

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-153-167

О динамических процессах в экономике многосторонних сетевых платформ¹

А. Я. Канель-Белов, М. О. Коматовский, С. А. Тищенко

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, Университет им. Бар-Илана (г. Рамат-Ган).

e-mail: kanelster@gmail.com

Коматовский Максим Олегович — Сколтех (г. Москва).

e-mail: maxim.komatovskiy@skoltech.ru

Тищенко Сергей Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tichtch@mail.ru

Аннотация

В последнее время все чаще мы наблюдаем появление на экономических рынках цифровых и сетевых платформ. К примеру, рынок такси в Москве из классического оказания материальной услуги — сервиса по перевозке пассажиров, трансформировался в рынок предоставления информационных услуг, где основные игроки — цифровые платформы (Яндекс такси, Uber) оказывают информационные услуги по знакомству клиента-пассажира с поставщиком-водителем. В этой связи, видится естественным рассмотреть причины, по которым одни фирмы выигрывают рыночную борьбу в новых экономических условиях, а другие ее проигрывают. В основе исследования лежит информационный подход Фрэнка Басса, предполагающий, что основное влияние на распределение долей на рынке оказывает распространение информации о новом продукте в среде потребителей (в нашем случае среда потребителей будет моделироваться с помощью некоторой сети).

После изложения основных принципов модели Басса, модель существенно расширяется, что позволяет описать взаимодействие нескольких фирм, конкурирующих в рамках одного рынка недифференцированного информационного продукта. Необходимо выяснить, каким именно образом конкретные параметры моделей влияют на итоговое устойчивое положение равновесия, как фирмы могут и должны воздействовать на этот параметр, чтобы победить в борьбе за рыночную власть. Исследование предполагает построение общих теоретических выводов, основываясь на которых, в дальнейшем можно будет перейти к практической части исследования.

В работе используется математический аппарат из элементарной теории дифференциальных уравнений, теории катастроф, теории популяций. Прежде, чем мы начнем, заинтерисуем читателя следующей мыслью: рыночную борьбу производителей на ограниченном рынке потребителей можно рассматривать как конкуренцию двух различных видов хищников за ограниченную популяцию жертв.

Ключевые слова: диффузия информации в сетях, сетевая платформа, модель Басса.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, М. О. Коматовский, С. А. Тищенко. О динамических процессах в экономике многосторонних сетевых платформ // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 153–167.

¹Работа была поддержана грантом ISF 1994/20

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-153-167

Dynamic processes in the economics of multilateral network platforms²

A. Y. Kanel-Belov, M. O. Komatovskiy, S. A. Tishchenko

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, Bar-Ilan University (Ramat Gan).*e-mail: kanelster@gmail.com***Komatovskiy Maxim Olegovich** — Skoltech (Moscow).*e-mail: maxim.komatovskiy@skoltech.ru***Tishchenko Sergey Alexandrovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: tichtch@mai.ru***Abstract**

Recently, we have seen the emergence of digital and network platforms in the economic markets more and more often. For example, the taxi market in Moscow has transformed from a classical provision of material services — a passenger transportation service — into a market for the provision of information services, where the main players — digital platforms (Yandex taxi, Uber) provide information services to introduce the client-passenger to the supplier-driver. In this regard, it seems natural to consider the reasons why some firms win the market struggle in the new economic environment, while others lose it. The research is based on Frank Bass's informational approach, which assumes that the distribution of information about a new product among consumers has the main influence on the distribution of market shares (in our case, the consumer environment will be modeled using a network).

After setting out the basic principles of the Bass model, the model expands significantly, which allows us to describe the interaction of several firms competing within the same market for an undifferentiated information product. It is necessary to find out exactly how the specific parameters of the models affect the final stable equilibrium position, how firms can and should influence this parameter in order to win the struggle for market power. The study involves the construction of general theoretical conclusions, based on which, in the future, it will be possible to move on to the practical part of the study.

The work uses the mathematical apparatus from the elementary theory of differential equations, the theory of catastrophes, the theory of populations. Before we begin, let us intrigue the reader with the following thought: the market struggle of producers in a limited consumer market can be seen as a competition between two different types of predators for a limited population of prey.

Keywords: information diffusion in networks, platform networks, Bass model.*Bibliography:* 15 titles.**For citation:**

A. Y. Kanel-Belov, M. O. Komatovskiy, S. A. Tishchenko, 2021, "Dynamic processes in the economics of multilateral network platforms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 153–167.

Авторы посвящают статью 80-летию проф. Михалёва Александра Васильевича и 70-летию проф. Семёнова Алексея Львовича

²The paper was supported by Israel science foundation, grant number ISF 1994/20

1. Введение

Пусть существует множество потребителей и некоторый инновационный товар или технология, например, агрегатор такси. Будем считать «приобретением» товара начало пользования услугами агрегатора (а не каждую конкретную поездку). Вопрос состоит в том, как информация о новой технологии распространится в среде потребителей, обладающей заранее заданными чертами.

Введем параметры информационной диффузии и опишем нашу систему дифференциальным уравнением:

$$\frac{dF(t)}{dt} = (p + qF(t))(m - F(t))$$

Здесь $m \in [0; 1]$ — доля рынка, потенциально доступная для покрытия данной технологией (например, невозможно предложить новые кофейные зерна человеку, у которого на кофе аллергия).

$p \in [0; 1]$ — доля тех потребителей из множества еще не воспользовавшихся технологией, которые узнают о ней самостоятельно.

$q \in [0; 1]$ — доля тех потребителей из множества еще не воспользовавшихся технологией, которые узнают о ней от уже воспользовавшихся.

$F(t) \in [0; 1]$ — доля потребителей, использующих услугу на момент времени t . Отсюда $m - F(t)$ — доля рынка, не занятая на момент времени t .

В дальнейшем мы будем обозначать функцию $F(t)$ как F , если не требуется иное.

