ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-100-113

Константы Никольского для компактных однородных пространств[1]

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются точные L^p-константы Никольского для случая римановых симметрических многообразий $\mathbb{M}^d$ ранга 1. Данные пространства классифицированы полностью и включают единичную евклидову сферу $\mathbb{S}^d$, а также проективные пространства $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. На этих многообразиях имеется общий гармонический анализ, в частности, определены подпространства полиномов $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ порядка не выше n. В общем случае точная L^p-константа Никольского для подпространства $Y\subset L^\infty$ определяется равенством

$$\mathcal{C}(Y,L^p)=\sup_{f\in(Y\cap L^p)\setminus\{0\}}\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

В.А. Иванов (1983) привел асимптотику

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d),L^p(\mathbb{M}^d))\asymp n^{d/p},\quad n\to\infty,\quad p\in[1,\infty).$$

Для случая сферы этот результат был значительно усилен автором совместно с F. Dai и S. Tikhonov (2020):

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d),L^p(\mathbb{S}^d))=\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1+o(1)),\quad n\to\infty,\quad p\in(0,\infty),$$

где $\mathcal{E}_1^d$ — множество целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1, ограниченных на $\mathbb{R}^d$. M.I. Ganzburg (2020) перенес это равенство на случай многомерного тора $\mathbb{T}^d$ и тригонометрических полиномов. Для $d=1$ данные результаты вытекают из основополагающей работы E. Levin и D. Lubinsky (2015).

В совместной работе автора и И.А. Мартьянова (2020) доказаны следующие явные границы сферической константы Никольского, которые уточняют приведенные выше результаты при $p\geqslant 1$:

$$n^{d/p}\leqslant\frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d),L^p(\mathbb{S}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant\bigl(n+2\lceil\tfrac{d+1}{2p}\rceil\bigr)^{d/p},\quad n\in\mathbb{Z}_+,\quad p\in[1,\infty).$$

Данный результат был доказан при помощи одномерного варианта задачи для случая периодического веса Гегенбауэра.

Развитие данного метода позволяет доказать следующий общий результат: при $p\geqslant 1$

$$n^{d/p}\leqslant\frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d),L^p(\mathbb{M}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant\bigl(n+\lceil\tfrac{\alpha_d+3/2}{p}\rceil+\lceil\tfrac{\beta_d+1/2}{p}\rceil\bigr)^{d/p},$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

где $\alpha_d = d/2-1$, $\beta_d = d/2-1, -1/2, 0, 1, 3$ соответственно для $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. Доказательство данного результата опирается на связь гармонического анализа на $\mathbb{M}^d$ с анализом Якоби на $[0,\pi]$ и $\mathbb{T}$ с периодическим весом $\left|2\sin\frac{t}{2}\right|^{2\alpha+1}\left|\cos\frac{t}{2}\right|^{2\beta+1}$. Также приведены родственные результаты для тригонометрических констант Никольского в L^p на $\mathbb{T}$ с весом Якоби и констант Никольского для целых функций экспоненциального типа в L^p на $\mathbb{R}$ со степенным весом.

Ключевые слова: константа Никольского, однородное пространство, полином, целая функция экспоненциального типа, вес Якоби.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев. Константы Никольского для компактных однородных пространств // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, с. 100–113.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-100-113

Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces[2]

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Tula State University (Yekaterinburg, Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

In this paper, we study the sharp L^p-Nikol'skii constants for the case of Riemannian symmetric manifolds $\mathbb{M}^d$ of rank 1. These spaces are fully classified and include the unit Euclidean sphere $\mathbb{S}^d$, as well as the projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. There is a common harmonic analysis on these manifolds, in particular, the subspaces of polynomials $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ of order at most n are defined. In the general case, the sharp L^p-Nikol'skii constant for the subspace $Y\subset L^\infty$ is defined by the equality

$$\mathcal{C}(Y,L^p)=\sup_{f\in(Y\cap L^p)\setminus\{0\}}\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

V.A. Ivanov (1983) gave the asymptotics

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d),L^p(\mathbb{M}^d))\asymp n^{d/p},\quad n\to\infty,\quad p\in[1,\infty).$$

