abstract

Idempotents of the monoid play different roles in the formation of its properties. A set of idempotents is divided into three parts: incomparable with a unit, less and equal to a unit, and more and equal to a unit. The idempotents of the first part are called primary and the idempotents comparable with a unit are called secondary. The properties of idempotents are investigated in terms of partial orders and Green's equivalences. In the article the main attention is given to finding connections among different classical and non-classical, stable and unstable partial orders and roles which the idempotents play in that. In particular, as a result, the criterion of stability of Mitsch's partial order is obtained. Different examples of ordered monoids are shown in the context of the constructed theory of idempotents and partial orders.

Keywords: idempotents, partial ordered monoid, natural order for semigroup, Green's classes.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. B. Poplavski, 2021, "Partial Orders and Idempotents of Monoids" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 183–199.

Введение

В настоящей статье рассматривается частично упорядоченный моноид $\mathbf{X}$, т. е. полугруппа с единицей 1, на которой задан стабильный относительно умножения частичный порядок $\leq$.

Хорошо известно, что идемпотенты полугруппы играют весьма важную роль в определении её свойств. Вместе с тем, эта роль у каждого идемпотента различна. Для частично упорядоченного моноида имеет смысл рассмотреть свойства идемпотентов, связав их с частичным порядком. В работе множество идемпотентов делится на три подмножества. Первое подмножество состоит из не сравнимых с единицей идемпотентов, названных далее первичными идемпотентами. Второе и третье подмножества состоят из идемпотентов, которые не превосходят или не меньше единицы моноида соответственно. Такие сравнимые с единицей идемпотенты мы называем вторичными. Очевидно, что такое деление множества идемпотентов зависит от частичного порядка $\leq$, заданного на моноиде $\mathbf{X}$.

В первых четырёх разделах этой работы изучаются свойства вторичных идемпотентов, порождённых элементами моноида. Приводятся примеры таких идемпотентов и их соответствующих свойств.

Важным инструментом при изучении свойств таких идемпотентов являются эквивалентности Грина. Так, например, теорема 3.3 даёт необходимый признак существования вторичных идемпотентов в терминах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентностей Грина. Четвёртый параграф полностью

посвящён вопросу расположения идемпотентов в $\mathcal{D}-$классах и такому важному свойству, как коммутативность идемпотентов.

Частичные порядки на полугруппе называются стабильными (или согласованными с умножением), если из неравенства $a \leq b$ для элементов $a, b \in \mathbf{X}$ следует $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для любого $c \in \mathbf{X}$. Порой идемпотенты и полугрупповая операция порождают частичные порядки на полугруппе. Такие порядки, если они стабильны, принято называть естественными. Первый такой естественный порядок был найден Вагнером [1] для инверсных полугрупп, перенося его с полугруппы взаимнооднозначных частичных преобразований множества, играющих важную роль в теории гладких многообразий. С этой же позиции он рассмотрел задачу нахождения представлений упорядоченной полугруппы частичными преобразованиями [2], для которых заданному в полугруппе отношению порядка соответствует отношение включения частичных преобразований. Для произвольной упорядоченной полугруппы такого представления может не существовать вовсе, как это показывает пример упорядоченной группы, если отношение порядка не сводится к тождественному. Поэтому в этой статье рассматриваются упорядоченные и не обязательно представимые частичными преобразованиями полугруппы. Обсуждая частичные порядки, порождённые полугрупповой операцией, Митч писал [3], что только спустя 30 лет естественный порядок Вагнера был распространён Хартвигом [4] и Намбурипадом [5] на класс регулярных полугрупп. Однако, даже для регулярных полугрупп такие порядки не всегда являются стабильными. Последовала серия работ, посвященных различным способам задания таких частичных порядков, эквивалентность которых была показана Митчем [3], что привело к появлению более универсального способа задания частичного порядка на полугруппе, вошедшего в литературу как "порядок Митча". Позже появились статьи, посвященные определению классов регулярных полугрупп со стабильным порядком Митча, стремлению распространить его на другие типы полугрупп. Несмотря на то, что исследования в этом направлении продолжаются, некий итог определённому этапу исследований в этом направлении подвела ещё одна статья Митча [6], посвященная 80-летию Стефана Шварца.

Известны [5] достаточно жёсткие условия стабильности естественного частичного порядка Митча: он стабилен на регулярной полугруппе тогда и только тогда, когда эта полугруппа локально инверсная (т.е. для каждого идемпотента e подмоноид $e\mathbf{X}e$ является инверсной полугруппой). В частности, для любой коммутативной полугруппы порядок Митча стабилен. В этой статье априори предполагается существование на моноиде $\mathbf{X}$ стабильного частичного порядка, возможно, отличного от естественного. Тогда вторичные идемпотенты, индуцированные этим порядком, позволяют построить так называемые вторичные порядки и провести сравнение всех этих порядков с порядком Митча (теорема 5.8), не связывая их с регулярностью элементов моноида. На сравнении частичных порядков получен критерий стабильности частичного порядка Митча (теорема 5.8).

В 6 параграфе проводится иллюстрация развитой здесь теории вторичных идемпотентов для случая, когда моноид $\mathbf{X}$ является инверсной полугруппой. Показано совпадение стабильных частичных порядков Вагнера, Митча и порождённых ими вторичных порядков (теорема 6.4).

1. Вторичные идемпотенты моноида

Определение 1.1. *Пусть $\langle \mathbf{X}, \leq \rangle$ – частично упорядоченный моноид $\mathbf{X}$ со стабильным относительно полугрупповой операции частичным порядком $\leq$. Для некоторого $a \in \mathbf{X}$, если существует наибольшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a^R. Если существует наименьшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a_R. Соответственно, если для уравнения $ax = a$ существует наибольшее решение, то обозначим его через a^L, и если среди решений уравнения $ax = a$ существует наименьшее, то обозначим его*

через a_L.

Теорема 1.1. *Если элементы* a^R, a_R, a^L, a_L *существуют, то они являются идемпотентами моноида* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Из определения 1.1 следует, что $1 \leq a^R$. Умножая последнее неравенство на a^R, получаем $a^R \leq a^R a^R$.

С другой стороны, $(a^R a^R)a = a^R(a^R a) = a$ и, следовательно, из определения 1 следует, что $(a^R a^R) \leq a^R$. Получаем равенство $a^R = a^R a^R$.

Аналогичным образом можно доказать равенство $a^L = a^L a^L$, а учитывая, что $a_R \leq 1$ и $a_L \leq 1$, можно показать и идемпотентность элементов a_R и a_L. □

Теорема 1.2. *Если* a^R, a_R, a^L, a_L *существуют, то выполняются следующие равенства:*

$$(a^R)^R = (a^R)^L = a^R,$$

$$(a^L)^L = (a^L)^R = a^L,$$

$$(a_L)_L = (a_L)_R = a_L,$$

$$(a_R)_R = (a_R)_L = a_R.$$

Доказательство. Из неравенства $1 \leq a^R$ получаем

$$(a^R)^R \leq (a^R)^R a^R = a^R, \quad (a^R)^L \leq a^R (a^R)^L = a^R.$$

Это позволяет записать $(a^R)^R \leq a^R$, $(a^R)^L \leq a^R$.