2. Поиск равновесных положений системы

Отдельно необходимо обговорить начальные условия системы, т.е. величину $F(0)$. Покажем, что положение устойчивого равновесия не зависит от начального условия, а в дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать $F(0) = 0$.

Построим, для полного осознания происходящего, два графика: первый — в осях $(F; \frac{dF}{dt})$, второй — в осях $(t; F)$, причем в последнем случае нас будет скорее интересовать поле направлений, нежели конкретный вид изоклин (хотя к нему мы тоже обратимся).

Соответствующая задача Коши решается однозначно (в качестве начального условия положим $F(0) = A$). В частности, можно использовать метод разделения переменных.

Нас будет интересовать «центральная» часть решения, имеющая форму S -образной кривой. выбор конкретной кривой происходит под влиянием начального условия: ось $O_{F(t)}$ пересекается нужным решением в точке A . Интуиция S -образной кривой становится понятнее, если взглянуть на поле направлений.

Отдельно заметим, что в случае излишних начальных вложений в рекламную компанию ($A > m$), развитие рынка будет происходить по нисходящей траектории, стабилизация произойдет на предельном уровне m . В дальнейшем мы увидим, что сумма долей рынка, занятые несколькими фирмами при $t \rightarrow +\infty$ в сумме дает ровно m . Интуитивно это можно объяснить следующим мысленным экспериментом: предположим, что две малые фирмы слились в одну большую, в силу отсутствия конкурентного фактора систему можно будет рассмотреть как единственное дифференциальное уравнение, описанное выше.

Модель не была бы столь популярна, если бы не выходила за рамки теоретических суждений. На текущий момент существуют десятки подходов к оценке параметров как классической модели Басса, так и ее усложнений. С точки зрения автора, наиболее удобен подход, описанный в работе [6], позволяющий оценить параметры модели на относительно простых данных (количество продаж в каждый момент времени).

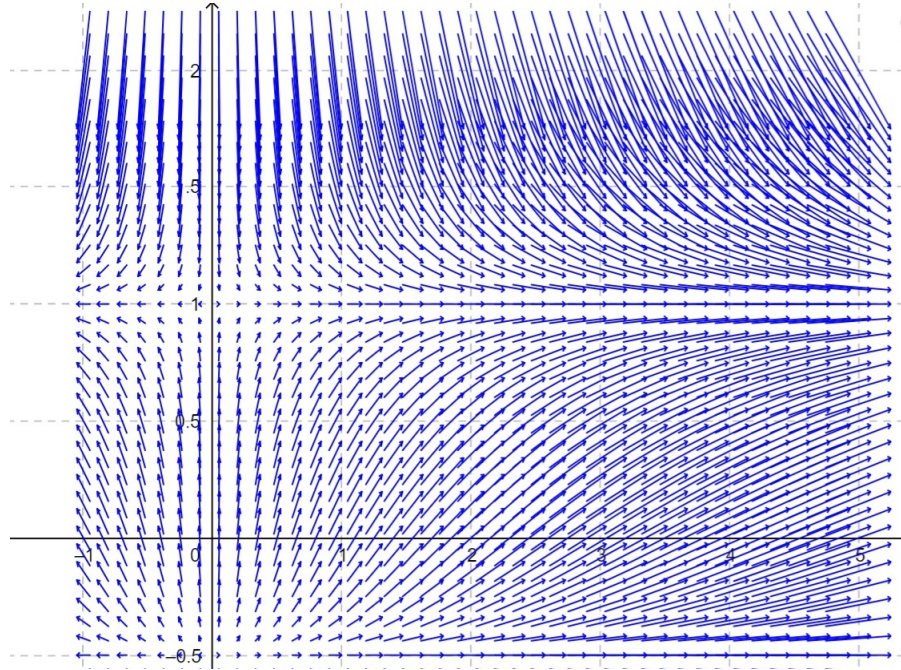


Рис. 1: Стационарные множества и предполагаемые траектории для $m = 1, p = 1, q = 2$, значения параметров выбраны исключительно для иллюстративных целей и не несут смысловой нагрузки

Разумеется, непрерывная модификация модели — это в некотором роде идеалистический подход, однако, чем более гранулированными данными по количеству продаж товара в момент времени будет обладать автор, тем точнее окажутся выводы и прогнозы, полученные из модели.

3. Конкуренция двух поставщиков в условиях фиксированного объема рынка

Рассмотрим следующую непрерывную конкурентную модель:

$$\begin{cases} \frac{dg_1(t)}{dt} = (a + bg_1(t))(m - g_1(t) - g_2(t)) \\ \frac{dg_2(t)}{dt} = (a + bg_2(t))(m - g_1(t) - g_2(t)) \end{cases}$$

В системе выше $g_1, g_2 \in [0; 1]$ — доли рынка, занятые в момент времени t , причем $G(t) = g_1(t) + g_2(t) \in [0; 1]$, т.е. фирмы в совокупности не могут занять большую долю рынка, чем 1. В дальнейшем, для удобства, обозначение $g_i(t)$ заменим на более компактное g_i .

$a, b \in (0; 1]$ — параметры диффузионной модели Басса.

Параметр a — коэффициент самостоятельной диффузии (мера распространения информации, происходящего самостоятельно, вне зависимости от g_i), параметр b — мера зависимости темпов роста предложения услуг, зависящих от предоставляемого на момент t объема. $m \in (0; 1]$ — максимально доступный объем рынка (доля потребителей, готовых приобрести данный товар).

