ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-136-152

Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В 2012 году Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед определили двупараметрическое (k,a)-обобщенное преобразование Фурье, действующее в пространствах с весом $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a>0$, где $v_k(x)$ — вес Данкля. Наиболее интересны случаи $a=2$ и $a=1$. При $a=2$ обобщенное преобразование Фурье совпадает с преобразованием Данкля и оно хорошо изучено. В случае $a=1$ гармонический анализ, важный, в частности, в задачах квантовой механики, изучен пока еще не достаточно. Одним из существенных элементов гармонического анализа является ограниченный оператор сдвига, позволяющий определить свертку и структурные характеристики функций. При $a=1$ имеется оператор сдвига τ^y. Его L^p-ограниченность установлена Салемом Бен Саидом и Делеавалом, но только на радиальных функциях и при $1\leqslant p\leqslant 2$. Ранее при $a=1$ мы предложили новый положительный оператор обобщенного сдвига $T^tf(x)$, $t\in\mathbb{R}_+$, $x\in\mathbb{R}^d$, и доказали его L^p-ограниченность по x. В настоящей работе доказана его L^p-ограниченность по t. Для оператора сдвига τ^y, L^p-ограниченность на радиальных функциях установлена и для $2<p<\infty$. С помощью оператора T^t определена свертка и для нее доказано неравенство Юнга. Для $(k,1)$-обобщенных средних, определяемых с помощью свертки, установлены достаточные условия L^p-сходимости и сходимости почти всюду. Выполнение этих условий проверено для аналогов классических методов суммирования Гаусса-Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера – Рисса.

Ключевые слова: $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье, положительный оператор сдвига.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, с. 136–152.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-136-152

Properties and application of a positive translation operator for $(k,1)$-Generalized Fourier transform[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In 2012, Salem Ben Saïd, Kobayashi, and Orsted defined the two-parametric (k,a)-generalized Fourier transform, acting in the space with weight $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a>0$, where $v_k(x)$ is the Dunkl weight. The most interesting cases are $a=2$ and $a=1$. For $a=2$ the generalized Fourier transform coincides with the Dunkl transform and it is well studied. In case $a=1$ harmonic analysis, which is important, in particular, in problems of quantum mechanics, has not yet been sufficiently studied. One of the essential elements of harmonic analysis is the bounded translation operator, which allows one to determine the convolution and structural characteristics of functions. For $a=1$, there is a translation operator τ^y. Its L^p-boundedness was recently established by Salem Ben Saïd and Deleaval, but only on radial functions and for $1\leqslant p\leqslant 2$. Earlier, we proposed for $a=1$ a new positive generalized translation operator and proved that it is L^p -bounded in x. In this paper, it is proved that it is L^p -bounded in t. For the translation operator τ^y, L^p-boundedness on radial functions is established for $2<p<\infty$. The operator T^t is used to define a convolution and to prove Young's inequality. For $(k,1)$-generalized means defined by convolution, sufficient conditions for L^p-convergence and convergence almost everywhere are established. The fulfillment of these conditions is verified for analogues of the classical summation methods of Gauss–Weierstrass, Poisson, Bochner–Riesz.

Keywords: $(k,1)$-generalized Fourier transform, Riesz potential.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2021, "Properties and application of a positive translation operator for $(k,1)$-Generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 136–152.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, Δ — оператор Лапласа,

$$\mathcal{F}(y)=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dx$$

— преобразование Фурье

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

Одним из обобщений преобразования Фурье стало преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ [1], определяемое с помощью системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$, группы отражений $G \subset O(d)$ и функции кратности $k\colon R \to \mathbb{R}$, инвариантной относительно G. Здесь G — конечная группа, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha\colon \alpha \in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$. Роль оператора Лапласа в гармоническом анализе Данкля играет дифференциально-разностный оператор Δ_k, называемый лапласианом Данкля [2]. Для $k \equiv 0$, $\Delta_k = \Delta$. Лапласиан Данкля позволяет записать гармонический осциллятор Данкля $\Delta_k - |x|^2$ и преобразование Данкля в спектральной форме

$$\mathcal{F}_k = \exp\Big(\frac{i\pi}{4}\,\big(d + \sum_{\alpha \in R} k(\alpha)\big)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{4}\big(\Delta_k - |x|^2\big)\Big).$$

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в [3]. Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед [3] определили a-деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двупараметрическое семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, d\mu_{k,a}(x)\bigg)^{1/p}, \quad p = 2,$$

названное (k, a)-обобщенным преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,(2\lambda_k + a)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big). \tag{1}$$

Здесь

$$\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \langle k\rangle, \qquad \langle k\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R} k(\alpha),$$

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a}v_{k,a}(x)\,dx, \qquad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2}v_k(x),$$

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle \alpha, x\rangle|^{k(\alpha)}, \qquad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a}v_{k,a}(x)\,dx.$$

Число $d_{k,a} = 2\lambda_k + a = d + 2\langle k\rangle + a - 2$ называют обобщенной размерностью пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $|x|^{a-2}v_{k,a}(x)$.