С другой стороны, сравнивая равенства $a^R a^R = a^R$, $(a^R)^R a^R = a^R$, $a^R (a^R)^L = a^R$ и учитывая максимальность элементов $(a^R)^R$, $(a^R)^L$, имеем $a^R \leq (a^R)^R$, $a^R \leq (a^R)^L$, что доказывает равенство $(a^R)^R = (a^R)^L = a^R$.

Остальные равенства доказываются аналогично.□

Теорема 1.3. *Пусть* e *– идемпотент моноида* $\mathbf{X}$. *Тогда следующие условия равносильны:*

$$1 \leq e \Longleftrightarrow e = e^R \Longleftrightarrow e = e^L;$$

$$e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L.$$

Доказательство. Пусть $1 \leq e = ee$. Тогда существует решение уравнения $xe = e$. Из неравенства $1 \leq e = xe$ получаем $x \leq xe = xxe = e$, т.е. e является наибольшим решением уравнения $e = xe$. Следовательно, e^R существует и $e = e^R$. Таким же способом можно показать, что $e = e^L$.

Если выполняется равенство $e = e^R$, то из неравенства $1 \leq e^R$ получаем $1 \leq e$.

Аналогично доказывается эквивалентность

$$e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L.$$

□

Определение 1.2. *Идемпотент* e *назовем вторичным идемпотентом, порожденным заданным на моноиде порядком* $\leq$, *если он сравним с единицей моноида* $\mathbf{X}$, *т. е.* $e \leq 1$ *или* $1 \leq e$.

Идемпотент назовем первичным в противном случае, т. е. если он не сравним с единицей заданным на моноиде частичным порядком $\leq$.

Таким образом, если идемпотент e – вторичный, то выполняется либо $e = e^R = e^L$, либо $e = e_R = e_L$. В случае $e = e^R = e^L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом максимального типа*, в случае $e = e_R = e_L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом минимального типа.*

Из теорем 1.1 и 1.2 получаем, что, если существуют элементы a^R, a_R, a^L, a_L для некоторого $a \in \mathbf{X}$, то они являются вторичными идемпотентами. Будем называть их соответственно *R-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа или L-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа, порожденными элементом a, относительно порядка $\leq$* . Будем в этом случае также говорить, что элемент *a обладает вторичным идемпотентом (или порождает вторичный идемпотент) соответствующего типа.*

Множества всех идемпотентов, первичных идемпотентов, вторичных идемпотентов максимального и минимального типов будем обозначать символами E, E_0, $E^{\uparrow}$ и $E_{\downarrow}$ соответственно. Заметим, что $E_0 \cap E^{\uparrow} = \emptyset$, $E_0 \cap E_{\downarrow} = \emptyset$, $E^{\uparrow} \cap E_{\downarrow} = \{1\}$, что следует из теоремы 1.3, и $E = E_0 \cup E^{\uparrow} \cup E_{\downarrow}$.

Теорема 1.4. *Пусть e – первичный идемпотент. Тогда e не порождает ни одного вторичного идемпотента или, если по крайней мере один из вторичных идемпотентов e^R, e^L, e_R, e_L существует, выполняются строгие неравенства:*

$$e \lneqq e^R, \quad e \lneqq e^L,$$

$$e \gneqq e_R, \quad e \gneqq e_L.$$

Доказательство. Если один из вторичных идемпотентов e^R существует, то $e \lneqq e^R$, так как из $ee = e^R e = e$ следует $e \leq e^R$ по определению идемпотента e^R. Кроме того, $e \neq e^R$, так как в противном случае по теореме 1.3 идемпотент e является вторичным.

Остальные пункты предложения доказываются аналогичным способом. □

Справедливость следующих утверждений очевидна в силу стабильности частичного порядка $\leq$ и определения 1.1.

Теорема 1.5. *Для любых элементов $a, b \in \mathbf{X}$ верны следующие импликации, если все указанные в них вторичные идемпотенты существуют:*

$$1 \leq a \leq b^R \to b^R = ab^R = b^R a \to ab = b \to a \leq b^R;$$

$$1 \leq a \leq b^L \to b^L = b^L a = ab^L \to ba = b \to a \leq b^L;$$

$$1 \geq a \geq b_R \to b_R = ab_R = b_R a \to ab = b \to a \geq b_R;$$

$$1 \geq a \geq b_L \to b_L = ab_L = b_L a \to ab = b \to a \geq b_L.$$

В частности, выполняются эквивалентности:

$$1 \leq a \leq a^R \leftrightarrow a = a^R; \quad 1 \leq a \leq a^L \leftrightarrow a = a^L;$$

$$a_R \leq a \leq 1 \leftrightarrow a = a_R; \quad a_L \leq a \leq 1 \leftrightarrow a = a_L.$$

Теорема 1.6. *Для любых $a, b \in \mathbf{X}$, для которых приведённые ниже вторичные идемпотенты существуют относительно стабильного порядка $\leq$, справедливы неравенства:*

$$a^R \leq (ab)^R; \quad b^L \leq (ab)^L;$$

$$(ab)_R \leq a_R; \quad (ab)_L \leq b_L.$$

2. Примеры моноидов и их идемпотентов

Пусть $(\mathbf{X}, \wedge, 1)$ – нижняя полурешетка с наибольшим элементом 1 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. Очевидно, что в этом случае все элементы моноида X являются вторичными идемпотентами минимального типа: $X = E_{\downarrow}$.

Аналогично, если $(\mathbf{X}, \vee, 0)$ – верхняя полурешетка с наименьшим элементом 0 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. В этом случае выполняется равенство $X = E^{\uparrow}$.

Приведем пример нетривиального строения множества идемпотентов. Пусть $B(M)$– множество всех бинарных отношений на множестве M ($|M| \geq 3$), которое определяется как множество всевозможных подмножеств декартова квадрата $M \times M$ с частичным порядком включения $\subseteq$. На множестве $B(M)$ определена стандартным образом структура моноида с операцией умножения бинарных отношений и единицей $\Delta = \{(x,x)|x \in M\}$. Заметим, что частичный порядок включения $\subseteq$ стабилен относительно умножения бинарных отношений. Для этого частично упорядоченного моноида $(B(M), \subseteq)$ вторичными идемпотентами минимального типа являются все бинарные отношения ρ, для которых выполняется $\rho = \rho^2 \subseteq \Delta$, например, $\rho = \{(x,x),(y,y)\}$ для любых $x, y \in M$. Очевидно также, что множество первичных идемпотентов E_0 непусто. Например,

$$\{(x,x),(x,y),(y,y),(y,x)\} \in E_0 \subset B(M).$$

Множество вторичных идемпотентов максимального типа $E^{\uparrow}$ содержит также элементы, отличные от Δ. Например, $\Delta \cup \{(x,y),(y,x)\} \in E^{\uparrow} \subset B(M)$.

Рассмотрим полугруппу квадратных матриц фиксированного порядка с элементами из произвольной булевой алгебры с операцией конъюнктного произведения (эта операция стабильна относительно булева порядка включения) и единичной матрицей в качестве единицы. Вторичными идемпотентами минимального типа являются матрицы у которых в некоторых местах диагонали стоят единицы, а на остальных местах – нули булевой алгебры. Вторичными идемпотентами максимального типа являются идемпотентные матрицы у которых на диагонали стоят единицы булевой алгебры.