Как было показано выше, устойчивым равновесием в данной системе является ситуация, в которой фирмы в совокупности занимают весь доступный рынок. Отличие от базовой модели

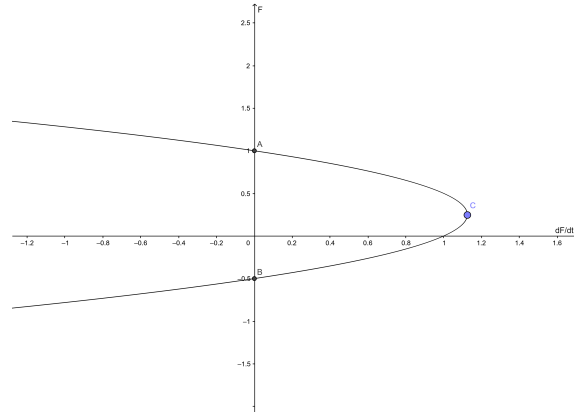


Рис. 2: Построение в осях $(\frac{dF}{dt}; F(t))$ выявляет одно устойчивое равновесие (верхнее) и одно неустойчивое (нижнее). При $F < -\frac{p}{q}$ производная $\frac{dF}{dt} < 0$, т.е. F убывает. Аналогично при $F > m$. В промежуточном положении $\frac{dF}{dt} > 0$, наибольшая скорость роста в вершине параболы.

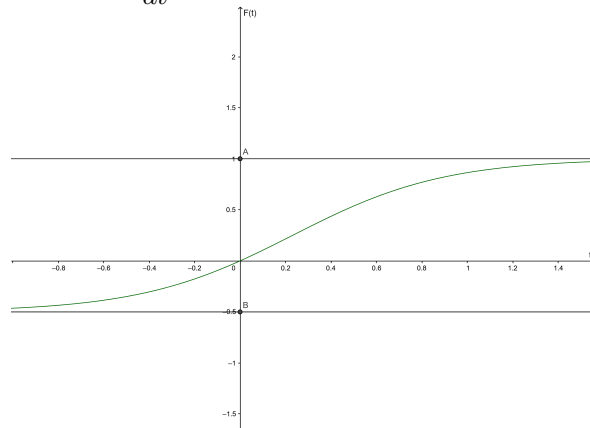


Рис. 3: График части решения задачи Коши с начальным условием $F(0) = 0$, параметры на обеих иллюстрациях: $p = 1$, $q = 2$, $m = 1$

состоит в наличии фактора конкуренции за потребителя. Заметим, что если установить темп роста одной из фирм равным нулю тождественно, мы окажемся в случае действия на рынке единственной фирмы и придем к результату, полученному ранее, устойчивому равновесию на уровне $g = m$.

Вопрос, на который мы пытаемся дать ответ с помощью этой модели: в какой пропорции фирмы поделят рынок в предельном устойчивом случае, т.е. при $t \rightarrow \infty$.

Очевидно, в случае полной симметрии фирм, решение системы также будет симметричным, и фирмы поделят рынок в пропорции 1 : 1. Нас, однако, будет интересовать случай различных начальных позиций. Установим следующие начальные условия:

$$g_1(0) = A < m$$

$$g_2(0) = B \in (0; A)$$

Вернемся к системе. Поделим первое уравнение на второе, исключая тем самым dt и скобку, отвечающую за долю незанятого рынка:

$$\frac{dg_1}{dg_2} = \frac{a + bg_1}{a + bg_2}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dg_1}{a + bg_1} = \frac{dg_2}{a + bg_2}$$

Домножаем обе части уравнения на $b > 0$, интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{dg_1}{\frac{a}{b} + g_1} \right) &= \int \left(\frac{dg_2}{\frac{a}{b} + g_2} \right) \\ \ln \left(\frac{a}{b} + g_1 \right) &= \ln \left(\frac{a}{b} + g_2 \right) + \text{const} \\ \frac{a}{b} + g_1 &= e^{\text{const}} \cdot \left(\frac{a}{b} + g_2 \right) \end{aligned}$$

Переобозначив $e^{\text{const}} := \hat{c}$, имеем:

$$g_1 = \hat{c} \cdot \left(\frac{a}{b} + g_2 \right) - \frac{a}{b} = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot g_2$$

Подставим $g_1 = g_1(g_2)$ во второе уравнение системы:

$$\frac{dg_2}{dt} = \left(a + bg_2 \right) \left(m - g_2 - (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} - \hat{c} \cdot g_2 \right)$$

Это дифференциальное уравнение может быть решено методом разделения переменных (делим обе части на многочлен справа, домножаем на dt , разбиваем дробь слева в сумму простейших с помощью метода неопределенных коэффициентов и интегрируем обе части). Решение выглядит следующим образом:

$$\hat{g}_2 : \left(\{t\} \rightarrow \frac{ae^{2abc_1+b^2c_1m} + a(-\hat{c})e^{2at+bmt} + ae^{2at+bmt} + bme^{2at+bmt}}{b(-e^{2abc_1+b^2c_1m} + \hat{c}e^{2at+bmt} + e^{2at+bmt})} \right)$$

Преобразуем решение:

$$g_2 = \frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + e^{(2a+bm)t} (bm + (1 - \hat{c})a)}{-b \cdot (e^{bc_1(2a+bm)} - (1 + \hat{c})e^{(2a+bm)t})}$$

Используем начальное условие $g_2(0) = B$:

$$\frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + 1 \cdot (bm + (1 - \hat{c})a)}{-b \cdot (e^{bc_1(2a+bm)} - (1 + \hat{c}) \cdot 1)} = B$$

Отсюда может быть найдена g_1 :

$$\hat{g}_1 = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot \hat{g}_2$$

Используем начальное условие $g_2(0) = B$:

$$\frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + 1 \cdot (bm + (1 - \hat{c})a)}{-b \cdot (e^{bc_1(2a+bm)} - (1 + \hat{c}) \cdot 1)} = B$$

Тогда начальное условие для $g_1(0) = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot B = A$.