Если $a = 2$, то (1) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (1) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (1) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье. Они могут найти применение в разных задачах. Например, при $a = 1$ и $k \equiv 0$ деформированное преобразование Данкля является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы $O(N + 1, 2)$ [4].

В гармоническом анализе и теории приближений большую роль играет оператор сдвига, так как он позволяет определить свертку и структурные характеристики функций. В гармоническом анализе Фурье оператор сдвига имеет вид $\tau^y f(x) = f(x + y)$. В гармоническом анализе Данкля оператор сдвига τ^y был определен Реслер для функций из $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,2})$ [5]. В этих пространствах он является ограниченным линейным оператором. Но его ограниченность в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,2})$, $p \neq 2$, доказана только для группы отражений $G = \mathbb{Z}_2^d$. Основная трудность состоит в том, что τ^y не является положительным оператором. Реслер [6] показала, что среднее значение τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\, d\sigma_k(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$— евклидова сфера, а $d\sigma_k(y') = a_k v_k(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере, является положительным оператором. Опираясь на этот факт, в [7] доказана L^p-ограниченность оператора T^t для всех $1 \leqslant p < \infty$. Таким образом, его можно использовать как ограниченный оператор сдвига. Если $k \equiv 0$, то оператор T^t совпадает с оператором среднего значения по сфере и имеет широкое применение.

Следующий важный случай обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ при $a = 1$. Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$, ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, определен Салемом Бен Саидом и Делеавалом [8], (см. также [9]). Они доказали, что на радиальных функциях оператор τ^y положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Нами в [10] при $\lambda_k > 0$ определен ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\,d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $d\sigma_{k,1}(y') = a_{k,1} v_{k,1}(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере. В [10] доказано, что оператор T^t (2) положительный и на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ допускает представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,d\sigma^k_{t,x}(\xi), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

с вероятностной мерой $d\sigma^k_{t,x}$ и, что он может быть распространен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с выполнением неравенства

$$\|T^t f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \tag{4}$$

где под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ понимается пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$.

Пусть $r \in \mathbb{R}_+$, $a > 0$, $2\lambda + a - 1 \geqslant 0$,

$$d\nu_{\lambda,a}(r) = b_{\lambda,a} r^{2\lambda+a-1}\,dr, \quad b_{\lambda,a}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r^a/a} r^{2\lambda+a-1}\,dr = a^{2\lambda/a}\Gamma(2\lambda/a+1),$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, — банахово пространство измеримых по Лебегу функций с нормой $\|f\|^p_{p,d\nu_{\lambda,a}} = \int_0^\infty |f|^p\,d\nu_{\lambda,a}$, $L^\infty(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda,a}) = C_b(\mathbb{R}_+)$.

Наша цель — при $a = 1$ провести дальнейшее исследование свойств положительного оператора сдвига и указать его применение. Мы докажем неравенство

$$\|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{5}$$

Аналогичное неравенство в анализе Данкля ($a = 2$) было установлено в [7]. Для оператора сдвига τ^y на радиальных функциях L^p-ограниченность установим и для $2 < p < \infty$. С помощью оператора T^t определим свертку и для нее докажем неравенство Юнга. Что позволит вместе с L^p-ограниченностью максимальной функции Харди–Литтлвуда [8] исследовать условия сходимости $(k, 1)$-обобщенных средних Гаусса-Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и почти всюду.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если $A \leq CB$ с константой $C > 0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A \asymp B$, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$. Как обычно, для $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E.

2. Элементы обобщенного гармонического анализа и операторы сдвига

Гармонический анализ Данкля, в частности, строится с помощью дифференциально-разностных операторов

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} k(a)\langle a, e_j\rangle \, \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x\rangle}, \quad j = 1, \dots, d,$$

где R_+ — положительная подсистема системы корней R, а $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. А также лапласиана Данкля

$$\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^{d} T_j^2 f(x).$$

При $k \equiv 0$, Δ_k — оператор Лапласа Δ. Для радиальных функций

$$\Delta_k f(x) = \Delta f(x) + 2\sum_{a\in R_+} k(a)\frac{\langle \nabla f(x), a\rangle}{\langle a, x\rangle},$$

где $\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$.

В гармоническом анализе Данкля построен положительный оператор сплетения V_k, для которого

$$TjV_k f(x) = V_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для него получено представление

$$V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, d\mu_x^k(\xi)$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты $O^x = \{gx\colon g\in G\}$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [2].

Пусть $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода и порядка $\alpha \geqslant -1/2$,

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)(-1)^j z^{2j}}{2^{2j} j!\Gamma(j+\alpha+1)} \tag{6}$$

— нормированная функция Бесселя. Для нее $|j_\alpha(z)| \leqslant 1$.