Примеры построения вторичных идемпотентов максимального типа в частичных полугруппах матриц произвольных размеров с элементами из произвольной булевой алгебры, их свойства, применения, а также сравнения естественных порядков на полугруппах булевых матриц можно найти в [7], [8], [9].

3. Вторичные идемпотенты и классы Грина

Теорема 3.1. *Пусть вторичные идемпотенты a^R,b^R (или a_R,b_R), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, существуют. Если существует решение уравнения $ax = b$, то $a^R \leq b^R$ (соответственно $a_R \geq b_R$).*

Если существуют вторичные идемпотенты a^L,b^L (или a_L,b_L), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, то из разрешимости уравнения $xa = b$ следует $a^L \leq b^L$ (соответственно $a_L \geq b_L$).

Доказательство. Так как $a^R b = a^R(ax) = (a^R a)x = ax = b$, то $a^R b = b$. Тогда, если b^R существует, то $a^R \leq b^R$.

Таким же образом можно показать и остальные неравенства. □

Замечание 3.1. Теорему 3.1 можно переформулировать в контексте частичного порядка на множестве главных односторонних идеалов моноида $\mathbf{X}$ следующим образом:

$$a\mathbf{X} \subseteq b\mathbf{X} \to b^R \leq a^R;$$

$$a\mathbf{X} \subseteq b\mathbf{X} \to a_R \leq b_R;$$

$$\mathbf{X}a \subseteq \mathbf{X}b \to b^L \leq a^L;$$

$$\mathbf{X}a \subseteq \mathbf{X}b \to a_L \leq b_L.$$

Известно [10], [11], что отношения эквивалентностей Грина $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ на полугруппе $\mathbf{X}$ определяются формулами

$$a\mathbf{X} = b\mathbf{X} \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R},$$

$$\mathbf{X}a = \mathbf{X}b \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{L},$$

$$\mathbf{X}a\mathbf{X} = \mathbf{X}b\mathbf{X} \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{J},$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L},$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}.$$

Классы этих эквивалентностей элемента a далее обозначаются R_a, L_a, J_a, D_a, H_a соответственно.

Эквивалентность $\mathcal{D}$ разбивает моноид $\mathbf{X}$ на классы, каждый из которых в свою очередь разбивается отношениями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ так, что формируется "egg-box" строение каждого $\mathcal{D}-$класса.

Теорема, приведенная ниже, непосредственно следует из предыдущей теоремы 3.1 и определения $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентностей Грина.

Теорема 3.2. *Пусть вторичные идемпотенты a^R,b^R (соответственно, a_R, b_R), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, существуют. Тогда, если $(a,b) \in \mathcal{R}$, то $a^R = b^R$ (соответственно, $a_R = b_R$).*

Если существуют вторичные идемпотенты a^L,b^L (соответственно, a_L,b_L), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, то условие $(a,b) \in \mathcal{L}$ влечет равенство $a^L = b^L$ (соответственно, $a_L = b_L$).

Следующая теорема даёт необходимый признак существования вторичных идемпотентов в терминах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентностей Грина.

Теорема 3.3. *Если некоторый элемент полугруппы $\mathbf{X}$ обладает R-вторичным (или L-вторичным) идемпотентом некоторого типа, то и любой элемент, порождающий тот же самый главный правый (соответственно левый) идеал, обладает R- вторичным (L-вторичным) идемпотентом такого же типа.* Доказательство. Пусть $(a,b) \in \mathcal{R}$, т.е. элементы $a, b \in \mathbf{X}$, порождают один и тот же главный правый идеал. Тогда существуют такие элементы $x, y \in \mathbf{X}$, что $ax = b$ и $by = a$. Пусть также a^R является наибольшим решением уравнения $za = a$. Покажем, что множество решений уравнения $zb = b$ обладает наибольшим решением b^R, причем $b^R = a^R$. Это следует из того, что множества решений уравнений $zb = b$ и $za = a$ одинаковы. Действительно, если z – решение уравнения $zb = b$, то

$$a = by = (zb)y = z(by) = za.$$

Наоборот, если z – решение уравнения $a = za$, то

$$b = ax = zax = zb.$$

Поэтому, если a^R является наибольшим решением уравнения $za = a$, то уравнение $zb = b$ также имеет наибольшее решение: $b^R = a^R$.

Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы 3.3. □

4. Расположение идемпотентов в классах Грина

Из теорем 1.2 и 3.2 сразу следует

Теорема 4.1. *Два различных вторичных идемпотента одного (либо максимального, либо минимального) типа не могут порождать один и тот же односторонний идеал.*

Элемент частично упорядоченного моноида и соответствующий ему вторичный идемпотент могут порождать один и тот же $\mathcal{D}-$класс или различные $\mathcal{D}-$классы. Следующая теорема утверждает, что в случае периодических, в частности, конечных моноидов, если элемент

и соответствующий ему вторичный идемпотент порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс, то они порождают один и тот же односторонний идеал соответствующего правого или левого типа. Напомним, что для периодических моноидов эквивалентности $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ совпадают.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— частично упорядоченная периодическая полугруппа с единицей, и указанные ниже вторичные идемпотенты существуют. Тогда верны следующие импликации:*

$(a, a^R) \in \mathcal{D} \to (a, a^R) \in \mathcal{R}$, $(a, a^L) \in \mathcal{D} \to (a, a^L) \in \mathcal{L}$,

$(a, a_R) \in \mathcal{D} \to (a, a_R) \in \mathcal{R}$, $(a, a_L) \in \mathcal{D} \to (a, a_L) \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Предположим, что элемент $(a, a^R) \in \mathcal{D}$, однако a и a^R порождают различные $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$подклассы. Тогда для любого элемента $b \in R_a \cap L_{a^R}$ по теореме 3.2 получаем $b^R = a^R$. Так как $b \in L_{a^R}$, то существуют решения x,y системы уравнений

$$xb = a^R, \quad ya^R = b$$

и, следовательно, существуют решения системы уравнений

$$xb^n = a^R b^{n-1}, \quad ya^R b^{n-1} = b^n.$$

Из равенств $a^R b = b^R b = b$ получаем $xb^n = b^{n-1}$,$yb^{n-1} = b^n$ для любого натурального n. Следовательно, $b^n \in L_b$, и тогда $(b^n, a^R) \in \mathcal{L}$. Так как X является периодической полугруппой, то для некоторого $n = \tilde{n}$ степень $b^{\tilde{n}}$ является идемпотентом, причем $b^{\tilde{n}} \in L_{a^R}$, а множество $\{b, b^2, b^3, ...\}$ – конечной циклической полугруппой.

С другой стороны, из $b \in R_a \cap L_{a^R}$ следует $(a, b) \in \mathcal{R}$, и тогда $(b^{n-1}a, b^n) \in \mathcal{R}$ для любого натурального n. Получаем $b^{\tilde{n}} \in R_{b^{\tilde{n}-1}a}$.

Для дальнейших рассуждений понадобится теорема Миллера и Клиффорда [10], [11], [12]: для произвольных элементов s и t полугруппы включение $st \in R_s \cap L_t$ выполняется тогда и только тогда, когда $R_t \cap L_s$ содержит идемпотент.