Решим систему начальных условий:

$$\begin{cases} a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + (bm + (1 - \hat{c})a) = -B \cdot b \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + Bb(1 + \hat{c}) \\ \hat{c} \cdot \left(\frac{a}{b} + B\right) = A + \frac{a}{b} \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \hat{c} = \frac{Ab + a}{Bb + a} \\ (a + bB) \cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1 + \hat{c}) - bm - (1 - \hat{c})a \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$(a + bB) \cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1 + \hat{c}) - (bm + 2a) + (1 + \hat{c})a$$

$$(a + bB) \cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1 + \hat{c}) - (bm + 2a) + (1 + \hat{c})a$$

$$e^{bc_1(2a+bm)} = (1 + \hat{c}) \frac{Bb + a}{Bb + a} - \frac{bm + 2a}{Bb + a} = (1 + \hat{c}) - \frac{bm + 2a}{Bb + a}$$

Остановимся на этом этапе преобразования и подставим выражения для $\hat{c}$ и $e^{bc_1(2a+bm)}$ в разность функций объемов, предел которой нас интересует:

$$\Delta(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} ((\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \hat{g}_2) = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{g}_2$$

Вычислим отдельно $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{g}_2$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{g}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \left((1 + \hat{c}) - \frac{bm + 2a}{Bb + a}\right) + (bm + (1 - \hat{c})a) \cdot e^{t(2a+bm)}}{-b \cdot \left((1 + \hat{c}) - \frac{bm + 2a}{Bb + a}\right) - (1 + \hat{c}) \cdot e^{t(2a+bm)}}$$

Поскольку $f(\alpha) = e^{k\alpha}$, $k > 0$ — монотонно возрастающая по α функция, можем отбросить постоянные величины, не зависящие от t в числителе и знаменателе:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t(2a+bm)} \cdot (bm + (1 - \hat{c})a)}{e^{t(2a+bm)} \cdot (b(1 + \hat{c}))} &= \frac{bm + a \cdot \frac{(B - A)b}{Bb + a}}{b \cdot \frac{(A + B)b + 2a}{Bb + a}} = \\ &= \frac{bm(Bb + a) + ab(B - A)}{(A + B)b^2 + 2ab} = \frac{m(Bb + a) + a(B - A)}{(A + B)b + 2a} \end{aligned}$$

4. Пример

Пусть $a = 0.01, b = 0.05, m = 0.8, A = 0.05, B = 0.01$. Поскольку мы смогли в общем виде выразить итоговый разрыв как функцию исходных параметров модели:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = \left(\hat{c}(A, B, a, b) - 1 \right) \cdot \frac{a}{b} + \left(\hat{c}(A, B, a, b) - 1 \right) \cdot \frac{m(Bb + a) + a(B - A)}{(A + B)b + 2a},$$

мы без труда сможем определить предельное разделение рынка, подставив параметры модели в функцию разрыва.

$$1 < \hat{c} = \frac{Ab + a}{Bb + a} = \frac{0.05 \cdot 0.05 + 0.01}{0.01 \cdot 0.05 + 0.01} \approx 1.19048$$

$$\begin{aligned} \lim(\Delta(0.01; 0.05; 0.8; 0.05; 0.01)) &= \left(0.19048 \right) \cdot \frac{1}{5} + \left(0.19048 \right) \cdot \frac{0.8 \cdot (0.0105) + 0.01 \cdot (-0.04)}{0.06 \cdot 0.05 + 0.02} = \\ &= 0.19048 \cdot \left(0.2 + \frac{0.008}{0.023} \right) \approx 0,10434 \end{aligned}$$

Правая дробь в вычислениях — предельная доля на *доступном* рынке второй фирмы $\bar{g}_2 \approx 0.348$, соответственно, доля первой фирмы составит долю второй фирмы с добавлением разрыва: $\bar{g}_1 \approx 0.453$. Заметим, что доли фирм в сумме дают в точности $m = 0.8$, т.е. фирмы поделят весь доступный рынок.

Даже такой «наивный» анализ позволяет заметить, что, исходный разрыв в используемой доле рынка возрастает во времени. Происходит это по траекториям, сходным с S -образными кривыми в монополистическом случае, выбор конкретной траектории происходит в зависимости от разрыва.

5. Немного о функции разрыва

Динамика рыночного разрыва зависит от исходных параметров:

- группа переменных диффузии, которая задана экзогенна и зависит лишь от структуры сети, в которой происходит распространение
- величина исходного разрыва: $\delta = A - B$
- нижняя граница разрыва, в наших обозначениях это B (разрыв в 0.04 между 0.01 и 0.05 и точно такой же разрыв в 0.04 между 0.26 и 0.3 — совершенно разные исходные ситуации)
- экзогенный объем рынка m

Изучать функцию разрыва будет удобнее, глядя на фазовую диаграмму исходной системы дифференциальных уравнений, немного переименовав параметры (вернемся к классическим обозначениям Басса):

$$\begin{cases} \frac{dg_1(t)}{dt} = (p + qg_1(t))(m - g_1(t) - g_2(t)) \\ \frac{dg_2(t)}{dt} = (p + qg_2(t))(m - g_1(t) - g_2(t)) \end{cases}$$

Из решения очевидной системы условий стационарности

$$\frac{dg_1}{dt} = \frac{dg_2}{dt} = 0,$$

получаем три множества стационарных точек, каждое из которых представляет собой прямую на фазовой плоскости. Такая фазовая плоскость является проекцией S -образной поверхности на область своего определения, тем самым мы производим некоторое «исследование с высоты птичьего полета».

Нетрудно проверить, что все устойчивые состояния системы лежат на наклонной прямой, задаваемым уравнением $g_1 + g_2 = m$. Более того, в силу интерпретации исходной задачи, с точки зрения экономической интуиции нас интересует лишь положительная четверть плоскости (g_1, g_2) (хотя с точки зрения понимания сути процесса, это, конечно, не так). Пусть в момент времени $t = 0$ фирмы входят на рынок с объемами, отраженными в координатах точки $A_0 = (A, B)$, $A > B$.