В дальнейшем будем считать, что выполнено условие $\lambda_k > 0$. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье (1) определяется как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y) f(y)\, d\mu_{k,1}(y) \tag{7}$$

с непрерывным ядром

$$B_k(x,y) = V_k(j_{\lambda_k - 1/2}(\sqrt{|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}))(y'), \quad x = |x|x',\ y = |y|y', \tag{8}$$

для которого в силу представления (8)

$$|B_k(x,y)| \leqslant 1, \quad B_k(0,y) = 1, \quad |x|\Delta_k^x B_k(x,y) = -|y| B_k(x,y), \tag{9}$$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, ty')\, d\sigma_{k,1}(y') = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|x|}). \tag{10}$$

Обобщенное преобразование Фурье — изометрия пространства $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и $\mathcal{F}_{k,1}^2 = Id$.

Если $f \in \mathcal{A} = \{f\colon f, \mathcal{F}_{k,1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\}$, то равенство (6) справедливо поточечно. Справедливо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$.

Основные факты об обобщенном преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{k,1}$ можно найти в [3].

Оператор сдвига в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье определяется как интегральный оператор

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi) B_k(y,\xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_{k,1}(\xi). \tag{11}$$

В силу (9) норма оператора τ^y в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ равна 1. Если $f \in \mathcal{A}$ равенство (11) справедливо поточечно.

Для оператора τ^y на радиальных функциях $f(x) = f_0(|x|) \in \mathcal{A}$ в [8] получено представление

$$\tau^y f(x) = \frac{\Gamma(\lambda_k+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_k)} V_k\Big(\int_{-1}^1 f_0\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}u\Big)(1-u^2)^{\lambda_k-1}\, du\Big)(y'), \tag{12}$$

где $x = |x|x'$, $y = |y|y'$. В [8] для радиальных функций из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, доказано неравенство

$$\|\tau^y f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{13}$$

В $C_b(\mathbb{R}^d)$ $(p=\infty)$ оно вытекает из (12).

Для функций из класса $\mathcal{A}$ оператор сдвига T^t определен равенством (2). В силу (10) он может быть записан как интегральный оператор

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi) j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_{k,1}(\xi). \tag{14}$$

Он также действует в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и его норма равна 1. Для функций из класса $\mathcal{A}$ равенство (14) выполняется поточечно. Из (14) также вытекает

$$\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)(\xi) = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi).$$

3. Свойства положительного оператора сдвига

Определим a-деформированное преобразование Ганкеля

$$\mathcal{H}_{\lambda_k,a}(g_0)(\rho) = \int_0^\infty g_0(r) j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\, d\nu_{\lambda_k,a}(r), \quad \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Преобразование Ганкеля является унитарным оператором в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k,a})$ и для радиальных функций позволяет записать (k,a)-обобщенное преобразование Фурье [3]. Если $g(x) = g_0(r)$, $r = |x|$, $\rho = |y|$, то

$$\mathcal{F}_{k,a}(g)(y) = (\mathcal{F}_{k,a}(g))_0(\rho),\ (\mathcal{F}_{k,a}(g))_0(\rho) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}(g_0)(\rho),\ \|g\|_{p,d\mu_{k,a}} = \|g_0\|_{p,d\nu_{\lambda_k,a}}.$$

С помощью операторов T^t и τ^x определим две свертки

$$(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t), \tag{15}$$

$$(f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x g(y)\,d\mu_{k,1}(y). \tag{16}$$

Свертка (16) была определена в [8], где для нее было доказано неравенство

$$\|(f *_k g)\|_{p,d\mu_{k,1}} \le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \|g\|_{1,d\mu_{k,1}} \tag{17}$$

в предположении, что $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \le p \le \infty$, и радиальная функция $g \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и ограничена.

Лемма 1. Если $f \in \mathcal{A}$, $g_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k,1})$, $g(y) = g_0(|y|)$, то для $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = (f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(y)\,d\mu_{k,1}(y), \tag{18}$$

$$\mathcal{F}_k(f *_{\lambda_k} g_0)(y) = \mathcal{F}_k(f *_k g)(y) = \mathcal{F}_k(f)(y)\mathcal{F}_k(g)(y). \tag{19}$$

Доказательство. Применяя (7) и (14), получим

$$\begin{aligned}(f *_{\lambda_k} g_0)(x) &= \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|y|}) B_k(x,y)\mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\,d\mu_{k,1}(y) g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y)\mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\mathcal{F}_{k,1}(g)(y)\,d\mu_{k,1}(y),\end{aligned}$$

поэтому

$$\mathcal{F}_{k,1}(f *_{\lambda_k} g_0)(y) = \mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\mathcal{F}_{k,1}(g)(y).$$

Второе равенство в (19) для свертки (15) доказано. Докажем равенство сверток (15) и (16) сначала для $g \in \mathcal{A}$. Действительно, в силу (11) и (7)

$$\begin{aligned}(f *_k g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x g(y)\,d\mu_{k,1}(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} B_k(y,z)B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\,d\mu_{k,1}(z)\,d\mu_{k,1}(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\,d\mu_{k,1}(z).\end{aligned}$$

Случай $g \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ получается предельным переходом.

Наконец, применяя (11), получим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(y)\,d\mu_{k,1}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \int_{\mathbb{R}^d} B_k(y,z)B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\,d\mu_{k,1}(z)\,d\mu_{k,1}(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\,d\mu_{k,1}(z).\end{aligned}$$

Второе равенство в (18) и лемма 1 в целом доказаны.