Так как было показано, что $b^{\tilde{n}}$ – идемпотент и $b^{\tilde{n}} \in L_{a^R} \cap R_{b^{\tilde{n}-1}a}$, то $a^R(b^{\tilde{n}-1}a) \in R_{a^R} \cap L_{b^{\tilde{n}-1}a}$. Получили $a^R(b^{\tilde{n}-1}a) = b^{\tilde{n}-1}a \in R_{a^R}$, и, следовательно, $b^{\tilde{n}} \in R_{a^R}$. Таким образом, $(b^{\tilde{n}}, a^R) \in \mathcal{H}$. В силу единственности идемпотента, принадлежащего $\mathcal{H}-$классу, получаем $b^{\tilde{n}} = a^R$. Поэтому множество $\{b, b^2, b^3, ..., b^{\tilde{n}}\}$ является конечной циклической группой, которая является подгруппой максимальной группы $H_{a^R} = H_{b^{\tilde{n}}}$. В итоге получили $b \in H_{a^R} = R_{a^R} \cap L_{a^R}$, а так как $b \in R_a \cap L_{a^R}$, то это влечёт $(a, a^R) \in \mathcal{R}$.

Остальные импликации теоремы 4.2 доказываются аналогично. □

Как следствие теоремы 4.2. мы получаем, что если некоторый $\mathcal{R}$–подкласс (или $\mathcal{L}$-подкласс) частично упорядоченной периодической полугруппы с единицей содержит единственный идемпотент e, и если идемпотент e является первичным, а вторичный идемпотент e^R (или e^L) существует, то $D_e \neq D_{e^R}$ (соответственно $D_e \neq D_{e^L}$), то есть первичный и соответствующий ему вторичный идемпотенты порождают различные $\mathcal{D}$- классы. Аналогичное утверждение справедливо для вторичных идемпотентов минимального типа.

Лемма 4.3. *Пусть* e, f *и* g *– попарно различные идемпотенты. Допустим также, что* $(e, f) \in \mathcal{R}$ $(e, g) \in \mathcal{L}$. *Тогда любая пара из трёх идемпотентов* e, f, g *не коммутирует.*

Доказательство. Если два идемпотента порождают один и тот же односторонний идеал, то они не коммутируют. Это следует из того, что, порождая один и тот же односторонний идеал, идемпотенты становятся односторонними единицами для элементов этого идеала, которые, очевидно, не коммутируют. Таким образом, $ge \neq eg$, $ef \neq fe$.

Из того, что $(e, f) \in \mathcal{R}$ $(e, g) \in \mathcal{L}$, по теореме Миллера и Клиффорда следует $gf \in \mathcal{R}_\} \cap \mathcal{L}_\{$. Если предположить, что $gf = fg$, то произведение fg является идемпотентом. Тогда по той же теореме имеем $fg \in R_f \cap L_g$, то есть $fg = e$ в силу единственности идемпотента в таких пересечениях. Получаем $H_e = H_{fg} = R_f \cap L_g = H_{gf} = R_g \cap L_f$, что невозможно в силу неравенства идемпотентов e, f и g. □

Следующая теорема показывает, что некоммутативность первичных и порождённых ими вторичных идемпотентов зависит от их взаимного расположения в $\mathcal{D}$-классе.

Теорема 4.4. *Пусть X — частично упорядоченная периодическая полугруппа с единицей. Пусть e – первичный идемпотент и вторичные идемпотенты e_R, e_L, e^R, e^L существуют. Образуем из них тройки $\{e, e^R, e^L\}$, $\{e_R, e^R, e^L\}$, $\{e_L, e^R, e^L\}$, $\{e, e_R, e_L\}$, $\{e^R, e_R, e_L\}$, $\{e^L, e_R, e_L\}$. Тогда, если идемпотенты какой либо тройки порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс, то любая пара из них не коммутирует.*

Доказательство. Пусть идемпотенты тройки $\{e, e^R, e^L\}$ порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс. Напомним, что два различных вторичных идемпотента одного типа (оба максимальные или оба минимальные) не могут порождать один и тот же односторонний идеал (теорема 4.1). Поэтому и по теореме 4.2 имеем $e \in R_{e^R} \cap L_{e^L}$. Кроме того, идемпотенты e, e^R, e^L различны. Тогда утверждение теоремы следует из леммы 4.4. Доказательство утверждения для остальных троек аналогично. □

Пример 4.1. Ниже указан $\mathcal{D}-$класс полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 2×2 в виде таблицы, столбцы которой представляют $\mathcal{R}-$классы, а строчки – $\mathcal{L}-$классы. Элементы, обозначенные как ${}_{\downarrow}s_t^k$ и ${}^{\uparrow}s_t^k$, являются вторичными идемпотентами минимального и максимального типа соответственно, так как эти идемпотенты сравнимы с единичной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ булевым порядком $\subseteq$. Элементы, обозначенные как p_t^k, являются первичными идемпотентами. Элементы a_t^k – идемпотентами не являются.

${}_{\downarrow}s_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$p_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$a_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	${}_{\downarrow}s_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$p_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$p_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$p_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	${}^{\uparrow}s_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Кроме пары идемпотентов коммутативных идемпотентов ${}_{\downarrow}s_1^1$ и ${}_{\downarrow}s_2^2$, остальные идемпотенты этого $\mathcal{D}-$класса попарно не коммутируют друг с другом, подтверждая справедливость леммы 4.3 и теоремы 4.4.

Следующий пример получен благодаря Ярошевичу [13], вычислившему все $\mathcal{D}-$классы полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 4×4 и указавшему все особые, так называемые инверсные, $\mathcal{D}-$классы (см. также [14], [15]).

Пример 4.2. Обратные утверждения для леммы 4.4 и теоремы 4.5 не выполняются. Так матрицы $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ являются вторичными идемпотентами полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 4×4, порождающими $\mathcal{D}-$класс, в каждом $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$подклассе которого находится только один, причём, вторичный идемпотент. Однако, $S_1S_2 \neq S_2S_1$ и пересечения $R_{S_1} \cap L_{S_2}$ и $L_{S_2} \cap R_{S_1}$ идемпотентов не содержат.

Пример 4.3. Рассмотрим два вторичных идемпотента минимального типа $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ порождающие, очевидно, один и тот же $\mathcal{D}-$класс полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 3×3. Так как

$$S_1S_2 = S_1S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то пересечения $H_1 = R_{S_1} \cap L_{S_2}$ и $H_2 = R_{S_2} \cap L_{S_1}$ группами не являются, так как по теореме 4.4 они не содержат идемпотентов.