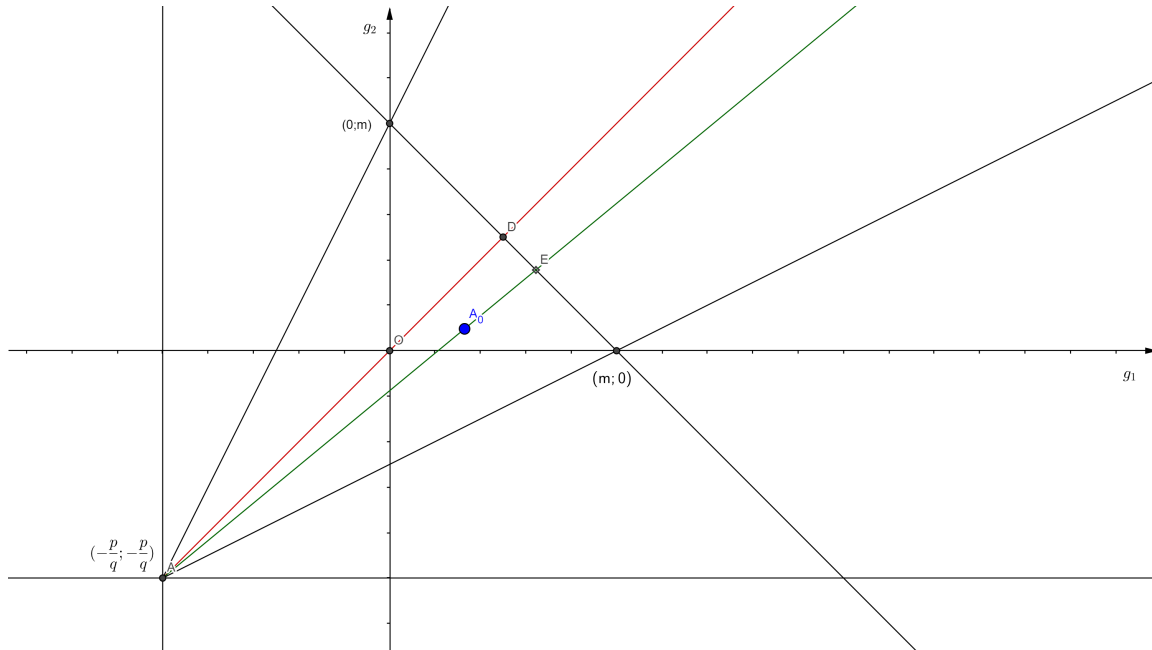


Рис. 4: Стационарные множества и предполагаемые траектории

Сформулируем следующее **утверждение**: точка, соответствующая предельному взаимодействию фирм на рынке есть точка пересечения прямой, задаваемой уравнением $g_1 + g_2 = m$ (стационарное множество) и прямой, проходящей через точку $A = (-\frac{p}{q}; -\frac{p}{q})$ и точку начального положения (в нашем случае, A_0).

Частный случай траектории отмечен на *рисунке 4* красным цветом. Поскольку до сих пор мы полагали параметры p, q одинаковыми для обеих фирм, что приводило к полной симметрии последних, в нашем частном случае этот луч содержит биссектрису прямого угла в первой координатной четверти. Обозначим луч, проходящий через точку D , в которой рынок делится ровно пополам и точку $(-\frac{p_1}{q}; -\frac{p_2}{q})$ как l_* .

Для того, чтобы доказать этот факт, произведем следующую замену переменных, перемещая новое начало координат в точку A пересечения двух стационарных множеств:

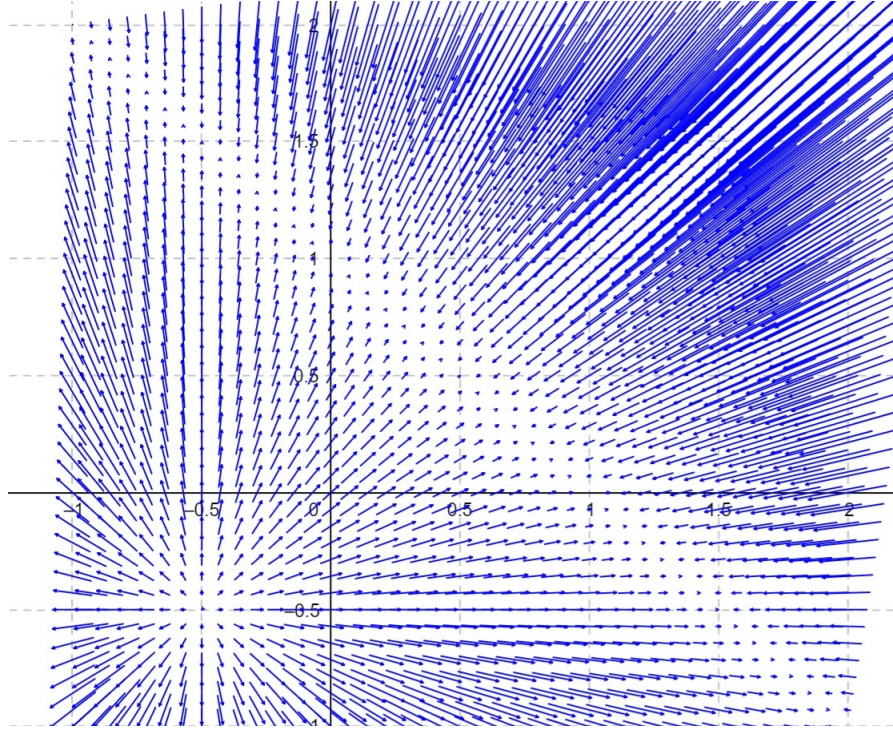


Рис. 5: Поле направлений рассматриваемой системы, по-прежнему, $p_1 = p_2 = 1$, $q = 2$, $m = 1$. Значения параметров вновь подобраны в иллюстративных целях.

$$\begin{cases} s_1 := p + q \cdot g_1 \\ s_2 := p + q \cdot g_2 \end{cases} \implies \begin{cases} g_1 = \frac{s_1 - p}{q} \\ g_2 = \frac{s_2 - p}{q} \end{cases}$$

Производя подстановку, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = s_1 \cdot (mq - 2p - s_1 - s_2) \\ \frac{ds_2}{dt} = s_2 \cdot (mq - 2p - s_1 - s_2) \end{cases}$$

Поделив одно уравнение на другое, получим соотношение $\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_2}{s_2}$, откуда после интегрирования мгновенно следует соотношение

$$s_2 = s_1 \cdot k, \quad k = \frac{1}{e^{const}} > 0$$

Это соотношение описывает множество лучей, с положительным наклоном, выходящих из начала координат $(s_1; s_2)$.