Теорема 1. Если $1 \le p \le \infty$, то для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$

$$\|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}} \le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Доказательство. Для заданного $x \in \mathbb{R}^d$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ определим оператор

$$(B^x f)(t) = T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|y|}) B_k(x,y)\mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

Если $p=2$, то

$$T^tf(x)=\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t\rho})\int_{\mathbb{S}^{d-1}}B_k(x,\rho y')\mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')\,d\sigma_{k,1}(y')\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)$$

и

$$\mathcal{H}_{\lambda_k,1}(T^{(\cdot)}f(x))(\rho)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}B_k(x,\rho y')\mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')\,d\sigma_{k,1}(y').$$

Учитывая унитарность операторов $\mathcal{H}_{\lambda_k,1}$, $\mathcal{F}_{k,1}$, и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}\|T^tf(x)\|^2_{2,d\nu_{\lambda_k,1}}&=\|\mathcal{H}_{\lambda_k,1}(T^{(\cdot)}f(x))(\rho)\|^2_{2,d\nu_{\lambda_k,1}}\\&=\int_0^\infty\Big|\int_{\mathbb{S}^{d-1}}B_k(x,\rho y')\mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')\,d\sigma_{k,1}(y')\Big|^2\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\\&\le\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')|^2\,d\sigma_{k,1}(y')\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\\&=\|\mathcal{F}_{k,1}(f)\|^2_{2,d\mu_{k,1}}=\|f\|^2_{2,d\mu_{k,1}}.\end{aligned}$$

Неравенство (5) при $p=2$ и $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ доказано. В силу плотности $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ оно справедливо на всем пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$.

Пусть $p=1$. Применяя оценку (13) при $p=\infty$, получим

$$\begin{aligned}\|T^tf(x)\|_{1,d\nu_{\lambda_k,1}}&=\sup\Big\{\int_0^\infty T^tf(x)g_0(t)\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\colon g_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_+),\ \|g_0\|_\infty\le1\Big\}\\&=\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\tau^xg(y)\,d\mu_{k,1}(y)\colon g\in\mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_\infty\le1\Big\}\\&\le\|f\|_{1,d\mu_{k,1}}\sup\big\{\|\tau^xg(y)\|_\infty\colon g\in\mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_\infty\le1\big\}\le\|f\|_{1,d\mu_{k,1}}.\end{aligned}$$

Неравенство (5) при $p=1$ и $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ доказано. Оно также может быть распространено на все пространство $L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$.

По интерполяционной теореме Рисса–Торина выведем (5) для $1<p<2$.

Если $2<p<\infty$, то в силу (18) и (13) при $1<p'<2$

$$\begin{aligned}\|T^tf(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}}&=\sup\Big\{\int_0^\infty T^tf(x)g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\colon g_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_+),\ \|g_0\|_{p',d\nu_{\lambda_k,1}}\le1\Big\}\\&=\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\tau^xg(y)\,d\mu_{k,1}(y)\colon g\in\mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_{p',d\mu_{k,1}}\le1\Big\}\\&\le\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\sup\{\|\tau^xg(y)\|_{p',d\mu_{k,1}}\colon g\in\mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_{p',d\mu_{k,1}}\le1\}\\&\le\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.\end{aligned}$$

Неравенство (5) при $2<p<\infty$ и $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ доказано. Оно также может быть распространено на все пространство $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$.

Для $p=\infty$ неравенство (5) вытекает из представления (3). Теорема 1 доказана.

Теперь мы можем доказать неравенство Юнга для сверток (15) and (16).

Теорема 2. Пусть $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge1$ и $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$. Если $f\in\mathcal{A}$ и $g(x)=g_0(|x|)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})\cap C_b(\mathbb{R}^d)$, то

$$\|(f*_{\lambda_k}g_0)\|_{r,d\nu_{2\lambda_k}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}},\tag{20}$$

$$\|(f*_kg)\|_{r,d\mu_{k,1}}\le\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g\|_{q,d\mu_{k,1}}.\tag{21}$$

Доказательство. Согласно равенству (18) достаточно доказать неравенство (20). Пусть $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{\nu}=\frac{1}{q}-\frac{1}{r}$. Тогда $\frac{1}{\mu}\geq 0$, $\frac{1}{\nu}\geq 0$ и $\frac{1}{r}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$. Применяя неравенство Гельдера и (19), получим

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^\infty T^tf(x)g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\Big| &\leq \Big(\int_0^\infty |T^tf(x)|^p|g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/r}\\ &\times \Big(\int_0^\infty |T^tf(x)|^p\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/\mu}\Big(\int_0^\infty |g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/\nu}\\ &\leq \Big(\int_0^\infty |T^tf(x)|^p|g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/r}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{p/\mu}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}^{q/\nu}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4)

$$\begin{aligned}\|(f*_{\lambda_k}g_0)\|_{r,d\nu_{2\lambda_k}} &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |T^tf(x)|^p|g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\,d\mu_{k,1}(x)\Big)^{1/r}\\ &\times \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{p/\mu}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}^{q/\nu} \leq \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}.\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что неравенство (20) справедливо, если $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, а $g(x)=g_0(|x|)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ и ограничена, причем для всех таких функций свертки $(f*_{\lambda_k}g_0)(x)$ и $(f*_k g)(x)$ совпадают. В частности, при $r=p$, $q=1$ справедлив аналог неравенства (17)

$$\|(f*_{\lambda_k}g_0)\|_{p,d\nu_{2\lambda_k}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g_0\|_{1,d\nu_{2\lambda_k}}. \tag{22}$$