5. Частичные порядки и вторичные идемпотенты

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– моноид и* $\leq$ *– некоторый стабильный частичный порядок на нем. Тогда выполняются следующие эквивалентности, если входящие в них вторичные идемпотенты существуют:*

$$a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R b = b \leftrightarrow a^R b^R = b^R a^R = b^R \leftrightarrow (\exists x) a^R x = b;$$

$$a^R \leq b^L \leftrightarrow b a^R = b \leftrightarrow a^R b^L = b^L a^R = b^L \leftrightarrow (\exists x) x a^R = b;$$

$$a^L \leq b^L \leftrightarrow b a^L = b \leftrightarrow a^L b^L = b^L a^L = b^L \leftrightarrow (\exists x) x a^L = b;$$

$$a^L \leq b^R \leftrightarrow a^L b = b \leftrightarrow a^L b^R = b^R a^L = b^R \leftrightarrow (\exists x) a^L x = b;$$

$$a_R \leq b_R \leftrightarrow b_R a = a \leftrightarrow a_R b_R = b_R a_R = a_R \leftrightarrow (\exists x) b_R x = a;$$

$$a_R \leq b_L \leftrightarrow b_L a = a \leftrightarrow a_R b_L = b_L a_R = a_R \leftrightarrow (\exists x) b_L x = a;$$

$$a_L \leq b_L \leftrightarrow a b_L = a \leftrightarrow a_L b_L = b_L a_L = a_L \leftrightarrow (\exists x) x b_L = a;$$

$$a_L \leq b_R \leftrightarrow a b_R = a \leftrightarrow a_L b_R = b_R a_L = a_L \leftrightarrow (\exists x) x b_R = a.$$

Доказательство. Так как $a^R \leq b^R \leftrightarrow 1 \leq a^R \leq b^R$, то эквивалентности

$$a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R b = b \leftrightarrow a^R b^R = b^R a^R = b^R$$

выполняются по теореме 1.5. Из выражения $(\exists x) a^R x = b$ по теореме 3.1 следует $(a^R)^R \leq b^R$, что по теореме 1.2 даёт неравенство $1 \leq a^R \leq b^R$. Умножая последние неравенства справа на b, получаем $a^R b = b$, и, следовательно, опять получаем $(\exists x) a^R x = b$. Таким образом, $a^R b = b \leftrightarrow (\exists x) a^R x = b$.

Остальные эквивалентности проверяются аналогично. □

Множество идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$ любой полугруппы всегда можно частично упорядочить ([10], §1.8), вводя так называемый *естественный порядок* $\preceq$, определяемый для любых элементов $a, b \in E$ следующим образом:

$$(a \preceq b) \leftrightarrow (a = ab = ba).$$

Следующее утверждение сразу следует из теоремы 5.1.

Теорема 5.2 *Какой бы стабильный порядок* $\leq$ *ни был на моноиде* $\mathbf{X}$ *всегда выполняется равенство* $\leq = \preceq$ *на множестве вторичных идемпотентов минимального типа* $E_{\downarrow} \subseteq \mathbf{X}$, *и равенство* $\leq = \succeq$ *на множестве вторичных идемпотентов максимального типа* $E^{\uparrow}$, *где* $\preceq$ *– естественный порядок на множестве идемпотентов* $E \subseteq \mathbf{X}$, *а частичный порядок* $\succeq = \preceq^{-1}$ *является обратным бинарным отношением для естественного порядка* $\preceq$.

Теорема 5.3. *Если естественный частичный порядок* $\preceq$ *на множестве идемпотентов* $E \subseteq \mathbf{X}$ *можно продолжить до стабильного частичного порядка на всем моноиде* $\mathbf{X}$, *то*

множество вторичных идемпотентов минимального типа относительно этого частичного порядка состоит из всех идемпотентов моноида $E_{\downarrow} = E$, а множество вторичных идемпотентов максимального типа состоит из одного элемента: $E^{\uparrow} = \{1\}$.

Доказательство. Из определения естественного частичного порядка на множестве идемпотентов $a \preceq b \leftrightarrow a = a \cdot b = b \cdot a$ следует, что все идемпотенты моноида меньше либо равны единице моноида. □

Известно [3], что частичный порядок $\preceq$, определенный на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$, можно продолжить до частичного порядка $\leq_M$ на всем моноиде $\mathbf{X}$ следующим образом: $a \leq_M b \leftrightarrow (\exists x, y) a = xb = by = xa$. Такой порядок Митч назвал *естественным полугрупповым порядком.* Несложно показать, что частичному порядку $\leq_M$ можно дать эквивалентное определение в форме Хиггинса [17], которое приводится ниже.

Определение 5.1. *Назовем частичный порядок $\leq_M$, определяемый как*

$$a \leq_M b \quad \longleftrightarrow \quad (\exists x, y) a = xb = by = xa = ay,$$

порядком Митча.

Заметим, что порядок Митча не является стабильным порядком относительно полугрупповой операции в общем случае. Однако, очевидно, любой идемпотент $e \in \mathbf{X}$ не превосходит единицы:$e \leq_M 1$.

Из определения 5.1 следует, что если $a \leq_M b$, то $a = xby \in \mathbf{X}b\mathbf{X}$, то есть если элементы полугруппы сравнимы, то один из них принадлежит двустороннему идеалу, порождённому другим элементом. Тем не менее, верно следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть $a, b \in \mathbf{X}$. Если $a \neq b$ и сравнимы порядком Митча, то они не могут порождать один и тот же односторонний идеал.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbf{X}$ и порождают один и тот же правый идеал. Если $b \in a\mathbf{X}$, то $b = az$ для некоторого $z \in \mathbf{X}$. Предположим, что $a \leq_M b$, то есть $(\exists x, y) a = xb = by = xa = ay$. Тогда

$$b = az = xaz = xb = a,$$

что противоречит условию $a \neq b$. Следовательно, возможно только обратное неравенство $b \leq_M a$. Однако, тогда это будет противоречить условиям $a \in b\mathbf{X}$ и $a \neq b$. □

Следующее утверждение показывает, насколько порядок Митча, даже если он стабилен, не удобен для определения границ множества решений уравнений $ax = a$ или $xa = a$, то есть множества левых и правых единиц элемента a.

Теорема 5.5. *Если для некоторых элементов a и b моноида $\mathbf{X}$ уравнения $ax = a$ (или $xa = a$) и $bx = b$ (или $xb = b$) относительно какого-то стабильного частичного порядка на $\mathbf{X}$ одно имеет максимальное решение, а другое минимальное решение, причём оба не равны единице, то этот частичный порядок не является продолжением естественного частичного порядка $\preceq$ либо его обращения $\preceq^{-1} = \succeq$, определенного на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$ моноида $\mathbf{X}$.*

Доказательство. Заметим, что из условия теоремы следует, что a^L и b_L существуют и $a_L \lneqq 1 \lneqq b^L$, чего не может быть при порядке Митча в силу теоремы 5.3. Этого не может быть и в других случаях: $a_R \lneqq 1 \lneqq b^L$, $a_L \lneqq 1 \lneqq b^R$, $a_R \lneqq 1 \lneqq b^R$. □

Пример 5.1. Для моноида квадратных булевых матриц размера $n \times n, n \geq 2$, с операцией конъюнктного умножения стабильный булевый порядок $\subseteq$ не является продолжением естественного частичного порядка $\preceq$ на множестве идемпотентов (см. [9]).