For the case of a sphere, this result was significantly improved by the author together with F. Dai and S. Tikhonov (2020):

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d),L^p(\mathbb{S}^d))=\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1+o(1)),\quad n\to\infty,\quad p\in(0,\infty),$$

where $\mathcal{E}_1^d$ is the set of entire functions of exponential spherical type at most 1 bounded on $\mathbb{R}^d$. M.I. Ganzburg (2020) transferred this equality to the case of the multidimensional torus $\mathbb{T}^d$

[2]The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

and trigonometric polynomials. For $d=1$, these results follow from the fundamental work of E. Levin and D. Lubinsky (2015).

In a joint work of the author and I.A. Martyanov (2020), the following explicit boundaries of the spherical Nikol'skii constant were proved, which refine the above results for $p\geqslant 1$:

$$n^{d/p}\leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d),L^p(\mathbb{S}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant \bigl(n+2\lceil\tfrac{d+1}{2p}\rceil\bigr)^{d/p},\quad n\in\mathbb{Z}_+,\quad p\in[1,\infty).$$

This result was proved using a one-dimensional version of the problem for the case of a periodic Gegenbauer weight.

The development of this method allows us to prove the following general result: for $p\geqslant 1$

$$n^{d/p}\leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d),L^p(\mathbb{M}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant \bigl(n+\lceil\tfrac{\alpha_d+3/2}{p}\rceil+\lceil\tfrac{\beta_d+1/2}{p}\rceil\bigr)^{d/p},$$

where $\alpha_d=d/2-1$, $\beta_d=d/2-1$, $-1/2$, 0, 1, 3 respectively for $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. The proof of this result is based on the connection of harmonic analysis on $\mathbb{M}^d$ with Jacobi analysis on $[0,\pi]$ and $\mathbb{T}$ with periodic weight $\bigl|2\sin\frac{t}{2}\bigr|^{2\alpha+1}\bigl|\cos\frac{t}{2}\bigr|^{2\beta+1}$. Also we give related results for the trigonometric Nikol'skii constants in L^p on $\mathbb{T}$ with Jacobi weight and Nikol'skii constants for entire functions of exponential type in L^p on $\mathbb{R}$ with power weight.

Keywords: Nikolskii constant, homogeneous space, polynomial, entire function of exponential type, Jacobi weight.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev 2021, "Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 100–113.

1. Введение

Неравенства Никольского разных метрик в пространствах L^p функций на многообразиях M и точные константы в них являются классическим объектом теории приближений и ее приложений. Их изучению посвящено достаточно большое число исследований (см., например, обзоры результатов в [1, 2, 4]). В стандартных постановках константы Никольского определяются на классах $Y\subset L^q$ (обычно подпространств) полиномов и целых функций экспоненциального типа как решения экстремальных задач вида

$$\mathcal{C}(Y,L^p,L^q)=\sup_{f\in(Y\cap L^p)\setminus\{0\}}\frac{\|f\|_q}{\|f\|_p}.$$

С точки зрения гармонического анализа классы Y можно охарактеризовать как множества функций с компактным носителем соответствующего преобразования Фурье. Поэтому экстремальные задачи Никольского нужно отнести к проблемам оптимизации Фурье. Проблемы данного типа находят важные приложения уже не только в теории приближений, но также в теории чисел, метрической геометрии (см., например, [4]). Этот факт дополнительно мотивирует изучать именно точные константы Никольского.

В данной работе исследуется поднятый в работах [12, 4, 6] вопрос о предельных равенствах для полиномиальных констант Никольского и констант для целых функций экспоненциального типа. В нем спрашивается, как для семейства $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вложенных конечномерных подпространств ведет себя последовательность $\mathcal{C}_n=\mathcal{C}(Y_n,L^p,L^q)$. Типичный результат имеет вид $\mathcal{C}_n\asymp n^{d(1/p-1/q)_+}$ при $n\to\infty$, где $d=\dim M$. Однако интересно выяснить, когда можно написать асимптотическое равенство $\mathcal{C}_n=\mathcal{C}n^{d(1/p-1/q)_+}(1+o(1))$. Если такое равенство установлено, возникает следующий вопрос о оценке остаточного члена. Его можно решать, предъявляя явные границы $\mathcal{C}_n$, которые смыкаются при $n \to \infty$.