Теорема 3. Если $1\leq p\leq\infty$, то для любого $y\in\mathbb{R}^d$ и любой радиальной функции $g(x)=g_0(|x|)\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$

$$\|\tau^y g\|_{p,d\mu_{k,1}}\leqslant\|g\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{23}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $2<p<\infty$ и $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Применяя неравенство Юнга (21) при $r=\infty$, $p=p'$, $q=p$, получим (23)

$$\begin{aligned}\|\tau^y g\|_{p,d\mu_{k,1}} &= \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d}\tau^y g(x)f(x)\,d\mu_{k,1}(x)\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p',d\mu_{k,1}}\leqslant 1\Big\}\\ &\leqslant \sup\{\|(f*_k g)(y)\|_{\infty,d\mu_{k,1}}\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p',d\mu_{k,1}}\leq 1\}\leqslant\|g\|_{p,d\mu_{k,1}}.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

В этом параграфе использованы методы работы [7].

4. Сходимость $(k,1)$-обобщенных средних

Пусть $\varepsilon>0$, $C_0(\mathbb{R}^d)$ — подпространство функций $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$, для которых $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, радиальные функции $\varphi,\widehat{\varphi}=\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})\cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(x)=\varphi_0(r)$, $r=|x|$, $\widehat{\varphi}(y)=\widehat{\varphi}_0(\rho)$, $\rho=|y|$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\mathcal{F}_{k,1}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\varepsilon^{-d_{k,1}}\widehat{\varphi}\Big(\varepsilon^{-1}y\Big),\quad \widehat{\varphi}_\varepsilon\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})\cap C_0(\mathbb{R}^d),\quad \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,1}=1.$$

В соответствии с замечанием 1 для $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, мы можем определить $(k,1)$-обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon f(x)=(f*_{\lambda_k}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0)(x)=(f*_k\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$$

$$= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

В силу (17), (22)

$$\|\Phi_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0\|_{1,d\nu_{\lambda_{k,1}}} \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{24}$$

Исследуем L^p-сходимость и сходимость почти всюду $(k,1)$-обобщенных средних. Пусть

$$\omega(\delta, f)_p = \sup_{0\leqslant t\leqslant \delta} \|T^t f - f\|_{p,d\mu_{k,1}}$$

– модуль непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В этом параграфе под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ мы понимаем $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $\omega(\delta, f)_p \leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}$,

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, f)_p = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Применяя (4), получим $\|T^t f - f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}$, откуда $\omega(\delta, f)_p \leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}$. В силу (4) равенство (25) можно доказывать для функций из плотного множества $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Так как для нормированной функции Бесселя (6)

$$j_\alpha'(z) = -\frac{z}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(z) \tag{26}$$

[11, глава V], то $|j_\alpha(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{2(\alpha+1)}$ и из (14)

$$|T^t f(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) - 1||\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)|\, d\mu_{k,1}(\xi)$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{t}}{d_{k,1}} \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{|\xi|}|\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)|\, d\mu_{k,1} = c_1(f)\sqrt{t}.$$

Равенство (25) при $p = \infty$ доказано.

Пусть $R \geqslant 1$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d\colon |x| \leqslant R\}$, $CB_R = \mathbb{R}^d \setminus B_R$. Напомним, что $d_{k,1} = 2\lambda_k + 1 = d + 2\langle k\rangle - 1$. Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $x \in CB_R$ в [10] доказана оценка $|T^t f(x)| \leqslant c_2(f)|x|^{-(d_{k,1}+1)}$. Равенство (25) при $p < \infty$ вытекает из неравенства

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T^t f(x) - f(x)|^p\, d\mu_{k,1} \leqslant (c_1(f)\sqrt{t})^p \int_{B_R} d\mu_{k,1}$$
$$+ (2c_2(f))^p \int_{CB_R} |x|^{-p(d_{k,1}+1)}\, d\mu_{k,1} + 2^p \int_{CB_R} |f(x)|^p\, d\mu_{k,1}.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. Пусть радиальные функции $\varphi, \widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,1}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$, то

$$\|f(x) - \Phi_\varepsilon f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0 \ (\varepsilon \to 0).$$

Доказательство. Учитывая (24) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 4 достаточно доказывать на плотном множестве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\Phi_\varepsilon f(x) = \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_0^\infty T^{\varepsilon t} f(x)\widehat{\varphi}_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\|f(x)-\Phi_\varepsilon f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} &= \Big\|\int_0^\infty (T^{\varepsilon t}f(x)-f(x))\widehat{\varphi}_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\Big\|_{p,d\mu_{k,1}}\\ &\leqslant \int_0^\infty \|T^{\varepsilon t}f(x)-f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}|\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &\leqslant \int_0^\infty \omega(\varepsilon t,f)_p|\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t).\end{aligned}$$