Заметим, что если рассмотреть сечение поверхности $(g_1(t); g_2(t); t)$ плоскостями, содержащими указанные лучи и ортогональными к плоскости $(g_1(t); g_2(t))$, то в этом сечении останутся S -образные кривые, сходные с той, что мы видели на графике решения дифференциального уравнения Басса для одной фирмы. В частности, точно такую же S -образную кривую можно получить, взяв в случае $p_1 = p_2 = p$ сечение, содержащую биссектрису положительного ортанта.

Из этого множества лучей нас будут интересовать лишь те, что лежат *между* лучами, в координатах (g_1, g_2) проходящих через точки $(0; m)$, $(m; 0)$ (на рисунке отмечены черным), поскольку нас интересуют лишь траектории, проходящие через осмысленные начальные значения (а это точки внутри треугольника, образуемого наклонной стационарной прямой и осями). Отметим, что для любой точки внутри указанного треугольника найдется луч, лежащий в рассматриваемом конусе, проходящий через заданную точку, а значит, для любых начальных условий мы сможем определить итоговое положение равновесия.

Рыночный же разрыв можно пронаблюдать, вычислив максимум из разности координат итоговой точки на рассматриваемой траектории (например, E) и точки разделения рынка в пропорции 1:1, т.е. точки D . Рыночный разрыв в процессе, т.е. в некоторый момент времени между 0 и $+\infty$ можно увидеть так: проводим прямую с наклоном, аналогичным наклону стационарного множества через рассматриваемую точку, смотрим максимум из разницы координат рассматриваемой точки и точки на проведенной прямой с равными координатами (см. рисунок 6).

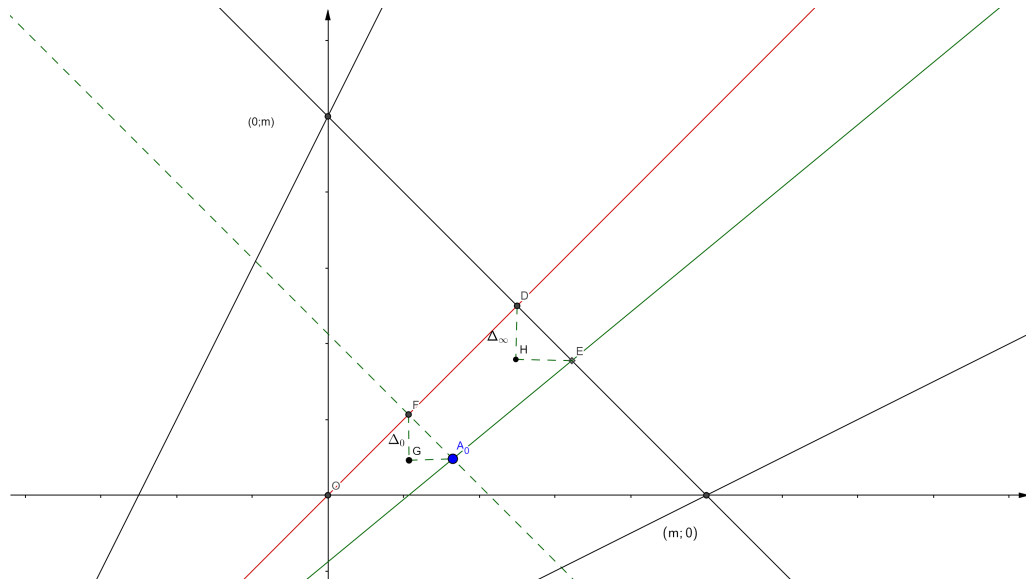


Рис. 6: Рыночные разрывы в модели

Нетрудно заметить, что с течением времени рыночный разрыв увеличивается, поскольку прямые не параллельны друг другу, а точка пересечения лежит левее рассматриваемой области.

5.1. Зависимость Δ_∞ от конкретных параметров

В этом разделе мы откажемся от предпосылки о равенстве рекламных возможностей обеих фирм ($p_1 = p_2 = p$) и посмотрим как будет меняться ситуация на рынке при изменении параметров p_1, p_2, q, m , а также начального положения (A, B) .

- объем доступного рынка m .

Геометрически, этот параметр определяет насколько высоко будет расположена наклонная прямая, являющаяся одним из трех стационарных множеств (именно на ней лежат все возможные итоговые равновесия). Интуитивно, увеличение этого параметра (приближение к единице снизу) будет приводить к росту величины итогового разрыва, поскольку стационарная прямая будет удаляться от вершины конуса, содержащего любую

из интересующих нас траекторий. Формально увеличение разрыва можно пронаблюдать в функции итогового разрыва (она линейна по m , коэффициент положителен в силу неравенства $\hat{c} > 1$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = \left(\hat{c}(A, B, a, b) - 1 \right) \cdot \frac{a}{b} + \left(\hat{c}(A, B, a, b) - 1 \right) \cdot \frac{m(Bb + a) + a(B - A)}{(A + B)b + 2a}$$

- Параметр q , отвечающий за скорость диффузии в сети.

Геометрически, от q зависит положение вершины конуса, а на практике значение этого параметра определяется структурой сети, поэтому было бы странно полагать его различным для двух фирм, пытающихся войти на один и тот же рынок.

