ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-114-135

Потенциал Рисса для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом $|x|^{-1}v_k(x)$, где $v_k(x)$ — вес Данкля, действует $(k, 1)$-обобщенное преобразование Фурье. Гармонический анализ в этих пространствах важен, в частности, в задачах квантовой механики. В работе для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье определен потенциал Рисса. Для потенциала Рисса доказано (L^q, L^p)-неравенство с радиальными степенными весами, являющееся аналогом известного неравенства Стейна–Вейса для классического потенциала Рисса. Для потенциала Рисса получено точное значение L^p-нормы с радиальными степенными весами. Точное значение L^p-нормы с радиальными степенными весами для классического потенциала Рисса было получено независимо У. Бекнером и С. Самко.

Ключевые слова: $(k, 1)$-обобщенное преобразование Фурье, потенциал Рисса.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Потенциал Рисса для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, с. 114–135.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-114-135

Riesz potential for $(k,1)$-generalized Fourier transform[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In spaces with weight $|x|^{-1}v_k(x)$, where $v_k(x)$ is the Dunkl weight, there is the $(k,1)$-generalized Fourier transform. Harmonic analysis in these spaces is important, in particular, in problems of quantum mechanics. We define the Riesz potential for the $(k,1)$-generalized Fourier transform and prove for it, a (L^q, L^p)-inequality with radial power weights, which is an analogue of the well-known Stein–Weiss inequality for the classical Riesz potential. For the Riesz potential we calculate the sharp value of the L^p-norm with radial power weights. The sharp value of the L^p-norm with radial power weights for the classical Riesz potential was obtained independently by W. Beckner and S. Samko.

Keywords: $(k,1)$-generalized Fourier transform, Riesz potential.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2021, "Riesz potential for $(k,1)$-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 114–135.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\mathbb{S}^{d-1}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, Δ — оператор Лапласа, $d\mu(x)=(2\pi)^{-d/2}\,dx$ — нормализованная мера Лебега, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1\le p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца,

$$\mathcal{F}(y)=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dx$$

— преобразование Фурье.

Введем обозначение $A\lesssim B$, если $A\le CB$ с константой $C>0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A\asymp B$, если $A\lesssim B$ и $B\lesssim A$. Как обычно, для $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x)=(\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,d\mu(y)=(\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d}\,d\mu(y),\qquad(1)$$

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

где $0<\alpha<d$, $\gamma_\alpha = 2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^y f(x)=f(x+y)$ — оператор сдвига.

Формулы для преобразований Фурье

$$\mathcal{F}(I_\alpha f)=|\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}(f),\quad \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2}f)=|\cdot|^{\alpha}\mathcal{F}(f),$$

указывают, что потенциал Рисса (1) является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

(L^p,L^q)-ограниченность потенциала Рисса с радиальными степенными весами записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha f(x)\big\|_q\le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}f(x)\big\|_p$$

с точной константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Необходимые и достаточные условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ известны.

Теорема A. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $0<\alpha<d$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *конечна тогда и только тогда, когда* $\gamma<\frac{d}{q}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $\alpha\geqslant d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$ *и* $\alpha-\gamma-\beta=d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

Достаточность условий в теореме A была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвудом [1] для $d=1$, С.Л. Соболевым [2] для $d>1$ и $\gamma=\beta=0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом [3] в общем случае. Необходимость условий в теореме A установлена в [4].

При $p=q$ получено точное значение константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d)$ или L^p-нормы потенциала Рисса.

Теорема B. *Если* $d\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $\gamma<\frac{d}{p}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $\alpha>0$, *и* $\gamma=\alpha-\beta$, *то*

$$\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\frac12(\frac{d}{p}-\gamma))\Gamma(\frac12(\frac{d}{p'}-\beta))}{\Gamma(\frac12(\frac{d}{p'}+\gamma))\Gamma(\frac12(\frac{d}{p}+\beta))}.$$

Теорема B была доказана И.У. Хербстом [5] для $\beta=0$ и У. Бекнером [6] и независимо С. Самко [7] в общем случае.

Одним из важных обобщений преобразования Фурье является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [8, 9]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля определили С. Тангавелу и Ю. Шу [10].

Пусть $R\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R, $G(R)\subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a\colon a\in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $\langle a,x\rangle=0$, $k\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G.

Пусть

$$v_k(x)=\prod_{a\in R_+}|\langle a,x\rangle|^{2k(a)},\quad d\mu_k(x)=c_kv_k(x)dx$$

— вес и мера Данкля, где $c_k^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $\langle k\rangle=\sum_{a\in R_+}k(a)$, $\lambda_k=d/2-1+\langle k\rangle$, $d_k=2\lambda_k+2$ — обобщенная размерность пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $v_k(x)$, $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\le p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\mu_k}=\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu_k\Big)^{1/p}<\infty$,

$$T_jf(x)=D_jf(x)+\sum_{a\in R_+}k(a)\langle a,e_j\rangle\,\frac{f(x)-f(\sigma_ax)}{\langle a,x\rangle},\quad j=1,\dots,d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k=\sum_{j=1}^dT_j^2$ — лапласиан Данкля.

Обобщенная экспонента или ядро Данкля $e_k(x,y)$ является единственным решением системы
$$T_jf(x)=iy_jf(x),\quad j=1,\dots,d,\qquad f(0)=1.$$
Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i\langle x,y\rangle}$.

Для $f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством
$$\mathcal{F}_k(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

Если $k\equiv 0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$.

М. Реслер (см. [9]) определила оператор обобщенного сдвига τ^y, $y\in\mathbb{R}^d$, для преобразования Данкля равенством
$$\mathcal{F}_k(\tau^yf)(z)=e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z),\quad f\in L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k),$$
или
$$\tau^yf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e_k(y,z)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z).$$
Если $k\equiv 0$, то $\tau^yf(x)=f(x+y)$ совпадает с обычным сдвигом.

С. Тангавелу и Ю. Шу [10] определили потенциал Данкля – Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор
$$I_\alpha^kf(x)=(\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d_k}\,d\mu_k(y),\tag{2}$$
где $0<\alpha<d_k$ и $\gamma_\alpha^k=2^{\alpha-d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k-\alpha)/2)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^kf)=|\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)$.