Утверждение теоремы 4 вытекает из леммы 2 и оценки

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \omega(\varepsilon t,f)_p\widehat{\varphi}_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t) \leqslant \omega(\varepsilon R,f)_p &\int_0^\infty |\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &+2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\int_R^\infty |\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t).\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Для исследования сходимости почти всюду нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда. Для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье максимальная функция $\mathcal{M}_{k,1}f$ была определена в [8]. Если $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то

$$\mathcal{M}_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x\chi_{B_r}(y)d\mu_{k,1}(y)\right|}{\int_{B_r} d\mu_{k,1}(y)},$$

По замечанию 1

$$\mathcal{M}_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{\left|\int_0^r T^tf(x)d\nu_{\lambda_k,1}(t)\right|}{\int_0^r d\nu_{\lambda_k,1}(t)}=\sup_{r>0}\frac{\left|\int_0^r T^tf(x)t^{2\lambda_k}dt\right|}{\int_0^r t^{2\lambda_k}dt}.$$

Лемма 3. Если $|(\widehat{\varphi})_0(t)|\lesssim(1+t)^{-(d_{k,1}+1/2)}$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p<\infty$, то

$$\sup_{\varepsilon>0}|(f*_{\lambda_k}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0)(x)|=\sup_{\varepsilon>0}|(f*_k\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)|\lesssim\mathcal{M}_{k,1}|f|(x).$$

Доказательство. Так как T^t — положительный оператор, то

$$|(f*_{\lambda_k}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0)(x)|\leqslant|(|f|*_{\lambda_k}(|\widehat{\varphi}_\varepsilon|)_0)(x)|,\quad \mathcal{M}_{k,1}f(x)\leqslant\mathcal{M}_{k,1}|f|(x)$$

и мы можем считать, что $f(x),(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\geqslant 0$.

Используя разложение

$$(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\chi_{\varepsilon 2^j\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)$$

и равенство $(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)=\varepsilon^{-d_{k,1}}(\widehat{\varphi})_0(\varepsilon^{-1}t)$, получим

$$\int_0^\infty T^tf(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty T^tf(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\chi_{\varepsilon 2^j\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)$$

$$\lesssim\sum_{j=-\infty}^{\infty}(1+2^j)^{-1/2}\Big(\frac{2^j}{1+2^j}\Big)^{d_{k,1}}\frac{\int_0^\infty T^tf(x)\chi_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)}{\int_0^\infty\chi_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)}\lesssim\mathcal{M}_{k,1}f(x).$$

Лемма 3 доказана.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathcal{M}_{k,1}f$ справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$ [8], поэтому в условиях леммы 3 для оператора $\sup_{\varepsilon>0}|(f *_k \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)|$ также справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$. Кроме этого для средних $(f *_k \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$ есть равномерная сходимость на $C_0(\mathbb{R})$, плотном в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$. Следовательно по теореме 2.1.14 из [12] справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть радиальные функции $\varphi, \widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,1}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = 1$, $|(\widehat{\varphi})_0(t)| \lesssim (1+t)^{-(d_{k,1}+1/2)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$, то $\Phi_\varepsilon f(x) \to f(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ почти всюду.

5. Сходимость средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса

Применим результаты предыдущего параграфа для $(k,1)$-аналогов классических средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса.

Пусть $R, a > 0$. Определим (k,a)-обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса $W_{R,a}f(x)$ при помощи положительного обобщенного радиального мультипликатора Гаусса $w_a(x) = e^{-|x|^a/a}$

$$\mathcal{F}_{k,a}(W_{R,a}f)(y) = w_a\Big(\frac{y}{R}\Big)\mathcal{F}_{k,a}(f)(y).$$

Так как $|w_a(x)| \leqslant 1$, то $W_{R,a}f$ — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$:

$$\|W_{R,a}f\|_{2,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{2,d\mu_{k,a}}.$$

Для мультипликатора $w_a(x) = (w_a)_0(r)$, $r = |x|$, $\rho = |y|$, вычислим (k,a)-обобщенное преобразование Фурье

$$\widehat{w}_a(y) = \mathcal{F}_{k,a}(w_a)(y) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}((w_a)_0)(\rho) = \int_0^\infty e^{-r^a/a} j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\,d\nu_{\lambda_k,a}(r).$$

Делая замену переменной $t = r^a$ и применяя (6), [13, стр.33, формула 10], получим

$$\widehat{w}_a(y) = \frac{2}{a\rho^{\lambda_k}}\int_0^\infty e^{-t^2/a} J_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}\rho^{a/2}t\Big)t^{2\lambda_k/a+1}\,dt = e^{-\rho^a/a} = w_{0,a}(\rho) = w_a(y).$$