С ростом q вершина приближается к началу координат, что можно проинтерпретировать так: происходит событие (например, появление мобильной связи, нового бесплатного мессенджера), по причине которого повышается плотность сети, что положительно сказывается на скорости распространения информации, а значит, усиливает сетевой эффект. Освоение товара обеими фирмами потребителями ускоряется, переход к равновесию происходит быстрее (достаточно вспомнить интерпретацию этого параметра в модели Басса, где наиболее быстрорастущая часть S -образной кривой поределалась именно его значением). Изначальный разрыв успевает увеличиться на большую величину, чем в исходной ситуации.

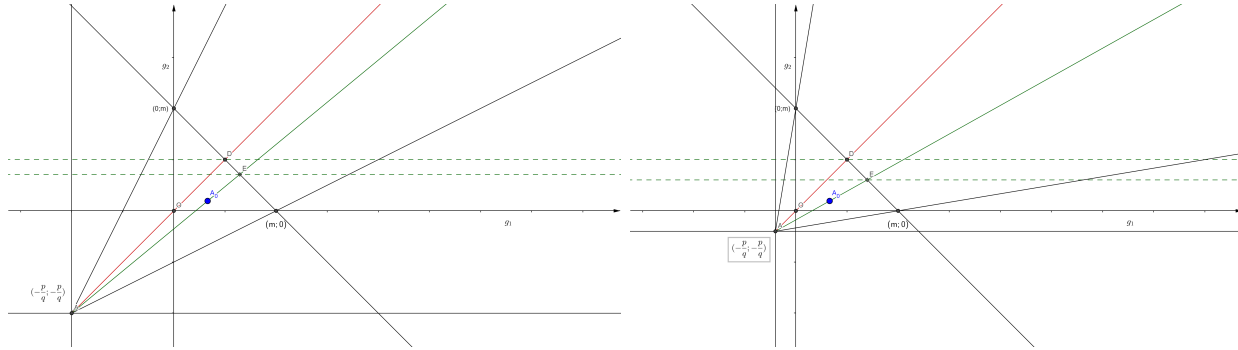


Рис. 7: Изменение q в большую сторону приводит к росту рыночного разрыва

- Параметры p_1, p_2 , отражающие эффективность рекламы как способа распространения информации о товаре до вступления в силу сетевого эффекта.

Без ограничения общности, будем исследовать влияние на итоговое равновесие параметра p_1 . Предположим, что он увеличивается (например, первая фирма вложила некоторый существенный объем средств в рекламную кампанию), смотри *рисунок 8* (подразумевается, что $p_1 > p_2$).

Интуитивно, это должно, при прочих равных, дать первой фирме некоторое преимущество по сравнению со второй фирмой. Так и происходит, геометрически увеличение параметра p_1 приводит к сдвигу влево вертикальной стационарной прямой (задается уравнением $g_1 = -\frac{p_1}{q}$), что в свою очередь приводит к смещению вершины конуса вниз по стационарной прямой. Чтобы увидеть то преимущество, которое получает первая фирма, введем понятие *исходного выигрышного множества* Ω_1 :

$$\Omega_1 = \left\{ (A, B) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} (g_1(t)) > \lim_{t \rightarrow \infty} (g_2(t)) \right\}$$

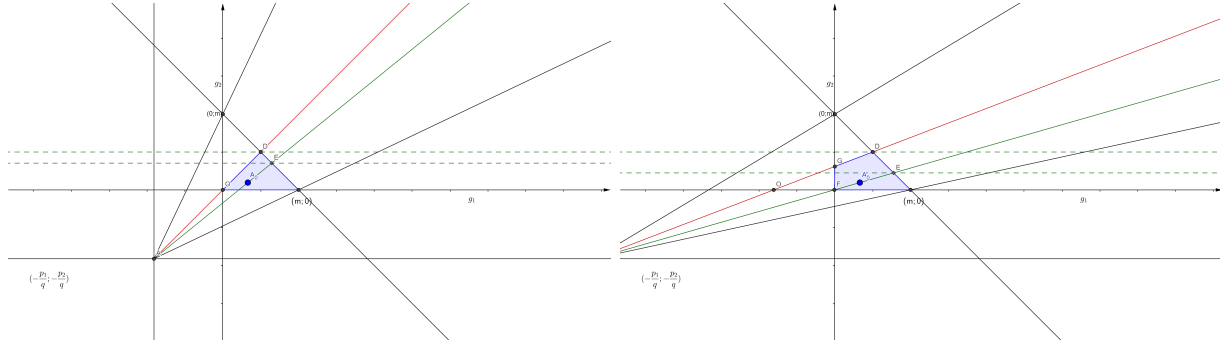


Рис. 8: Изменение p_1 в большую сторону приводит к росту рыночного разрыва и, при прочих равных, увеличению исходного выигрышного множества Ω_1

Содержательно, это множество всех исходных ситуаций (начальных условий), при которых первая фирма в итоге получает более 50% рынка. Такого рода требование в дальнейшем будем называть *исходным выигрышным критерием*. Критерий может основываться не только на занятой доле рынка, но и на величине разрыва, разнице в прибылях и т.д. В нашем случае это пространство под l_* внутри треугольника, отсекаемого наклонной стационарной прямой.

- Влияние исходного положения (A, B) на исход взаимодействия системы отражен в концепции исходного выигрышного множества. Стоит добавить, что внутри своего выигрышного множества фирма предпочитает ту точку, в которой исходный разрыв больше (в силу возрастания разрыва по времени)

6. Моделирование цикла победителя

До сих пор наличие и размер рыночного разрыва никак не интерпретировались, и на данном этапе мы знаем только то, что существующий разрыв имеет тенденцию к увеличению, скорость роста разрыва напрямую зависит от параметров модели. Однако, кто считается «победителем» в этой конкурентной борьбе?