Как и в упомянутых выше работах здесь рассматривается только случай $0 < p < \infty$, $q = \infty$ (случай $q \neq \infty$ остается открытым). Поэтому положим

$$\mathcal{C}(Y, L^p) = \mathcal{C}(Y, L^p, L^\infty),$$

где $L^p = L^p_w(M)$ — в общем случае весовое пространство измеримых функций $f\colon M \to \mathbb{C}$ с конечной нормой (квази-нормой при $p < 1$)

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,w} = \left(\int_M |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)|,$$

При необходимости уточнить многообразие будем писать $\|f\|_{p,w;M}$ и всегда опускаем $w \equiv 1$.

Точные значения $\mathcal{C}(Y, L^p)$ известны при $p = 2$ для подпространств Y с воспроизводящим ядром, когда можно воспользоваться неравенством Коши–Буняковского (см., например, [10, 2, 4]). Во всех остальных случаях пока получены верхние и нижние границы. Уточнение этих границ для случая компактных однородных пространств M является главной целью данной работы. Перейдем к изложению основных результатов.

Пусть $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}\colon |x| = 1\}$ — d-мерная единичная евклидова сфера, $d \in \mathbb{N}$. В статье [4] для случая $M = \mathbb{S}^d$ и множества $Y_n = \Pi^d_n$ сферических полиномов на $\mathbb{S}^d$ порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ доказано асимптотическое равенство

$$\mathcal{C}(\Pi^d_n, L^p(\mathbb{S}^d)) = \mathcal{C}(\mathcal{E}^d_1, L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad p \in (0, \infty), \tag{1}$$

где $\mathcal{E}^d_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального сферического типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d-мерный тор, $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d\colon |x| \leqslant 1\}$ — единичный евклидов шар. В работе [6] установлено аналогичное предельное соотношение для множества $\mathcal{T}^d_n$ тригонометрических полиномов на $\mathbb{T}^d$ со спектром в шаре nB^d радиуса n:

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}^d_n, L^p(\mathbb{T}^d)) = \mathcal{C}(\mathcal{E}^d_1, L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1 + o(1)). \tag{2}$$

При $d = 1$ соотношения (1), (2) объединяются в одно равенство, которое для всех $0 < p < \infty$ было установлено в работе [12]. До этой работы помимо $p = 2$ был известен случай $p = 1$ (см. [7]). На наш взгляд, данные результаты можно считать определенным прорывом в области точных констант Никольского, поскольку до этого были известны только порядковые равенства, как, например, в [9].

Стоит специально отметить серию недавних работ M.I. Ganzburg, начиная с [6], в которых последовательно развивается общий подход к получению предельных равенств типа (1), (2) для тригонометрических и алгебраических констант Бернштейна–Никольского. В этих работах приведено много одномерных и многомерных примеров, включая весовые. Однако данный подход не дает возможности оценивать остаточные члены.

Пусть для краткости

$$\mathcal{A}_{dp}(n) = \frac{\mathcal{C}(\Pi^d_n, L^p(\mathbb{S}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}^d_1, L^p(\mathbb{R}^d))}.$$

Из (1) следует, что $\mathcal{A}_{dp}(n) = n^{d/p}(1 + o(1))$ при фиксированных $d \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$ и $n \to \infty$. Оценка остаточного члена здесь при $p \geqslant 1$ вытекает из результатов работы [8], где изучены полиномиальные константы Никольского для веса Гегенбауэра. Именно, для всех $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливы неравенства

$$n^{d/p} \leqslant \mathcal{A}_{dp}(n) \leqslant \left(n + 2\lceil \tfrac{d+1}{2p} \rceil\right)^{d/p}. \tag{3}$$

Для $d=1$ можно убрать множитель 2 перед округлением. Если $d=1,2$, то неравенства справедливы и при $p<1$. Для остальных d это доказано только в ослабленной формулировке, когда супремум-норма функций в определении констант Никольского заменяется значением в определенной фиксированной точке (см. [8], раздел 2 и определение (8) в нем).