Отметим, что

$$\widehat{w}_a \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a}) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{w}_a^R(y)\,d\mu_{k,a}(y) = 1,$$

$$\mathcal{F}_{k,a}\Big(w_a\Big(\frac{(\cdot)}{R}\Big)\Big)(y) = R^{d_{k,a}}\widehat{w}_a(Ry) = \widehat{w}_a^R(y). \tag{27}$$

Если $a = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то в силу замечания 1 $(k,1)$-обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса имеют вид

$$W_{R,1}f(x) = (f *_{\lambda_k} (\widehat{w}_1^R)_0)(x) = (f *_k \widehat{w}_1^R)(x)$$
$$= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{w}_1^R)_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x \widehat{w}_1^R(y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

Согласно (17), (22)

$$\|W_{R,1}f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Для $(k,1)$-обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса в силу (27) выполнены условия теорем 4, 5, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p=\infty$, то

$$\|f(x) - W_{R,1}f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0, \quad (R \to \infty).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $W_{R,1}f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$ почти всюду.

Определим (k,a)-обобщенные средние Пуассона $P_{R,a}f(x)$ при помощи положительного обобщенного радиального мультипликатора Гаусса $p_a(x) = e^{-|x|^{a/2}}$

$$\mathcal{F}_{k,a}(P_{R,a}f)(y) = p_a\Big(\frac{y}{R}\Big)\mathcal{F}_{k,a}(f)(y).$$

Так как $|p_a(x)| \leqslant 1$, то $P_{R,a}f$ — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$:

$$\|P_{R,a}f\|_{2,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{2,d\mu_{k,a}}.$$

Для мультипликатора $p_a(x) = (p_a)_0(r)$, $r = |x|$, вычислим (k,a)-обобщенное преобразование Фурье

$$\widehat{p}_a(y) = \mathcal{F}_{k,a}(p_a)(y) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}((p_a)_0)(\rho) = \int_0^\infty e^{-r^{a/2}} j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\, d\nu_{\lambda_k,a}(r),\ \ \rho = |y|.$$

Делая замену переменной $t = r^{a/2}$ и применяя (6), [13, стр.32, формула 4], получим

$$\widehat{p}_a(y) = \frac{2}{a\rho^{\lambda_k}} \int_0^\infty e^{-t} J_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho)^{a/2}t\Big) t^{2\lambda_k/a+1}\, dt = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-1}\Gamma\Big(\frac{2\lambda_k}{a} + \frac{3}{2}\Big)}{\Big(\frac{a^2}{4} + \rho^a\Big)^{\frac{2\lambda_k}{a}+\frac{3}{2}}}.$$

Отметим, что

$$\widehat{p}_a \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a}) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{F}_{k,a}\Big(p_a\Big(\frac{(\cdot)}{R}\Big)\Big)(y) = R^{d_{k,a}}\widehat{p}_a(Ry) = \widehat{p}_a^R(y),$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{p}_a^R(y)\, d\mu_{k,a}(y) = 1, \quad (\widehat{p}_a)_0(\rho) \asymp \frac{1}{(1+\rho)^{d_{k,a}+a/2}}. \tag{28}$$

Если $a=1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то в силу замечания 1 $(k,1)$-обобщенные средние Пуассона имеют вид

$$P_{R,1}f(x) = (f *_{\lambda_k} (\widehat{p}_1^R)_0)(x) = (f *_k \widehat{p}_1^R)(x)$$
$$= \int_0^\infty T^t f(x) (\widehat{p}_1^R)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x \widehat{p}_1^R(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

Согласно (17), (22)

$$\|P_{R,1}f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Для $(k,1)$-обобщенных средних Пуассона в силу (28) выполнены условия теорем 4, 5, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p=\infty$, то

$$\|f(x) - P_{R,1}f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0, \quad (R \to \infty).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $P_{R,1}f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$ почти всюду.

Пусть $\delta > 0$,

$$s_a(x) = \begin{cases} (1-|x|^a)^\delta, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Определим (k,a)-обобщенные средние Бохнера-Рисса $S^\delta_{R,a}f$ порядка δ при помощи мультипликатора $s_a(x)$:

$$\mathcal{F}_{k,a}(S^\delta_{R,a}f)(y) = s_a\Big(\frac{y}{R}\Big)\mathcal{F}_{k,a}(f)(y).$$

Так как $|s_a(x)| \leqslant 1$, то $S^\delta_{R,a}f$ — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$:

$$\|S^\delta_{R,a}f\|_{2,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{2,d\mu_{k,a}}.$$

Для мультипликатора $s_a(x) = (s_a)_0(r)$, $r = |x|$, вычислим (k,a)-обобщенное преобразование Фурье

$$\widehat{s}_a(y) = \mathcal{F}_{k,a}(s_a)(y) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}((s_a)_0)(\rho) = \int_0^1 (1-r^a)^\delta j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\,d\nu_{\lambda_k,a}(r),\ \ \rho = |y|.$$