Неравенство Стейна–Вейса для потенциала Данкля – Рисса примет вид
$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha^kf(x)\big\|_{q,d\mu_k}\le\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\||x|^{\beta}f(x)\big\|_{p,d\mu_k},\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$
с точной константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Аналоги теорем A и B для потенциала (2) установлены в [11, 4]. Там же можно найти предшествующие результаты.

Теорема C. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $0<\alpha<d_k$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ *конечна при* $p=q$ *или при* $p<q$ *и* $\alpha\geqslant d_k\Big(\frac1p-\frac1q\Big)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma<\frac{d_k}{q}$, $\beta<\frac{d_k}{p'}$ *и* $\alpha-\gamma-\beta=d_k(\frac1p-\frac1q)$.

Вопрос о необходимости условия $\alpha\geqslant d_k\Big(\frac1p-\frac1q\Big)$ при $p<q$ и функции кратности $k\not\equiv 0$ остается открытым.

Теорема D. *Если* $d\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $\gamma<\frac{d_k}{p}$, $\beta<\frac{d_k}{p'}$, $\alpha>0$, *и* $\gamma=\alpha-\beta$, *то*
$$\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)=\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d_k)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\frac12(\frac{d_k}{p}-\gamma))\Gamma(\frac12(\frac{d_k}{p'}-\beta))}{\Gamma(\frac12(\frac{d_k}{p'}+\gamma))\Gamma(\frac12(\frac{d_k}{p}+\beta))}.$$

Как видим, в теоремах C и D размерность d заменяется на обобщенную размерность d_k.

Потенциал Рисса — положительный оператор. Из определения (2) положительность потенциала Данкля – Рисса не вытекает. В [11] потенциал Данкля – Рисса записан с помощью положительного оператора сдвига, являющегося усреднением оператора сдвига τ^y, и тем самым доказана положительность потенциала Данкля – Рисса.

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в [12]. Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед [12] определили a-деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двупараметрическое семейство унитарных операторов $\mathcal{F}_{k,a}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\mu_{k,a}\right)^{1/p}, \quad p = 2,$$

названное (k,a)-обобщенным преобразованием Фурье. В спектральной форме

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,(2\lambda_k + a)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big), \tag{3}$$

где

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a}v_{k,a}(x)\,dx, \quad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2}v_k(x), \quad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a}v_{k,a}(x)\,dx.$$

Число $d_{k,a} = 2\lambda_k + a = d + 2\langle k\rangle + a - 2$ называют обобщенной размерностью пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $v_{k,a}(x)$.

Если $a = 2$, то (3) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (3) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (3) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье.

Важный случай обобщенного преобразования Фурье получается при $a = 1$. Оно может быть записано как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y)f(y)\,d\mu_{k,1}(y) \tag{4}$$

с непрерывным ядром $B_k(x,y)$.

Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$ определен Салемом Бен Саидом и Делеавалом [13] (см. также [14]) равенством:

$$\mathcal{F}_{k,1}(\tau^y f)(z) = B_k(y,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}).$$

Но он также как и оператор сдвига для преобразования Данкля не является положительным оператором и его L^p-ограниченность известна только при $p = 2$.

Нами [15] в качестве оператора сдвига предложен оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\,d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где $d\sigma_{k,1}(y') = a_{k,1}v_{k,1}(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере. В [15] доказано, что оператор (5) положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Здесь под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ понимается пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup|f(x)|$.

Определим потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье как интегральный оператор

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x)|y|^{\alpha - d_{k,1}}\,d\mu_{k,1}(y), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{6}$$

где $0 < \alpha < d_{k,1}$ и $\gamma_\alpha^{k,1} = \Gamma(\alpha)/\Gamma(d_{k,1} - \alpha)$.

Как для потенциалов Рисса и Данкля – Рисса для него справедливо соотношение

$$\mathcal{F}_{k,1}(I_\alpha^{k,1}f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f).$$

Потенциал (6) может быть записан с помощью оператора сдвига (5)

$$I_\alpha^{k,1}f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_0^\infty T^t f(x)t^{\alpha-d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t), \tag{7}$$

где

$$d\nu_{\lambda_k,1}(r) = b_{\lambda_k,1}r^{2\lambda_k}\,dr, \quad b_{\lambda_k,1}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r}r^{2\lambda_k}\,dr = \Gamma(2\lambda_k+1).$$

Из (7) следует положительность потенциала (6).

Нас интересует аналог неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha^{k,1}f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \le \mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{8}$$

с точной константой $\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Мы доказываем следующие результаты. В них и далее мы предполагаем, что $\lambda_k>0$ или $d_{k,1}>1$.

Теорема 1. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $0<\alpha<d_{k,1}$. *Константа* $\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ *конечна при* $p=q$ *или при* $p<q$ *и* $\alpha\geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma<\frac{d_{k,1}}{q}$, $\beta<\frac{d_{k,1}}{p'}$, *и* $\alpha-\gamma-\beta = d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$.

Теорема 2. *Если* $d\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $\gamma<\frac{d_{k,1}}{p}$, $\beta<\frac{d_{k,1}}{p'}$, $\alpha>0$, *и* $\gamma=\alpha-\beta$, *то*

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}-\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta)}{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}+\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta)}. \tag{9}$$

Как видим, в теоремах 1 и 2 появляется обобщенная размерность $d_{k,1}$. При доказательстве теорем 1, 2 используются работы [10, 11, 12, 13, 15, 16, 17].

2. Элементы обобщенного гармонического анализа и операторы сдвига

Пусть $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода и порядка $\alpha\geqslant -1/2$,

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+1)(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}j!\Gamma(j+\alpha+1)}$$

— нормированная функция Бесселя, $r\in\mathbb{R}_+$, $\lambda_k = d/2-1+\langle k\rangle>0$, $d_{k,1}=2\lambda_k+1$, $d\nu_{\lambda_k,1}(r) = b_{\lambda_k,1}r^{2\lambda_k}\,dr$, $b_{\lambda_k,1}^{-1}=\Gamma(d_{k,1})$, $L^p(\mathbb{R}_+,d\nu_{\lambda_k,1})$, $1\leqslant p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}}^p = \int_0^\infty |f|^p\,d\nu_{\lambda_k,1}$, $L^\infty(\mathbb{R}_+,d\nu_{\lambda_k,1}) = C_b(\mathbb{R}_+)$.