Сфера $\mathbb{S}^d$ ($d=1,2,3,\ldots$) принадлежит к семейству $\mathbb{M}^d$ ($d=\dim\mathbb{M}^d$) компактных римановых симметрических многообразий ранга 1 (см., например, [5, 11, 14]). Это семейство также включает проективные пространства $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ ($d=2,3,4,\ldots$), $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$ ($d=4,6,8,\ldots$), $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$ ($d=8,12,16,\ldots$), $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. На $\mathbb{M}^d$ имеется унифицированный гармонический анализ. В частности, определено семейство $\{\Pi_n(\mathbb{M}^d)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вложенных подпространств полиномов порядка не выше n. Каждое $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ содержит зональное воспроизводящее ядро, которое выражается через полином Якоби $P_n^{(\alpha_d+1,\beta_d)}$. Параметры

$$\alpha_d=\frac{d}{2}-1,\quad \beta_d=\frac{d}{2}-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 3 \tag{4}$$

соответственно для $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$ (подробнее см. раздел 2).

Константы Никольского на подпространствах $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ изучались в работах [9, 10]. В частности, в [9] показано, что

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d),L^p(\mathbb{M}^d))\asymp n^{d/p},\quad n\to\infty,\quad p\in[1,\infty).$$

Для $p=2$ константы Никольского вычислены в работе [10].

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}^d$ — компактное риманово симметрическое многообразие ранга* 1 *с параметрами α_d, β_d* (4) *и нормировкой меры* (6). *Тогда для всех $p\in[1,\infty)$ и $n\in\mathbb{Z}_+$*

$$n^{d/p}\leqslant\frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d),L^p(\mathbb{M}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant\bigl(n+\lceil\tfrac{\alpha_d+3/2}{p}\rceil+\lceil\tfrac{\beta_d+1/2}{p}\rceil\bigr)^{d/p}.$$

Данная теорема обобщает и уточняет неравенства (3) для случая сферы. В разделе 2 мы приведем вспомогательные утверждения о взаимосвязи многомерных и одномерных констант Никольского для веса Якоби, которые имеют самостоятельное значение. Теорема 1 будет доказана в разделе 3. В заключении мы приведем открытые проблемы.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $M=\mathbb{M}^d$ — d-мерное компактное риманово симметрическое многообразие ранга 1, которое также называется двухточечно-однородным пространством. Будем пользоваться сведениями из [5, 11, 14]. Имеем $M=G/H$, где G — группа движений M и H — стационарная подгруппа некоторой зафиксированной точки $o\in M$ (начала координат). Пусть ρ — метрика на M с нормировкой $\operatorname{diam}M=\pi$, dx — риманова метрика на M,

$$\int_M f(x)\,dx=\int_0^\pi\int_{\rho(o,\xi)=t}f(\xi)\,d\xi\,dt=\int_0^\pi S^tf(o)\,dt, \tag{5}$$

где точку o можно заменить любой другой, $S^tf(x)=\frac{1}{A(t)}\int_{\rho(x,\xi)=t}f(\xi)\,d\xi$ — оператор среднего значения по сфере радиуса t, $A(t)=\int_{\rho(x,\xi)=t}d\xi$ (не зависит от x), оператор S^0 тождественный,

$$A(t)=|\mathbb{S}^{d-1}|\,w_{\alpha_d\beta_d}(t),\quad w_{\alpha\beta}(t)=\bigl|2\sin\tfrac{t}{2}\bigr|^{2\alpha+1}\bigl|\cos\tfrac{t}{2}\bigr|^{2\beta+1},\quad |M|=\int_0^\pi A(t)\,dt, \tag{6}$$

параметры α_d, β_d определены в (4), $w_{\alpha\beta}$ — тригонометрический вес Якоби.