Применяя разложение (6), получим

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_a(y) &= b_{\lambda_k,a}\sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(2\lambda_k/a+1)(-1)^j(\rho^a/a^2)^j}{j!\Gamma(j+2\lambda_k/a+1)}\int_0^1 r^{aj+2\lambda_k+a-1}(1-r^a)^\delta\,dr \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1)}{a^{2\lambda_k/a+1}}\sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j(2\rho^{a/2}/a)^{2j}}{2^{2j}j!\Gamma(2\lambda_k/a+\delta+j+2)} \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1)}{a^{2\lambda_k/a+1}\Gamma(2\lambda_k/a+\delta+2)} j_{2\lambda_k/a+\delta+1}\Big(\frac{2}{a}\rho^{a/2}\Big).
\end{aligned}$$

Так как при $\alpha \geqslant -1/2$, $\rho \to \infty$ (см. [11, глава V]):

$$\rho^{\alpha+1/2}j_\alpha(\rho) = A_\alpha\left(\cos(\rho - a_\alpha) + O(|\rho|^{-1})\right),$$

где

$$A_\alpha = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}, \quad a_\alpha = \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2},$$

то $\widehat{s}_a(y) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ тогда и только тогда, когда $\delta > \frac{2\lambda_k}{a} + \frac{1}{2} = \frac{d_{k,a}}{a} - \frac{1}{2}$. Число

$$\delta_{k,a} = \frac{d_{k,a}}{a} - \frac{1}{2}$$

назовем критическим показателем.

Отметим, что при $\delta > \delta_{k,a}$,

$$\widehat{s}_a(y) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a}) \cap C_b(\mathbb{R}^d),\ \widehat{s}_a^R(y) = R^{d_{k,a}}\mathcal{F}_{k,a}(s_a)(Ry),\ \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{s}_a^R(y)\,d\mu_{k,a}(y) = 1. \tag{29}$$

Если $a = 1$, $\delta > \delta_{k,1}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то в силу замечания 1 $(k,1)$-обобщенные средние Бохнера–Рисса имеют вид

$$S^\delta_{R,1}f(x) = (f *_{\lambda_k} (\widehat{s}_1^R)_0)(x) = (f *_k \widehat{s}_1^R)(x)$$

$$= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{s}_1^R)_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x\widehat{s}_1^R(y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

При $\delta \geqslant d_{k,1} + 1/2 = \delta_{k,1} + 1$ выполнена оценка

$$|(\widehat{s}_1)_0(t)| \lesssim (1+t)^{-(d_{k,1}+1/2)} \tag{30}$$

Из теорем 4, 5 и (29), (30) вытекает утверждение.

Теорема 8. Если $\delta > \delta_{k,1}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$, то

$$\|f(x) - S_{R,1}^{\delta} f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0, \quad (R \to \infty).$$

Если $\delta \geqslant \delta_{k,1} + 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $S_{R,1}^{\delta} f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$ почти всюду.

При $a = 2$ аналоги результатов этого и предыдущего параграфов установлены в [14]. Мы, в частности, используем методы этой статьи.

6. Заключение

Сходимость почти всюду средних Бохнера–Рисса при $a = 1$ установлена только при условии $\delta \geqslant \delta_{k,1} + 1$, где $\delta_{k,1} = d_{k,1} - 1/2$ — критический показатель. Есть предположение, что правильное условие $\delta > \delta_{k,1}$. Критический показатель при $a = 2$ равен $\delta_{k,2} = (d_{k,2} - 1)/2$ и сходимость почти всюду средних Бохнера–Рисса при $a = 2$ установлена в [14] также с люфтом $\delta \geqslant \delta_{k,2} + 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

3. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

4. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p;q)$ // Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. Vol. 212, no. 1000.

5. Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192. P. 519–542.

6. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355. P. 2413–2438.

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

8. Salem Ben Saïd, Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k,1)$-generalized Fourier transform // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // International Mathematics Research Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.

10. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для (k, 1)-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 85–96.

11. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

12. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы. М.: Наука, 1970.

14. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.

REFERENCES

1. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups" , *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

2. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , Lecture Notes in Math., *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

3. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

4. Kobayashi T., Mano G., 2011, "The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p;q)$" , *Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, vol. 212, no. 1000.

5. Rösler M., 1998, "Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators" , *Comm. Math. Phys.*, vol. 192, pp. 519–542.

6. Rösler M., 2003, "A positive radial product formula for the Dunkl kernel" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, pp. 2413–2438.

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, "Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications" , *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

8. Salem Ben Saïd, Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k,1)$-generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.

10. Ivanov V. I., 2020, "Bounded translation operator for the (k,1)-generalized Fourier transform" ,*Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

11. Levitan B. M. , Sargsjan I. S., 1975, "Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators" , *Transl. Math. Monogr., 39, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 525 p.

12. Grafacos L., 2008, "Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249" , *New York: Springer Science+Business Media, LLC*, 492 p.

13. Bateman H., Erdélyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms. Vol.2" , *New York, Toronto, London: MC GRAV-HILL Book COMPANY, INC*, 328 p.

14. Thangavelu S., Xu Y., 2005, "Convolution operator and maximal function for Dunkl transform" , *J. d'Analyse. Math.*, vol. 97, pp. 25–55.

Получено 20.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.