Гармонический анализ Данкля, в частности, строится с помощью дифференциально-разностных операторов

$$T_jf(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} k(a)\langle a,e_j\rangle\,\frac{f(x)-f(\sigma_a x)}{\langle a,x\rangle}, \quad j=1,\dots,d,$$

где R_+ — положительная подсистема системы корней R, а $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. А также лапласиана Данкля

$$\Delta_k f(x)=\sum_{j=1}^{d}T_j^2 f(x).$$

При $k\equiv 0$, Δ_k — оператор Лапласа Δ. В гармоническом анализе Данкля построен положительный оператор сплетения V_k, для которого

$$TjV_kf(x)=V_k\frac{\partial f(x)}{\partial x_j},\quad j=1,\dots,d.$$

Для него получено представление

$$V_kf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\xi)\,d\mu_x^k(\xi)$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты $O^x=\{gx\colon g\in G\}$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [9].

Для ядра $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье (4) справедливо представление

$$B_k(x,y)=V_k(j_{\lambda_k-1/2}(\sqrt{|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}))(y'),\quad x=|x|x',\,y=|y|y'. \tag{10}$$

Пусть $\lambda_k>0$. В силу (10) и неравенства $|j_\alpha(z)|\leqslant 1$ будет $|B_k(x,y)|\leqslant 1$, $B_k(0,y)=1$. Известно также [12], что

$$B_k(x,y)=B_k(y,x),\quad B_k(\lambda x,y)=B_k(x,\lambda y),\quad \lambda>0, \tag{11}$$

$$|x|\Delta_k^x B_k(x,y)=-|y|B_k(x,y),\quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}}B_k(x,ty')\,d\sigma_{k,1}(y')=j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|x|}). \tag{12}$$

Обобщенное преобразование Фурье — изометрия пространства $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ и $\mathcal{F}_{k,1}^2=Id$.

Если $f\in\mathcal{A}=\{f\colon f,\mathcal{F}_{k,1}(f)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})\}$, то равенство (4) выполнено поточечно. Справедливо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{A}$.

Основные факты об обобщенном преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{k,1}$ можно найти в [12].

Оператор сдвига τ^y в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье может быть записан в интегральной форме

$$\tau^y f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}B_k(x,\xi)B_k(y,\xi)\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\,d\mu_{k,1}(\xi). \tag{13}$$

Если $f\in\mathcal{A}$ равенство (11) справедливо поточечно.

В [13] установлена самосопряженность τ^y. Если $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $g\in\mathcal{A}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d}\tau^y f(x)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\tau^y g(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{14}$$

Для оператора τ^y на радиальных функциях $f(x)=f_0(|x|)\in\mathcal{A}$ в [13] получено представление

$$\tau^y f(x)=\frac{\Gamma(\lambda_k+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_k)}V_k\Big(\int_{-1}^{1}f_0\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u\Big)(1-u^2)^{\lambda_k-1}\,du\Big)(y'), \tag{15}$$

где $x=|x|x'$, $y=|y|y'$. В [13, 17] для радиальных функций из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, доказано неравенство
$$\|\tau^y f\|_{p,d\mu_{k,1}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Согласно (13) оператор сдвига T^t (5) для функций из класса $\mathcal{A}$ может быть записан поточечно
$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}B_k(x,\xi)j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|})\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\,d\mu_{k,1}(\xi),$$
то есть для него
$$\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)(\xi)=j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|})\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi).$$

Оператор T^t также самосопряженный. Если $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $g\in\mathcal{A}$, то
$$\int_{\mathbb{R}^d}T^t f(x)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)T^t g(x)\,d\mu_{k,1}(x).$$

В [15, 17] установлено, что на функциях из пространства Шварца
$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\xi)\,d\sigma^k_{t,x}(\xi),\quad t\in\mathbb{R}_+,\ x\in\mathbb{R}^d,$$
с вероятностной мерой $d\sigma^k_{t,x}$ и, что оператор $T^t f(x)$ может быть распространен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, с выполнением неравенств
$$\begin{aligned}\|T^t f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}&\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}},\quad t\in\mathbb{R}_+,\\ \|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}}&\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}},\quad x\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}\tag{16}$$

Операторы сдвига τ^y, T^t позволяют определить свертки (см. [17])
$$(f*_{\lambda_k}g_0)(x)=\int_0^\infty T^t f(x)g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t),\ (f*_k g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\tau^x g(y)\,d\mu_{k,1}(y),\tag{17}$$
где $g(y)=g_0(|y|)$ — радиальная функция. Если $f\in\mathcal{A}$, $g_0\in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k,1})$, то для $x\in\mathbb{R}^d$,
$$(f*_{\lambda_k}g_0)(x)=(f*_k g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\tau^y f(x)g(y)\,d\mu_{k,1}(y),\tag{18}$$
Если $f\in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, а $g(x)\in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и ограничена, то $(f*_{\lambda_k}g_0)(x)=(f*_k g)(x)$ и
$$\|(f*_k g)\|_{p,d\mu_{k,1}}\leq\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g\|_{1,d\mu_{k,1}}.$$

3. О потенциале Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье

Если $f\in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\cap C_b(\mathbb{R}^d)$, то интеграл (7), определяющий потенциал Рисса, в силу (16) для всех x сходится абсолютно
$$\begin{aligned}|I^{k,1}_\alpha f(x)|&\lesssim\int_0^\infty|T^t f(x)|t^{\alpha-d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &\lesssim\|T^t f\|_\infty\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt+\|T^t f\|_{1,d\nu_{\lambda_k,1}}\|t^{\alpha-d_{k,1}}\chi_{[1,\infty)}(t)\|_\infty\\ &\lesssim\|f\|_\infty+\|f\|_{1,d_{k,1}}<\infty.\end{aligned}\tag{19}$$

Лемма 1. *Если $0<\alpha<d_{k,1}$, то в обобщенном смысле*

$$\mathcal{F}_{k,1}((\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}|\cdot|^{\alpha-d_{k,1}})(x)=|x|^{-\alpha},$$

то есть для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{\alpha-d_{k,1}}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-\alpha}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{20}$$

Доказательство. Так как $\mathcal{F}_{k,1}\Big(e^{-|\cdot|}\Big)(x)=e^{-|x|}$ [13], то для $s>0$

$$\mathcal{F}_{k,1}\Big(e^{-s|\cdot|}\Big)(x)=s^{-d_{k,1}}e^{-|x|/s}. \tag{21}$$

Следовательно, для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d}e^{-s|x|}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x)=s^{-d_{k,1}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|/s}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{22}$$