Пусть $\varphi_k^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}$ — тригонометрические полиномы Якоби. Они образуют базис в пространстве $L_A^2([0,\pi])$ с весом $A(t)$.

Для подпространства полиномов степени не выше n справедливо разложение

$$\Pi_n = \Pi_n(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k,$$

где $\mathcal{H}_k$ — подпространства гармоник на M порядка k. Пусть $d_k = \dim \mathcal{H}_k$, $\{Y_{kj}\}_{j=1}^{d_k}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Этот базис можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{d_k} Y_{kj}(x)\overline{Y_{kj}(y)} = \frac{d_k}{|M|}\,\varphi_k(\rho(x,y)) = Y_{k1}(\rho(x,y)), \tag{7}$$

где $\varphi_k = \varphi_k^{(\alpha_d,\beta_d)}$ — зональное воспроизводящее ядро $\mathcal{H}_k$. Отсюда для любого полинома $f \in \Pi_n$ получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{d_k} \widehat{f}_{kj} Y_{kj}(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{d_k} Y_{kj}(x) \int_M f(y)\overline{Y_{kj}(y)}\,dy = \int_M f(y)\Phi_n(\rho(x,y))\,dy,$$

где Φ_n — зональное воспроизводящее ядро подпространства Π_n,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{|M|}\sum_{k=0}^{n} d_k\varphi_k(t) = \frac{\dim \Pi_n}{|M|}\,\varphi_n^{(\alpha_d+1,\beta_d)}(t), \quad \dim \Pi_n = \sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой Кристоффеля–Дарбу для полиномов Якоби.

Нам потребуется формула умножения для гармоник

$$S^t Y_{kj}(x) = \varphi_k(t) Y_{kj}(x),$$

с помощью которой можно отображать произвольные полиномы в зональные. Также напомним, что для произвольного движения $g \in G$ сдвинутая гармоника

$$Y_{kj}(gx) \in \mathcal{H}_k.$$

Установим взаимосвязь между многомерными и одномерными константами Никольского. Для сферы это сделано в [1]. Для общих M подобная взаимосвязь применялась, например, в [10]. Однако там не рассматривался общий случай L^p. Пусть $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{P}_n$ — соответственно множества комплекснозначных 2π-периодических тригонометрических и алгебраических полиномов степени не выше n, «*even*» означает четные функции. Также как в работах [1, 2, 8] введем «ослабленную» константу Никольского равенством

$$\tilde{\mathcal{C}}_{x_0}(Y, L^p) = \sup_{f \in (Y \cap L^p)\setminus\{0\}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|_p}. \tag{8}$$

Далее положим для краткости $L^p = L^p(M)$, $L_A^p = L_A^p([0,\pi])$.

Лемма 1. *Для $p \in (0,\infty)$*

$$\mathcal{C}(\Pi_n, L^p) = \tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p).$$

Доказательство. Стандартно применяем G-инвариантность гармоник и меры dx, откуда для $f \in \Pi_n$ и $f_g(x) = f(gx)$, $g \in G$, будет $f_g \in \Pi_n$ и $\|f_g\|_p = \|f\|_p$, $p \in (0,\infty]$. Осталось выбрать сдвиг g из условия $go = x_0$, где $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$, тогда $\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p} = \frac{|f_g(o)|}{\|f_g\|_p}$. $\square$

Лемма 2. *Для* $p \in [1,\infty)$

$$\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_A).$$

Доказательство. По аналогии с [1] оценку снизу получим на подмножестве зональных полиномов, а для оценки сверху воспользуемся оператором усреднения по сферам S^t.