Пусть типичный агент (вершина в сети, в которой происходит диффузия информации) обладает тривиальной функцией полезности:

$$u_i = \mu \cdot g_i$$

Под g_i в данном случае понимается численность группы, в которой состоит агент, $\mu \in \mathbb{R}_{++}$. Пусть издержки переключения с одной группы на другую постоянны и равны c . В таком случае, в любой момент времени агент сравнивает полезности от двух взаимоисключающих действий: остаться в действующей группе, или переключится на другую (в нашем случае для двух фирм — на единственного конкурента).

Полезность i -го агента от переключения:

$$u_i = \mu \cdot g_{-i} - c$$

Находим точку безразличия:

$$\mu \cdot g_{-i} - c = \mu \cdot g_i$$

$$\mu \cdot (g_{-i} - g_i) = c$$

Отсюда видно, что если разрыв Δ в какой-то момент превышает величину $\frac{c}{\mu}$, проигрывающей фирмы, несмотря на издержки переключения, начинают пользоваться услугами (или работать на, зависит от интерпретации) выигрывающей борбю фирмы. Отсюда, задача для фирмы, пытающейся занять весь рынок ставится так: добиться разрыва в $\frac{c}{\mu} + \varepsilon$ на конечном временном горизонте.

Заметим, что такое рассуждение можно обобщить для произвольной «хорошей» функции полезности

$$u_i = \phi(g_i), \quad \phi(\cdot) \in C^2, \quad \frac{df}{dg_i} > 0, \quad \frac{d^2 f}{dg_i^2} < 0, \quad \lim_{g_i \rightarrow 1} \phi(g_i) = +\infty, \quad \lim_{g_i \rightarrow 0} \phi(g_i) = 0$$

В такой постановке для поиска целевой величины разрыва придется решить задачу $\phi(g_{-i}) - \phi(g_i) = c$.

Учитывая, что функция $\phi(\cdot)$ монотонно возрастает на $[0; 1]$ и принимает произвольные значения от 0 до $+\infty$, для любого $c > 0$ найдется разрыв между g_i и g_{-i} достаточно большой, чтобы при подстановке в уравнение краевых значений мы получили тождество. Единственное, что может предотвратить возникновение цикла победителя: удачные начальные условия. Требуемая величина разрыва может не достигаться, поскольку, например, предполагает $|g_i - g_{-i}| = 0.9$, а начальные условия имеют вид $A = 0.1$, $B = 0.1$.

7. Заключение

Рассмотренная модель позволяет явно определить зависимость итогового равновесия от исходных параметров диффузии информации (в том числе, от параметров сети потребителей, их частных функций полезности, количества и конфигурации связей между агентами). Подобный подход позволяет также исследовать различные шоки, происходящие на рынке инновационного товара, выявить оптимальную реакцию на эти возмущения системы.

Естественным продолжением данного исследования станет проверка описанной модели на данных (как на реальных, так и на имитированных различными методиками сетях, в т.ч. случайные графы Эрдеша-Реньи, small-world графы, k-регулярные графы). Из теоретических расширений можно выделить следующие:

1. Рекламный параметр p , который в модели вводился как заданный и постоянный можно определять в каждый момент времени *внутри* модели, например, с помощью рекламной модели Видаля-Вольфа.
2. Видится интересным рассмотрение и влияния непредусмотренных внешних шоков на параметры p_i, q , происходящих в некоторый момент времени t_* между началом взаимодействия и его завершением, как с закреплением на новом значении, так и с возвратом на исходную магистраль (в последнем случае хочется уметь оценивать влияние такого возмущения на итоговое равновесие).
3. Также естественным расширением может стать решение задачи в общем виде, для n фирм (хотя, если не вдаваться в детали, можно предположить, что существующие на рынке на момент входа фирмы представляют из себя единое целое и анализировать при помощи частного случая модели $n = 2$).
4. Отдельный интерес представляет определение критерия, относительно которого в каждом конкретном приложении стоит строить *исходное выигрышное множество*. Разумеется, они могут быть намного сложнее, чем тривиальная «половина доступного рынка».

5. Остается открытым вопрос оптимального решения задачи рыночной борьбы с учетом начальных условий и *издержек* фирм, теоретико-игровые и поведенческие аспекты взаимодействия фирм (коммитменты, теория сигналов).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование, — Успехи Физических Наук, том 8, с. 13-34. — 1928
2. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций — Проблемы кибернетики, вып. 25 - М.: Наука, 1972, с. 101 - 106
3. Arnold V. I. Catastrophe Theory,— 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag. — 1992
4. F. M. Bass A New Product Growth for Model Consumer Durables, — Management Science, Vol. 15, No. 5, Theory Series, pp. 215-227, January 1969
5. Griliches Z. Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change, — Econometrica, Vol. 25, No. 4 , pp. 501-522, — October 1957
6. Satoh D. A Discrete Bass Model and Its Parameter Estimation, — Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, №1.— March 2001.
7. Vidale, M.L. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising, — M.L. Vidale, H.B. Wolfe, — Operations Research — № 5 — pp. 370 — 381, 1957

REFERENCES

1. Volterra V. Mathematical theory of the struggle for existence, — Successes of Physical Sciences, volume 8, p. 13-34. — 1928
2. Kolmogorov A.N. Qualitative study of mathematical models of populations — Problems of cybernetics, no. 25 - M.: Nauka, 1972, p. 101 - 106
3. Arnold V. I. Catastrophe Theory,— 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag. — 1992
4. F. M. Bass A New Product Growth for Model Consumer Durables, — Management Science, Vol. 15, No. 5, Theory Series, pp. 215-227, January 1969
5. Griliches Z. Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change, — Econometrica, Vol. 25, No. 4 , pp. 501-522, — October 1957
6. Satoh D. A Discrete Bass Model and Its Parameter Estimation, — Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, №1.— March 2001.
7. Vidale, M.L. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising, — M.L. Vidale, H.B. Wolfe, — Operations Research — № 5 — pp. 370 — 381, 1957

Получено 3.04.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.