Пусть $\beta=d_{k,1}-\alpha$. Умножая левую и правую части равенства (22) на $s^{\beta-1}$ и интегрируя, получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-s|x|}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x)\,ds&=\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\int_0^\infty s^{\beta-1}e^{-s|x|}\,ds\,d\mu_{k,1}(x)\\&=\Gamma(\beta)\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-\beta}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{\beta-1-d_{k,1}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|/s}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x)\,ds&=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\int_0^\infty s^{\beta-1-d_{k,1}}e^{-|x|/s}\,ds\,d\mu_{k,1}(x)\\&=\Gamma(d_{k,1}-\beta)\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{\beta-d_{k,1}}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x).\end{aligned}$$

Отсюда и из определения $\gamma_\alpha^{k,1}$ в (6), получаем (20). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. *Лемма 1 справедлива для любой $\varphi\in\mathcal{A}$, для которой*

$$|\varphi(x)|\lesssim(1+|x|)^{-d_{k,1}},\quad |\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)|\lesssim(1+|x|)^{-d_{k,1}}.$$

Лемма 2. *Если $0<\alpha<d_{k,1}$, то в обобщенном смысле*

$$\mathcal{F}_{k,1}(I_\alpha^{k,1}f)(x)=|x|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f)(x),$$

то есть для любых $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d}(I_\alpha^{k,1}f(x))g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f)(x)\mathcal{F}_{k,1}(g)(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{23}$$

Доказательство. Так как

$$t^{\alpha-d_{k,1}}=\frac{1}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}\int_0^\infty e^{-st}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\,ds, \tag{24}$$

то учитывая (19)

$$\int_{\mathbb{R}^d}(I_\alpha^{k,1}f(x))g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty T^tf(x)t^{\alpha-d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty T^tf(x)e^{-st}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)\,ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(e^{-s|\cdot|})(z)g(x)\,d\mu_{k,1}(z)d\mu_{k,1}(x)ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\int_0^\infty s^{-\alpha-1}e^{-|z|/s}\,ds\,d\mu_{k,1}(z)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}|z|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\,d\mu_{k,1}(z).$$

Равенство (23) и лемма 2 доказаны.

Для оценки L^p-нормы потенциала Рисса (6) функции $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ будем использовать максимальную функцию Харди–Литтлвуда [13]:

$$M_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{|(f*_k\chi_{B_r})(x)|}{\int_{B_r}d\mu_{k,1}},$$

где B_r — евклидов шар радиуса r с центром в нуле. В силу (17), (18)

$$M_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{|\int_0^r T^tf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)|}{\int_0^r d\nu_{\lambda_k,1}}. \tag{25}$$

В [13] доказано, что максимальная функция — ограниченный оператор в $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1<p\leqslant\infty$,

$$\|M_kf\|_{p,d\mu_{k,1}}\lesssim\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{26}$$

Лемма 3. *Если $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<d_{k,1}$, $\alpha=d_{k,1}\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Bigr)$, то для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\|I_\alpha^{k,1}f\|_{q,d\mu_{k,1}}\lesssim\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{27}$$

Доказательство. Для $R>0$ разобъем (7) на сумму двух слагаемых

$$\begin{aligned}I_\alpha^{k,1}f(x)&=(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_0^R T^tf(x)\frac{1}{t^{d_{k,1}-\alpha}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\&\quad+(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_R^\infty T^tf(x)\frac{1}{t^{d_{k,1}-\alpha}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)=J_1+J_2.\end{aligned} \tag{28}$$

Интегрируя J_1 по частям, получим

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha^{k,1}J_1&=\int_0^R t^{-(d_{k,1}-\alpha)}\,d\Bigl(\int_0^t T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\Bigr)\\&=R^\alpha\cdot R^{-d_{k,1}}\int_0^R T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\\&\quad+(d_{k,1}-\alpha)\int_0^R t^{-d_{k,1}}\int_0^t T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\,t^{\alpha-1}\,dt,\end{aligned} \tag{29}$$

так как

$$\varepsilon^{\alpha}\cdot\varepsilon^{-d_{k,1}}\Big|\int_0^{\varepsilon}T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\Big|\lesssim\varepsilon^{\alpha}\sup_{\varepsilon>0}\frac{|\int_0^{\varepsilon}T^tf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)|}{\int_0^{\varepsilon}d\nu_{\lambda_k,1}}=\varepsilon^{\alpha}M_{k,1}f(x)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\varepsilon^{\alpha}\cdot\varepsilon^{-d_{k,1}}\int_0^{\varepsilon}T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)=0.$$

Из (29), получаем

$$|J_1|\lesssim R^{\alpha}M_{k,1}f(x)+\int_0^R M_{k,1}f(x)t^{\alpha-1}\,dt\lesssim R^{\alpha}M_{k,1}f(x). \tag{30}$$

Для оценки J_2 применяем неравенство Гельдера и (16)

$$|J_2|\leqslant(\gamma_{\alpha}^{k,1})^{-1}\Big(\int_R^{\infty}t^{-(d_{k,1}-\alpha)p'}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\Big)^{1/p'}\|T^tf(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}}\lesssim R^{-d_{k,1}q}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Отсюда и из (28), (30)

$$|I_{\alpha}^{k,1}f(x)|\lesssim R^{\alpha}M_{k,1}f(x)+R^{-d_{k,1}q}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Полагая $R=\big(M_{k,1}f(x)/\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\big)^{-q/d_{k,1}}$, получим для любых $1<p<q$

$$|I_{\alpha}^{k,1}f(x)|\lesssim(M_{k,1}f(x))^{p/q}(\|f\|_{p,d\mu_{k,1}})^{1-p/q}. \tag{31}$$

Остается проинтегрировать (31) и воспользоваться неравенством (26)

$$\|I_{\alpha}^{k,1}f\|_{q,d\mu_{k,1}}\lesssim\|M_{k,1}f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{p/q}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{1-p/q}\lesssim\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Лемма 3 доказана.