Теорема 5.6. *Пусть $\leq$ и $\sqsubseteq$ – два стабильных порядка моноида $\mathbf{X}$ относительно которых все идемпотенты моноида не превосходят единицы. Пусть существуют вторичные идемпотенты минимального типа $a_{L_{\leq}}$, $a_{R_{\leq}}$, порожденные элементом $a \in \mathbf{X}$ относительно порядка $\leq$, и порожденные этим же элементом a вторичные идемпотенты минимального*

типа $a_{L_{\sqsubseteq}}$, $a_{R_{\sqsubseteq}}$ *относительно порядка* $\sqsubseteq$. *Тогда*

$$a_{L_{\leq}} = a_{L_{\sqsubseteq}}, \quad a_{R_{\leq}} = a_{R_{\sqsubseteq}}.$$

Доказательство. Из $a_{R_{\leq}} \cdot a = a = a_{R_{\sqsubseteq}} \cdot a$ и определения вторичных идемпотентов минимального типа получаем $a_{R_{\leq}} \leq a_{R_{\sqsubseteq}}$, $a_{R_{\sqsubseteq}} \sqsubseteq a_{R_{\leq}}$. Так как оба стабильных порядка $\leq$ и $\sqsubseteq$ моноида $\mathbf{X}$ таковы, что относительно них все идемпотенты моноида не превосходят единицы, то выполняется системы неравенств:

$$a_{R_{\leq}} \leq a_{R_{\sqsubseteq}} \leq 1,$$

$$a_{R_{\sqsubseteq}} \sqsubseteq a_{R_{\leq}} \sqsubseteq 1.$$

Умножим первое неравенство на $a_{R_{\leq}}$ слева, а второе неравенство на $a_{R_{\sqsubseteq}}$ справа. В силу стабильности отношений частичного порядка $\leq$ и $\sqsubseteq$ получаем

$$a_{R_{\leq}} a_{R_{\leq}} \leq a_{R_{\leq}} a_{R_{\sqsubseteq}} \leq a_{R_{\leq}},$$

$$a_{R_{\sqsubseteq}} a_{R_{\sqsubseteq}} \sqsubseteq a_{R_{\leq}} a_{R_{\sqsubseteq}} \sqsubseteq a_{R_{\sqsubseteq}}.$$

Тогда $a_{R_{\leq}} = a_{R_{\leq}} a_{R_{\sqsubseteq}} = a_{R_{\sqsubseteq}}$.

Равенство $a_{L_{\leq}} = a_{L_{\sqsubseteq}}$ доказывается аналогично. □

Теорема 5.7. *Бинарные отношения* $\leq_{\downarrow}$ *и* $\leq^{\uparrow}$, *определенные для элементов* $a, b \in \mathbf{X}$ *эквивалентностями*

$$a \leq_{\downarrow} b \leftrightarrow a = a_R b = b a_L,$$
$$a \leq^{\uparrow} b \leftrightarrow a = a^R b = b a^L,$$

являются частичными порядками на $\mathbf{X}$.

Доказательство. Справедливость $a \leq_{\downarrow} a$ очевидна.

Докажем транзитивность бинарного отношения $\leq_{\downarrow}$. Из $a = a_R b = b a_L$ по теореме 3.1 получаем неравенства $a_R \leq b_R$ и $a_L \leq b_L$. Из последних неравенств по теореме 5.1 имеем $a_R b_R = b_R a_R = a_R$ и $a_L b_L = b_L a_L = a_L$. Тогда, если предположить $a \leq_{\downarrow} b \leq_{\downarrow} c$, то

$$a = a_R b = b a_L = a_R b_R c = c b_L a_L,$$

что даёт $a = a_R c = c a_L$,то есть $a \leq_{\downarrow} c$.

Если $a \leq_{\downarrow} b$ и $b \leq_{\downarrow} a$, то, применяя предыдущие рассуждения. получаем $a_R = a_R \cdot b_R = b_R \cdot a_R = b_R$ и $a_L = a_L \cdot b_L = b_L \cdot a_L = b_L$. Тогда неравенство $a \leq_{\downarrow} b$ перепишется как $a = a_R \cdot b = b \cdot a_L = b_R \cdot b = b \cdot b_L = b$, что доказывает антисимметричность бинарного отношения $\leq_{\downarrow}$.

То, что бинарное отношение $\leq^{\uparrow}$ является частичным порядком, доказывается аналогичным образом. □

Определение 5.2. *Назовем определённые в теореме 5.7 частичные порядки* $\leq_{\downarrow}$ *и* $\leq^{\uparrow}$ *вторичными порядками минимального и максимального типа соответственно, определяемые некоторым стабильным порядком* $\leq$ *моноида* $\mathbf{X}$.

Заметим, что элемент $a \in \mathbf{X}$ является идемпотентом, причём вторичным идемпотентом минимального типа, тогда и только тогда, когда $a \leq_{\downarrow} 1$, и вторичным идемпотентом максимального типа тогда и только тогда, когда $a \leq^{\uparrow} 1$.

Теорема 5.8. *Предположим, что для всех сравнимых одновременно порядками* $\leq$ *и* $\leq_M$ *элементов моноида* $\mathbf{X}$ *существуют вторичные идемпотенты, соответствующие стабильному порядку* $\leq$ *этого моноида. Тогда выполняются равенства:*

$$\leq_{\downarrow} = (\leq \cap \leq_M),$$

$$\leq^{\uparrow} = (\geq \cap \leq_M),$$

где $\geq = \leq^{-1}$.

Доказательство. Из неравенств $a_R \leq 1$ и $a_L \leq 1$ получаем $a_R \cdot b \leq b$ и $ba_L \leq b$. Поэтому из $a \leq_{\downarrow} b$ следует $a = a_R b = ba_L \leq b$. Таким образом, $\leq_{\downarrow} \subseteq \leq$.

Так как

$$a \leq_{\downarrow} b \leftrightarrow a = a_R b = ba_L = a_R a = aa_L,$$

то из $a \leq_{\downarrow} b$, очевидно, следует $a \leq_M b$. Следовательно, $\leq_{\downarrow} \subseteq (\leq \cap \leq_M)$.

Пусть теперь $a \leq b$ и $a \leq_M b$. Так как для всех сравнимых одновременно порядками $\leq$ и $\leq_M$ элементов моноида $\mathbf{X}$ существуют вторичные идемпотенты, соответствующие стабильному порядку $\leq$, то из $a \leq b$ получаем $a = a_R a \leq a_R b$ и $a = aa_L \leq ba_L$. С другой стороны, неравенство $a \leq_M b$ даёт $a = xb = by = xa = ay$ для некоторых $x, y \in \mathbf{X}$. Тогда по определению вторичных идемпотентов получаем $a_R \leq x$ и $a_L \leq y$. Это даёт $a_R b \leq xb = a$ и $ba_L \leq by = a$. В итоге, из неравенств $a \leq b$ и $a \leq_M b$ получаем

$$a_R b = xb = ba_L = by = a$$

или $a \leq_{\downarrow} b$. Следовательно, выполняется обратное включение $\leq_{\downarrow} \supseteq (\leq \cap \leq_M)$.

Аналогично доказывается равенство $\leq^{\uparrow} = (\geq \cap \leq_M)$. □

Отметим, что стабильность порядка $\leq$ не влечёт стабильность вторичных порядков $\leq_{\downarrow}$ и $\leq^{\uparrow}$ относительно полугруппового умножения.

Теорема 5.9. *Ограничения частичных порядков* $\leq$, $\leq_{\downarrow}$ *и* $\leq_M$ *на множестве вторичных идемпотентов* $E_{\downarrow}$ *моноида* $\mathbf{X}$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть $a, b \in E_{\downarrow}$. По теореме 1.3 имеем $a = a_R = a_L$ и $b = b_R = b_L$. Тогда из теоремы 5.1 получаем:

$$a \leq b \leftrightarrow a = ab = ba \leftrightarrow (\exists x, y) a = by = xb,$$

что даёт равенства

$$\leq = \leq_{\downarrow} = \leq_M$$

на множестве вторичных идемпотентов $E_{\downarrow}$. □

Следующие примеры показывают, что частичные порядки $\leq$, $\leq_{\downarrow}$ и $\leq_M$ даже на множестве всех идемпотентов частичной полугруппы E могут не совпадать.