4. Представление потенциала Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье

Потенциал Рисса (7) для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ можно записать в виде

$$I_{\alpha}^{k,1}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\Phi(x,y)\,d\mu_{k,1}(y), \tag{32}$$

где

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\,ds. \tag{33}$$

Действительно, применяя (24), (18), (14), получим

$$\begin{aligned}I_{\alpha}^{k,1}f(x)&=(\gamma_{\alpha}^{k,1})^{-1}\int_0^{\infty}T^tf(x)t^{\alpha-d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_0^{\infty}T^tf(x)e^{-st}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\,ds\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^xf(y)e^{-s|y|}\,d\mu_{k,1}(y)\,ds\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\,d\mu_{k,1}(y)\,ds\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1} \tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\, ds\, d\mu_{k,1}(y).$$

В лемме 4 описываются свойства ядра $\Phi(x,y)$. Пусть

$$x = rx', \quad y = ty', \quad r,t \in \mathbb{R}_+, \quad x', y' \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Нам понадобятся следующие факты

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_{k,1}(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(rx')\, d\sigma_{k,1}(x')\, d\nu_{\lambda_k,1}(r), \tag{34}$$

$$\int_0^\infty e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{rt})\, d\nu_{\lambda_k,1}(r) = \frac{e^{-t/s}}{s^{d_{k,1}}}, \tag{35}$$

$$j_\lambda(\sqrt{a}) j_\lambda(\sqrt{b}) = \int_{-1}^1 j_\lambda\Big(\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}v}\Big)\, d\psi_\lambda(v), \tag{36}$$

где

$$d\psi_\lambda(u) = c_\lambda (1-u^2)^{\lambda-1/2}\, du, \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}.$$

Формулу (35) можно найти в [18, стр.33, формула 10]. Формула (36) — это теорема умножения Гегенбауэра для функций Бесселя [19, п. 11.41], записанная в удобной для нас форме.

Лемма 4. *Для ядра $\Phi(x,y)$ выполняются следующие свойства:*

1. $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$;

2. $\Phi(rx', ty') = r^{\alpha-d_{k,1}} \Phi(x', (t/r)y')$;

3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(rx', ty')\, d\sigma_{k,1}(x') = \Phi_0(r,t)$, *где*

$$\Phi_0(r,t) := (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} \int_0^\pi (r+t-2\sqrt{rt}\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi;$$

4. $\Phi(x,y) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \tau^y(|\cdot|^{\alpha-d_{k,1}})(x)$ *или, эквивалентно,*

$$\gamma_\alpha^{k,1}\Phi(x,y) = V_k\Big(\int_{-1}^1 \Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)u}\Big)^{\alpha-d_{k,1}} d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y').$$

Доказательство. В силу (13), (21) ядро можно записать в виде

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^d} B_k(rx',\xi) B_k(ty',\xi) e^{-|\xi|/s}\, d\mu_{k,1}(\xi)\, ds. \tag{37}$$

Из (37) сразу вытекает равенство 1.

Делая в (37) замену переменных $\xi = z/r$, $s = \rho/r$ и применяя (11), получим

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \frac{r^{\alpha-d_{k,1}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \rho^{-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x',z) B_k((t/r)y',z) e^{-|z|/\rho}\, d\mu_{k,1}(z)\, d\rho \\ &= r^{\alpha-d_{k,1}} \Phi(x', (t/r)y').\end{aligned}$$

Равенство 2 доказано.

Проинтегрируем (37) по сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ и воспользуемся (12), (34) – (36)

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(rx',ty')\,d\sigma_{k,1}(x') = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{-(\alpha+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{r|\xi|})B_k(y,\xi)e^{-|\xi|/s}\,d\mu_{k,1}(\xi)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{-(\alpha+1)}\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{r\rho})j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t\rho})e^{-\rho/s}\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{r\rho})j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t\rho})e^{-s\rho}\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\int_{-1}^1\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{\rho(r+t-2\sqrt{rt}v)})e^{-s\rho}\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\,d\psi_{2\lambda_k}(v)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^1\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}e^{-s(r+t-2\sqrt{rt}v)}\,ds\,d\psi_{2\lambda_k}(v)$$

$$= (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{-1}^1 (r+t-2\sqrt{rt}v)^{\alpha-d_{k,1}}\,d\psi_{2\lambda_k}(v)$$

$$= (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}c_{2\lambda_k}\int_0^\pi (r+t-2\sqrt{rt}\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2(d_{k,1}-1)}\varphi\,d\varphi = \Phi_0(r,t).$$

Равенство 3 доказано.

Согласно (15), (24), (33)

$$\tau^y(e^{-s|\cdot|})(x) = V_k\Big(\int_{-1}^1 e^{-s(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)}\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')$$

и

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}V_k\Big(\int_{-1}^1 e^{-s(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)}\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}V_k\Big(\int_{-1}^1\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}e^{-s(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)}\,ds\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')$$

$$= (\gamma_\alpha^k)^{-1}V_k\Big(\int_{-1}^1\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u\Big)^{\alpha-d_{k,1}}d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')$$

$$= (\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{-1}^1\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\xi\rangle)}u\Big)^{\alpha-d_{k,1}}d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\,d\mu_{y'}^k(\xi).$$

Равенство 4 и лемма 4 доказаны.

5. Доказательство теоремы 1

Вначале изучим (L^p,L^q)-ограниченность со степенными радиальными весами вспомогательных операторов Харди и Беллмана:

$$Hf(x) = \int_{|y|\leqslant|x|} f(y)\,d\mu_{k,1}(y),\quad Bf(x) = \int_{|y|\geqslant|x|} f(y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

Нас интересуют неравенства

$$\big\||x|^{-a}Hf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \le \mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)\big\||x|^bf(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}},$$

$$\big\||x|^{-a}Bf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \le \mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)\big\||x|^{b}f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}$$

с конечными константами $\mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)$, $\mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Лемма 5. *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Константа $\mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)$ конечна тогда и только тогда, когда*

$$a>\frac{d_{k,1}}{q},\quad b<\frac{d_{k,1}}{p'},\quad a+b=d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big). \tag{38}$$

Доказательство. В [4] установлено, что при доказательстве неравенств для оператора Харди с радиальными весами достаточно ограничиться радиальными функциями. На радиальных функциях мы приходим к эквивалентному неравенству

$$\Big(\int_0^\infty\Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}-a}\int_0^r f_0(t)\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q}\lesssim \mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)\Big(\int_0^\infty\Big(r^{b-\frac{2\lambda_k}{p'}}f_0(r)\Big)^p dr\Big)^{1/p}.$$

Необходимое и достаточное условие конечности константы в последнем неравенстве известно (см., например, [20], [21, Section 1], [22, Introduction]):

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_r^\infty\Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}-a}\Big)^q dr\Big)^{1/q}\Big(\int_0^r\Big(r^{b-\frac{2\lambda_k}{p'}}\Big)^{-p'}dr\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Простой анализ выполнения этого условия приводит к условиям (38). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Константа $\mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)$ конечна тогда и только тогда, когда*

$$a<\frac{d_{k,1}}{q},\quad b>\frac{d_{k,1}}{p'},\quad a+b=d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big). \tag{39}$$

Доказательство. Проводится аналогично. Только необходимое и достаточное условие конечности константы $\mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)$ выглядит так

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_0^r\Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}-a}\Big)^q dr\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty\Big(r^{b-\frac{2\lambda_k}{p'}}\Big)^{-p'}dr\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 при $p=q$ в части достаточности будет проведено в следующей секции. Пусть $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x)\geqslant 0$, $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<d_{k,1}$,

$$\gamma<\frac{d_{k,1}}{q},\quad \beta<\frac{d_{k,1}}{p'},\quad \gamma+\beta\geqslant 0,\quad \alpha-\gamma-\beta=d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big). \tag{40}$$

Докажем достаточность этих условий. Все рассуждения можно проводить для оператора $\widetilde{I}_\alpha^{k,1}$ с ядром

$$\Phi_\alpha(x,y)=V_k\Big(\int_{-1}^1\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)u}\Big)^{\alpha-d_{k,1}}d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y').$$

Напомним, что неравенство (8) с конечной константой при $\gamma=\beta=0$, $\alpha=d_{k,1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, доказано в лемме 3.

Пусть

$$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d=E_1\sqcup E_2\sqcup E_3,$$

где

$$E_1=\{(x,y)\colon 2^{-1}|x|<|y|<2|x|\},\quad E_2=\{(x,y)\colon |y|\leqslant 2^{-1}|x|\},$$

$$E_3=\{(x,y)\colon |y|\geqslant 2|x|\}.$$

Разобъем оператор $\widetilde{I}_\alpha^{k,1}$ на сумму трех операторов

$$\widetilde{I}_\alpha^{k,1} = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Вместо неравенства (8) для оператора A_1 будем доказывать для оператора

$$\widetilde{A}_1 f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\Phi_\alpha(x,y)\chi_{E_1}(x,y)}{|x|^\gamma |y|^\beta}\, d\mu_{k,1}(y)$$

эквивалентное безвесовое неравенство

$$\|\widetilde{A}_1 f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{41}$$

Так как для $(x,y) \in E_1$, $|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}u \leqslant 2(|x|+|y|)$, то полагая $\widetilde{\alpha} = d_{k,1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, получим

$$\begin{aligned}\frac{(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}u)^{\alpha-d_{k,1}}}{|x|^\gamma |y|^\beta} &\lesssim \frac{(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}u)^{\alpha-d_{k,1}}}{(|x|+|y|)^{\gamma+\beta}} \\ &\lesssim (|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}u)^{\widetilde{\alpha}-d_{k,1}}\end{aligned}$$

и

$$\frac{\Phi_\alpha(x,y)\chi_{E_1}(x,y)}{|x|^\gamma |y|^\beta} \lesssim \Phi_{\widetilde{\alpha}}(x,y).$$

Так как $0 < \widetilde{\alpha} < d_{k,1}$, то неравенство (41) верно по лемме 3.

Если $(x,y) \in E_2$, то $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |x|^{\alpha-d_{k,1}}$ и

$$A_2 f(x) \lesssim |x|^{\alpha-d_{k,1}} Hf(x).$$

Неравенство (8) для оператора A_2 будет выполнено, если

$$\big\||x|^{\alpha-\gamma-d_{k,1}} Hf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{42}$$

Если выполнены условия (40), то выполнены и условия (38)

$$a+b = d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big), \quad b = \beta < \frac{d_{k,1}}{p'},$$

$$a = d_{k,1}+\gamma-\alpha = d_{k,1}+d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\beta > \frac{d_{k,1}}{p} > \frac{d_{k,1}}{q}.$$

Следовательно, по лемме 5 неравенство (42) верно.

Если $(x,y) \in E_3$, то $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |y|^{\alpha-d_{k,1}}$ и

$$A_3 f(x) \lesssim \int_{|y|\geqslant|x|} |y|^{\alpha-d_{k,1}} f(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

Неравенство (8) для оператора A_3 будет выполнено, если

$$\big\||x|^{-\gamma} Bf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\||x|^{\beta-\alpha+d_{k,1}} f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{43}$$

Если выполнены условия (40), то выполнены и условия (39)

$$a+b = d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big), \quad a = \gamma < \frac{d_{k,1}}{q},$$

$$b = d_{k,1}+\beta-\alpha = d_{k,1}+d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\gamma > \frac{d_{k,1}}{q'} > \frac{d_{k,1}}{p'}.$$

Следовательно, по лемме 6 неравенство (43) также верно.

Так как операторы A_i, $i=1,2,3$, положительные, то необходимые условия ограниченности норм операторов Харди и Беллмана в леммах 5, 6 будут необходимыми и для ограниченности норм потенциала Рисса. Таким образом, условия (40) будут необходимыми в теореме 1 при $1 < p \leqslant q < \infty$ (кроме условия $\gamma+\beta \geqslant 0$). Теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Пусть

$$d\nu(r)=r^{-1}\,dr,\quad dm_k(x)=d\nu(r)\,d\sigma_{k,1}(x').$$

Отметим, что

$$d\mu_{k,1}(x)=d\nu_{\lambda_k,1}(r)\,d\sigma_{k,1}(x')=b_{\lambda_k,1}|x|^{d_{k,1}}\,dm_k(x).$$

Нам понадобятся точные оценки норм операторов, определяемых сверткой Меллина,

$$A_gf(r)=(f*g)(r)=\int_0^\infty f(r/t)g(t)\,d\nu(t).$$

Свертка Меллина коммутативная

$$(f*g)(r)=(g*f)(r). \tag{44}$$

Лемма 7 [11]. *Пусть* $L^p=L^p(\mathbb{R}_+,d\nu)$, $1\le p\leqslant\infty$. *Если* $f\in L^p$, $h\in L^{p'}$, $g\in L^1$, *то*

$$\|f*g\|_p\le\|g\|_1\|f\|_p,$$

или

$$\Big|\int_0^\infty\int_0^\infty h(r)f(t)g(r/t)\,d\nu(t)\,d\nu(r)\Big|\le\|g\|_1\|h\|_{p'}\|f\|_p.$$