Пример 5.2. Матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ идемпотентны в полугруппе квадратных булевых $(0,1)-$матриц и $A \subseteq B$. Однако, $B \not\leq_M A$, так как $AB = A$ и $BA = B$.

Пример 5.3. Очевидно, что для любого первичного идемпотента a моноида выполняется $a \leq_M 1$, так как $a = x1 = 1y = a1 = 1a$ для некоторых x, y (в частности, при $x = y = a$). Однако, $a \not\leq_{\downarrow} 1$ по определению первичного идемпотента 1.2 и теореме 1.4.

Теорема 5.10. *Частичный порядок* $\leq_M$ *моноида* $\mathbf{X}$ *стабилен и все сравнимые этим порядком элементы порождают вторичные идемпотенты минимального типа тогда и только тогда, когда он содержится в некотором стабильном порядке* $\leq$, *для которого вторичный порядок* $\leq_{\downarrow}$ *также стабилен.*

Доказательство. Пусть частичный порядок $\leq_M$ стабилен и все сравнимые этим порядком элементы порождают вторичные идемпотенты. Тогда по теореме 5.8 имеем $\leq_{M\downarrow} = \leq_M \cap \leq_M = \leq_M$. Таким образом, существует стабильный порядок $\leq$, для которого порядок $\leq_{\downarrow}$ также стабилен.

Из стабильности некоторого порядка $\leq$ и стабильности $\leq_{\downarrow}$ следует стабильность порядка $\leq_M$. Действительно, условие включения порядков $\leq_M \subseteq \leq$ даёт равенство $\leq_{\downarrow} = \leq \cap \leq_M = \leq_M$ и, следовательно, стабильность порядка $\leq_M$ как пересечения стабильных порядков.

Осталось показать, что все сравнимые порядком $\leq_M$ элементы порождают вторичные идемпотенты минимального типа, соответствующие этому порядку. Так как каждый идемпотент e моноида $\mathbf{X}$ удовлетворяет неравенству $e \leq_M 1$ и выполняется равенство $\leq_\downarrow = \leq_M$, то выполняется неравенство $e \leq_\downarrow 1$ и, следовательно, неравенство $e \leq 1$ в силу теоремы 5.1 для вторичных идемпотентов минимального типа. Тогда выполняются условия теоремы 5.6 о совпадении вторичных идемпотентов, порожденных данным элементом и соответствующих различным стабильным порядкам. Получили, что так как каждый элемент, сравнимый с каким-то другим элементом порядком $\leq_\downarrow$, по определению порядка $\leq_\downarrow$ порождает вторичный идемпотент относительно порядка $\leq$, то и каждый элемент, сравнимый порядком $\leq_M$ также порождает вторичный идемпотент относительно того же порядка $\leq_M$. □

6. Случай регулярных и инверсных полугрупп

Пусть $\mathbf{X}$ – частично упорядоченная регулярная полугруппа с единицей, т.е. все элементы регулярны. Это означает, что для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$ существует, и возможно не единственный, инверсный элемент $b \in \mathbf{X}$, т.е. такой элемент, что выполняются равенства: $aba = a$ и $bab = b$.

Теорема 6.1. *Пусть элементы a и b инверсны. Тогда существование вторичного $R-$идемпотента максимального типа a^R (или минимального типа a_R) для элемента $a \in \mathbf{X}$ равносильно существованию $R-$вторичного идемпотента соответствующего типа для ab, причём $a^R = (ab)^R$ (или $a_R = (ab)_R$).*

Аналогично, существует $L-$вторичный идемпотент максимального типа a^L (или минимального типа a_L) для элемента $a \in \mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда существует вторичный $L-$идемпотент соответствующего типа для ba, причём $a^L = (ba)^L$ (или $a_L = (ba)_L$).

Доказательство. Так как система уравнений

$$ax = ab,$$

$$aby = a$$

в регулярной полугруппе имеет решение, то a и ab порождают один и тот же главный правый идеал. Аналогично, a и ba порождают один и тот же главный левый идеал. Тогда утверждение теоремы 6.1 сразу следует из теорем 3.2 и 3.3.□

Так как произведения инверсных элементов ab и ba являются идемпотентами, то в случае, когда они сравнимы с 1, из теоремы 1.3 получаем либо $a^R = b^L = ab \geq 1$, либо $a^L = b^R = ba \geq 1$, либо $a_R = b_L = ab \leq 1$, либо $a_L = b_R = ba \leq 1$.

Пусть теперь $\mathbf{X}$ является инверсной полугруппой с единицей, т. е. такой регулярной полугруппой, для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$ которой существует ровно один инверсный элемент, обозначаемый a^{-1}. Известно ([16],§7.1), что на любой инверсной полугруппе $\mathbf{X}$ можно задать стабильный частичный порядок Вагнера $\leq_W$ эквивалентностью

$$a \leq_W b \quad \leftrightarrow \quad ab^{-1} = aa^{-1},$$

что делает её упорядоченным моноидом. Частичный порядок Вагнера $\leq_W$ называют также *естественным порядком инверсной полугруппы.*

Следующие две теоремы указывают на то, что в любой инверсной полугруппе $\mathbf{X}$ множества решений уравнений $ax = a$ и $xa = a$, где $a \in \mathbf{X}$ обладают наименьшими решениями, а наибольшим решением относительно естественного частичного $\leq_W$ порядка является единица 1.

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– инверсная полугруппа с единицей 1 и естественным порядком* $\leq_W$. *Тогда для любого элемента* a *существуют вторичные идемпотенты минимального типа, которыми являются* $a_R = aa^{-1}$ *и* $a_L = a^{-1}a$, *и не существуют вторичные идемпотенты максимального типа кроме 1.*

Доказательство. Так как для любого идемпотента $e \in \mathbf{X}$ справедливо равенство $e = e^{-1}$, то выполняется неравенство $e \leq_W 1$, т.е. любой идемпотент в инверсной полугруппе с естественным частичным порядком является вторичным минимального типа. Тогда утверждение теоремы 6.2 следует из теоремы 6.1. □

Следующее утверждение является следствием теоремы 6.2 и теоремы 5.6.

Теорема 6.3. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– инверсная полугруппа с единицей 1 и каким-то частичным стабильным порядком* $\leq$, *относительно которого все идемпотенты не превосходят единицы, т.е.* $E_{\downarrow} = E$. *Тогда для любого элемента* a *существуют вторичные идемпотенты минимального типа, которыми являются* $a_R = aa^{-1}$ *и* $a_L = a^{-1}a$, *и не существуют вторичные идемпотенты максимального типа кроме 1.*

Следующая теорема усиливает утверждение теоремы 3.2.