Если $g\ge 0$, *то*

$$\|A_g\|_{p\to p}=\|g\|_1, \tag{45}$$

или

$$\sup_{\|f\|_p\le1}\ \sup_{\|h\|_{p'}\le1}\Big|\int_0^\infty h(r)A_gf(r)\,d\nu(r)\Big|=\|g\|_1.$$

Доказательство теоремы 2. Мы следуем работе [11]. Пусть

$$1<p<\infty,\quad \gamma<\frac{d_{k,1}}{p},\quad \beta<\frac{d_{k,1}}{p'},\quad \alpha>0,\quad \alpha=\gamma+\beta. \tag{46}$$

Рассмотрим модифицированный оператор

$$\widetilde{I}_\alpha^{k,1}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|y|^{d_{k,1}/p'-\beta}\Phi(x,y)\,dm_k(y).$$

Неравенство (8) для $q=p$ эквивалентно

$$b_{\lambda_k,1}\big\||x|^{-\gamma+d_{k,1}/p}\widetilde{I}_\alpha^{k,1}f(x)\big\|_{p,dm_k}\leqslant\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)\|f(x)\|_{p,dm_k}.$$

Если $x=rx'$, $y=ty'$, то применяя замену переменных $y\to(r/t)y'$ и свойства (1), (2) в лемме 4, (44), получим

$$\widetilde{I}_\alpha^{k,1}f(x)=r^{-\beta+\alpha-d_{k,1}/p}\int_{\mathbb{R}^d}f((r/t)y')\Phi_1(t,x',y')\,dm_k(ty'),$$

где

$$\Phi_1(t,x',y')=t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi(tx',y').$$

В силу (46)

$$|x|^{-\gamma+d_k/p}\widetilde{I}_\alpha^{k,1}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,dm_k(ty').$$

Положим

$$J := \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} h(rx')f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,dm_k(x)\,dm_k(y)$$
$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty h(rx')f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,d\nu(t)\,d\nu(r)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y').$$

Применяя лемму 7 и неравенство Гельдера, получим

$$|J| \leqslant \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Big(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\Big)^{1/p'}\Big(\int_0^\infty |f(ty')|^{p}\,d\nu(t)\Big)^{1/p}$$
$$\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')$$
$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Big(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\Big)^{1/p'}$$
$$\Big(\int_0^\infty |f(ty')|^{p}\,d\nu(t)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\Big)^{1/p}d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')$$
$$\leqslant \Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')\Big)^{1/p'}$$
$$\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |f(ty')|^{p}\,d\nu(t)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')\Big)^{1/p}.$$

Воспользовавшись свойствами (1) и (3) в лемме 4, придем к

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Phi_1(t,x',y')\,d\sigma_{k,1}(x') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Phi(tx',y')\,d\sigma_{k,1}(x') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)$$

и

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Phi_1(t,x',y')\,d\sigma_{k,1}(y') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(1,t) = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1).$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$|J| \leqslant \Big(\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)\Big)^{1/p'}\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\,d\sigma_{k,1}(x')\Big)^{1/p'}$$
$$\Big(\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |f(ty')|^{p}\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(y')\Big)^{1/p}$$
$$= \int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)\,\|h\|_{p',dm_k}\|f\|_{p,dm_k}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) \leqslant b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t).$$

Так как для радиальных функций $f(x)=f_0(|x|)=f_0(r)$

$$|x|^{-\gamma+d_{k,1}/p}\widetilde{I}_\alpha^{k,1}f(x) = \int_0^\infty f_0(r/t)t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,\frac{dt}{t},$$

то лемма 7 (см. (45)) дает

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t).$$

Покажем, что условия (46) для конечности константы $\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)$ достаточны. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)\\
&=(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}c_{2\lambda_k}b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\int_0^\pi\bigl(1+t-2\sqrt{t}\cos\varphi\bigr)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\,d\varphi\,d\nu(t)\\
&=(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}c_{2\lambda_k}b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty \frac{t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}}{(1+t)^{d_{k,1}-\alpha}}\int_0^\pi\Bigl(1-\frac{2\sqrt{t}\cos\varphi}{1+t}\Bigr)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\,d\varphi\,d\nu(t).
\end{aligned}$$

Относительно t интеграл имеет особенности в точках $t=0,1,\infty$. Он сходится в нуле тогда и только тогда, когда $\gamma=\alpha-\beta<\frac{d_{k,1}}{p}$. Он сходится в бесконечности только при $\beta<\frac{d_{k,1}}{p'}$. Для исследования поведения интеграла в окрестности точки $t=1$ положим $r=2\sqrt{t}/(1+t)$. Тогда при $r\to 1-0$

$$\begin{aligned}
\psi(r)&=\int_0^\pi(1-r\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\,d\varphi\\
&\asymp\int_0^1(1-r+r\varphi^2/2)^{\alpha-d_{k,1}}\varphi^{2d_{k,1}-2}\,d\varphi+1\\
&\asymp\int_0^{\sqrt{1-r}}(1-r)^{\alpha-d_{k,1}}\varphi^{2d_{k,1}-2}\,d\varphi+\int_{\sqrt{1-r}}^1\varphi^{2\alpha-2}\,d\varphi+1\\
&\asymp\begin{cases}(1-r)^{\alpha-1/2}, & 0<\alpha<1/2,\\ -\ln(1-r), & \alpha=1/2,\\ \hfill 1, & \alpha>1/2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Поэтому при $t\to 1$

$$\int_0^\pi\Bigl(1-\frac{2\sqrt{t}\cos\varphi}{1+t}\Bigr)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\,d\varphi\asymp\begin{cases}|1-t|^{2\alpha-1}, & 0<\alpha<1/2,\\ -\ln|1-t|, & \alpha=1/2,\\ \hfill 1, & \alpha>1/2,\end{cases}$$

Следовательно, и при $t=1$ мы имеем интегрируемую особенность.

Остается вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)$. Ряд

$$(1-r\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}}=\frac{1}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\Gamma(d_{k,1}-\alpha+n)}{\Gamma(n+1)}r^n\cos^n\varphi$$

при $0\leqslant r<1$ сходится равномерно на $[0,\pi]$ и

$$\begin{aligned}
\psi(r)&=\int_0^\pi(1-r\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\,d\varphi\\
&=\frac{1}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}{\Gamma(2m+1)}r^{2m}\int_0^\pi\cos^{2m}\varphi\sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\,d\varphi\\
&=\frac{\Gamma(d_{k,1}-\frac12)}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma(m+\frac12)\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(d_{k,1}+m)}r^{2m}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)=b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)$$

$$= \frac{(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}c_{2\lambda_k}b_{\lambda_k,1}\Gamma(d_{k,1}-\frac{1}{2})}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m}\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(d_{k,1}+m)}$$
$$\times\int_0^\infty \frac{t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta+m-1}}{(1+t)^{d_{k,1}-\alpha+2m}}\,dt.$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta+m-1}}{(1+t)^{d_{k,1}-\alpha+2m}}\,dt = \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta-\alpha+m)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta+m)}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}$$

и

$$\gamma_\alpha^{k,1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)},\quad c_{2\lambda_k} = \frac{\Gamma(d_{k,1})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(d_{k,1}-\frac{1}{2})},\quad b_{\lambda_k,1} = \frac{1}{\Gamma(d_{k,1})},$$

то

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta-\alpha+m)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(d_{k,1}+m)}.$$

Полагая

$$a = \frac{d_{k,1}}{p}+\beta-\alpha,\quad b = \frac{d_{k,1}}{p'}-\beta,\quad c = d_{k,1},$$

запишем

$$c_1(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(1+m)\Gamma(c+m)}.$$

Далее используем гипергеометрическую функцию [23, Ch. II]

$$F(a,b;c;z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{m!(c)_m}\,z^k,\quad (a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}.$$

Получим

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,F(a,b;c;1).$$

Известно [23, Sect. 2.8, (46)], что

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad c\neq 0,-1,-2,\ldots,\quad c>a+b,$$

поэтому

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

где $c-a-b=\alpha$, $c-a = \frac{d_k}{p'}+\alpha-\beta = \frac{d_k}{p'}+\gamma$, $\frac{d_k}{p}+\beta$.

Окончательно

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}-\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta)}{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}+\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta)}.$$

Теорема 2 доказана.

7. Заключение

В работе определен потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье. Для него доказан аналог известного неравенства Стейна–Вейса для (L^q,L^p)-норм с радиальными степенными весами. Исследована необходимость условий на параметры. Открытым остался только вопрос о необходимости условия $\alpha\geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ при $1<p<q<\infty$. Этот вопрос открыт и для потенциала Данкля – Рисса. Другим направлением исследований может стать доказательство аналога неравенства Стейна–Вейса для радиальных кусочно-степенных весов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littelwood J. E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol.27. P. 565–606.

2. Soboleff S. On a theorem in functional analysis // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1938. Vol. 4(46), no.3. P. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7, no. 4. P. 503–514.

4. Горбачев Д.В, Иванов В.И. Весовые неравенства для потенциала Данкля – Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, Вып. 1. С. 131–147.

5. Herbst I. W. Spectral theory of the operator $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$ // Comm. Math. Phys. 1977. Vol. 53. P. 285–294.

6. Beckner W. Pitt's inequality with sharp convolution estimates // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, no. 5. P. 1871–1885.

7. Samko S. Best constant in the weighted Hardy inequality: the spatial and spherical version // Fract. Calc. Anal. Appl. 2005. Vol. 8. P. 39–52.

8. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

9. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

10. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2021. Vol. 55, no. 4. P. 513–538.

12. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

13. Salem Ben Saïd, Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.

14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // International Mathematics Research Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.

15. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для (k, 1)-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 85–96.

16. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

17. Иванов В. И. Свойства и применение положительного оператора сдвига для (k, 1)-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 4. С.

18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы. М.: Наука, 1970. 328 с.

19. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

20. Sinnamon G, Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. Vol. 54, no 2. P. 89–101.

21. Kufner A., Opic B. Xardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. 333 p.

22. Kufner A., Persson L. E. Weighted inequalities of Xardy type. Singopure-London: World Scientific hrblishing Co. Pte. Ltd., 2003. 358 p.

23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеметрическая функция. функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littelwood J. E., 1928, "Some properties of fractional integrals, I" , *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.

2. Soboleff S., 1938, "On a theorem in functional analysis" , *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 4(46), no. 3, pp. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G., 1958, "Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space" , *J. Math. Mech.*, vol. 7, no. 4, pp. 503–514.

4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147.

5. HerbstI. W., 1977, "Spectral theory of the operator $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$" , *Comm. Math. Phys.*, vol. 53, pp. 285–294.

6. Beckner W., 2008, "Pitt's inequality with sharp convolution estimates" , *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, no. 5, pp. 1871–1885.

7. Samko S., 2005, "Best constant in the weighted Hardy inequality: the spatial and spherical version" , *Fract. Calc. Anal. Appl.*, vol.8, pp. 39–52.

8. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups" , *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

9. Rösler M., 2003, "Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

10. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform" , *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S.Yu., 2021, «Riesz potential and maximal function for Dunkl transform», Potential Analysis, vol. 55, no. 4, pp. 513–538.

12. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

13. Salem Ben Saïd, Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.

14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.

15. Ivanov V. I., 2020, "Bounded translation operator for the (k,1)-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

16. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, "Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications" , *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

17. Ivanov V. I., 2021, "Properties and application of a positive translation operator for (k, 1)-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. (In Russ.)

18. Bateman H., Erdélyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms. Vol.2" , *New York, Toronto, London: MC GRAV-HILL Book COMPANY, INC*, 328 p.

19. Watson G.N., 1995, "A treatise on the theory of Bessel functions" , *Cambridge University Press*, 814 p.

20. Sinnamon G, Stepanov V. D., 1996, “The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$” , *J. London Math. Soc.*, vol. 54, no. 2, pp 89–101.

21. Kufner A., Opic B., 1990, “Xardy-type inequalities" , Pitman Research Notes in Mathematics Series, *Harlow: Longman Scientific and Technical*, 333 p.

22. Kufner A., Persson L. E., 2003, “Weighted inequalities of Xardy type" , *Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 358 p.

23. Bateman H., Erdélyi A., 1953, “Higher Transcendental Functions, I" , *New York: McGraw Hill Book Company*, 296 p.

Получено 20.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.