Теорема 6.4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– инверсная полугруппа с единицей 1, естественным частичным порядком* $\leq_W$. *Тогда для любых* $a, b \in \mathbf{X}$ *выполняются следующие эквивалентности:*

$$aa^{-1} = bb^{-1} \quad \leftrightarrow \quad a_R = b_R \quad \leftrightarrow \quad (a, b) \in \mathcal{R},$$

$$a^{-1}a = b^{-1}b \quad \leftrightarrow \quad a_L = b_L \quad \leftrightarrow \quad (a, b) \in \mathcal{L}.$$

Доказательство. Действительно, так как $a_R b = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b_R b = b$, то $aa^{-1}b = b$. Аналогично получаем $bb^{-1}a = a$. Поэтому $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Обратно. Из $(a, b) \in \mathcal{R}$ по теореме 3.2 следует равенство $a_R = b_R$.

Эквивалентность $a_L = b_L \leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{L}$ доказывается аналогично. □

Отметим, что $(a, a_R) \in \mathcal{R}$ и $(a, a_L) \in \mathcal{L}$ для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$, т.е. $(a, aa^{-1}) \in \mathcal{R}$ и $(a, a^{-1}a) \in \mathcal{L}$, так как

$$a_R a = aa^{-1}a = a, \quad aa^{-1} = a_R,$$

и

$$aa_L = aa^{-1}a = a, \quad a^{-1}a = a_L.$$

Из этого и теоремы 3.4 получаем известный факт: каждый $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$класс инверсной полугруппы порождается одним идемпотентом, а именно вторичными идемпотентами минимального типа aa^{-1} и $a^{-1}a$ соответственно для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$, порождающего те же самые $\mathcal{R}-$ или $\mathcal{L}-$классы.

Теорема 6.5. *Естественные частичные порядки* $\leq_W$, $\leq_M$ *и их вторичные частичные порядки минимального типа на инверсной полугруппе с единицей* $\mathbf{X}$ *совпадают:*

$$\leq_W = \leq_{W\downarrow} = \leq_{M\downarrow} = \leq_M .$$

Доказательство. Так как включение бинарных отношений $\leq_{W\downarrow} \subseteq \leq_W$ выполняется, то достаточно показать обратное включение. Пусть $a \leq_W b$, тогда $a_R = aa^{-1} = ba^{-1}$ и $a_L = a^{-1}a = a^{-1}b$ (см. [16], лемма 7.1). Получаем

$$a = (aa^{-1})a = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = ba_L$$

и

$$a = aa^{-1}a = a(a^{-1}a) = a(a^{-1}b) = a_R b.$$

Таким образом, из неравенства $a \leq_W b$ следует неравентво $a \leq_{W\downarrow} b$.

Так как частичный порядок Митча на инверсной полугруппе стабилен, то по теореме 5.8 имеем $\leq_{M\downarrow}=\leq_M \cap \leq_M=\leq_M$. Остаётся заметить, что из теорем 6.2 и 6.3 имеем также равенство

$$\leq_{W\downarrow}=\leq_{M\downarrow} .$$

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер В. В. Обобщенные группы // ДАН СССР. 1952. № 84. С. 1119—1122.
2. Вагнер В. В. Представление упорядоченных полугрупп // Матем. сб. 1956. Т. 38(80), № 2, С. 203—240.
3. Mitsch H. A Natural Partial Order for Semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 97, № 3. P. 384—388.
4. Hartwig R. How to partially order regular elements // Math. Japonica. 1980. Vol. 25, № 1. P. 1—13.
5. Nambooripad K. The natural partial order on a regular semigroup // Proc. Edin. Math. Soc. 1980. Vol. 23. P. 249—260.
6. Mitsch H. Semigroups and their natural order // Math. Slovaca. 1994. Vol. 44, № 4. P. 445—462.
7. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц. // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 26—33.
8. Поплавский В. Б. Делимость идемпотентов полугруппы булевых матриц // Математика, механика: сб. науч. тр., Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2016. Вып. 18. С. 57—60.
9. Поплавский В. Б. О частичных порядках на множестве булевых матриц // Электронные информационные системы. 2017. №3 (14) С.105-113.
10. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. М.: МИР. 1972. Т. 1. 288 с.
11. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир. 1985. 440 с.
12. Miller D. D., Clifford A. H. Regular $\mathcal{D}-$classes in semigroups. // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. 82. P. 1—15.
13. Щекатурова О. О., Ярошевич В. А. О свойствах булевых матриц // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, №4(2), С. 137—142.
14. Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г. Об инверсных D-классах полугруппы булевых матриц // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого. 2019. С.112—114.
15. Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г. Вычисление инверсных D-классов булевых матриц. // Математика, механика: сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2019. Вып. 21. С.50—52.
16. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. – М.: МИР. 1972. Т. 2. 422 с.
17. Higgins P.M. The Mitsch order on a semigroup // Semigroup Forum.1994. Vol.49. P. 261—266.

REFERENCES

1. Vagner V. V.1952, "Generalized groups," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* , no. 84, pp. 1119—1122.
2. Vagner V. V.1956, "Representation of ordered semigroups," *Math. Sbornik* , vol. 38(80), no. 2, pp. 203—240.
3. Mitsch H. 1986, "A Natural Partial Order for Semigroups," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 97, no. 3, pp. 384—388.
4. Hartwig R. 1980, "How to partially order regular elements," *Math. Japonica*, vol. 25, no. 1 , pp. 1—13.
5. Nambooripad K. 1980, "The natural partial order on a regular semigroup," *Proc. Edin. Math. Soc.*, vol. 23, pp. 249—260.
6. Mitsch H. 1994, "Semigroups and their natural order," *Math. Slovaca* , vol. 44, no. 4 , pp. 445—462.
7. Poplavski V. B. 2012, "On idempotents of algebra of Boolean matrices ," *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 12, no. 2, pp. 26—33.
8. Poplavski V. B. 2016, "Divisibility for idempotents of semigroup of Boolean matrices," *Math. Mech. Saratov Univ.*, no. 18, pp. 57-60.
9. Poplavski V. B. 2017, "On partial orders for the set of Boolean matrices," *Electronic Information Systems,* no. 3 (14), pp. 105—113.
10. Klifford A. H., Preston G. B. 1972 *The Algebraic Theory of Semigroups.* MIR, Moscow, vol. 1. 288 p.
11. Lallement G. 1985. *Semigroups and Combinatorial Applications.* MIR, Moscow. 440 p.
12. Miller D. D., Clifford A. H. 1956. "Regular $\mathcal{D}-$classes in semigroups," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 82, pp. 1—15.
13. Shchekaturova O. O. , VA Yaroshevich V. A.2013. "On the properties of Boolean matrices," *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, no 4(2), pp. 137-142.
14. Poplavski V. B., Javkaev D. G. "On Inverse D-classes of a Semigroup of Boolean Matrices," *Proc. XVIth Int. Conf."Algebra, Number Theory and Discreet Geometry."* Tula, 2019, pp.112-114. http://poivs.tsput.ru/conf/international/XVI/files/Conference2019M.pdf
15. Poplavski V. B., Javkaev D. G. 2019. "Calculation of Inverse D-classes of Boolean Matrices," *Math. Mech. Saratov Univ.*, no. 21, pp. 50-52.
16. Klifford A. H., Preston G. B. 1972. *The Algebraic Theory of Semigroups.* MIR, Moscow, vol. 2. 422 p.
17. Higgins P.M. 1994. "The Mitsch order on a semigroup," *Semigroup Forum,* vol.49, pp. 261—266.

Получено 18.02.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.