Пусть $f(x) = f_0(\rho(o,x)) = \sum_{k=0}^n a_k Y_{k1}(\rho(o,x))$ — произвольный зональный полином степени не выше n. Тогда по (7), (5) имеем $f_0 \in \mathcal{T}_n^{even}$ и

$$\int_M |f(x)|^p\,dx = \int_0^\pi |f_0(t)|^p A(t)\,dt.$$

Потому

$$\frac{|f(o)|}{\|f\|_{p;M}} = \frac{|f_0(0)|}{\|f_0\|_{p,A;[0,\pi]}},$$

откуда

$$\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) \geqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_A).$$

Теперь пусть $f(x)$ — произвольный полином из Π_n. Положим $f_0(t) = S^t f(o)$. Тогда $f_0(t) \in \mathcal{T}_n^{even}$ и $f_0(0) = f(o)$. По неравенству Гёльдера при $p \in [1,\infty)$

$$|f_0(t)|^p = \left|\frac{1}{A(t)}\int_{\rho(o,\xi)=t} f(\xi)\,d\xi\right|^p \leqslant \frac{1}{A(t)}\int_{\rho(o,\xi)=t} |f(\xi)|^p\,d\xi.$$

Поэтому

$$\int_0^\pi |f_0(t)|^p A(t)\,dt \leqslant \int_0^\pi \int_{\rho(o,\xi)=t} |f(\xi)|^p\,d\xi\,dt = \|f\|^p_{p;M},$$

откуда

$$\frac{|f(o)|}{\|f\|_{p;M}} \leqslant \frac{|f_0(0)|}{\|f_0\|_{p,A;[0,\pi]}}$$

и

$$\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_A).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3 ([2]). *Для* $p \in [1,\infty)$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])).$$

В [2] данная лемма доказана в алгебраической версии при помощи положительного оператора обобщенного сдвига Якоби. Однако, как обычно, для $g \in \mathcal{P}_n$ имеем $g(\cos t) \in \mathcal{T}_n^{even}$ и

$$\int_0^\pi |g(\cos t)|^p \left|2\sin\tfrac{t}{2}\right|^{2\alpha+1} \left|\cos\tfrac{t}{2}\right|^{2\beta+1} dt = \int_{-1}^1 |g(u)|^p\, 2^{\alpha-\beta}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta\,du.$$

Поэтому приходим к тригонометрической версии леммы, в частности, имеем

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_1\big(\mathcal{P}_n, L^p_{2^{\alpha-\beta}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta}([-1,1])\big).$$

Представляет интерес обобщить лемму 3 на весь класс полиномов $\mathcal{T}_n$ в пространстве $L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ на всем периоде. При $\alpha = \beta$ это сделано в работе [13] при помощи положительного оператора обобщенного сдвига Гегенбауэра–Чертовой [15]. Для случая $\alpha > \beta$ можно действовать аналогично, только взять оператор Якоби–Во Тхи Кук [3].

Лемма 4. *Пусть* $p \in [1, \infty)$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})). \tag{9}$$

Доказательство. При $\alpha = \beta$ лемма доказана в [13], поэтому пусть $\alpha > \beta$. Воспользуемся результатами работы [3], где есть следующие факты.

(1) Произвольный полином $f(t) \in \mathcal{T}_n$ можно разложить по ортогональному в $L^2_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ базису Якоби

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\varphi_k(t) + b_k\varphi_k'(t)), \quad b_0 = 0. \tag{10}$$

(2) На основе оператора Якоби–Курнвиндера в пространстве локально измеримых функций на торе $\mathbb{T}$ определяется положительный оператор обобщенного сдвига T^s. Его можно записать в виде

$$T^s f(t) = \int_{\mathbb{T}} f(u)\, d\mu_{s,t}(u), \quad s, t \in \mathbb{T},$$

где $\mu_{s,t}$ — локальная вероятностная мера. Имеем $T^{-s}f(t) = T^s f(t)$, $T^0 f(t) = f(t)$,

$$T^s(a_k\varphi_k(t) + b_k\varphi_k'(t)) = \varphi_k(s)(a_k\varphi_k(t) + b_k\varphi_k'(t)), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$|T^s f(t)| \leqslant \|f\|_\infty, \quad \|T^t f(\cdot)\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad p \geqslant 1,$$

где $\|f\|_p = \|f\|_{p,w_{\alpha\beta};\mathbb{T}}$. На четных функциях оператор T^s совпадает с симметричным оператором Якоби–Курнвиндера: $T^s f(t) = T^t f(s)$, если $f(-t) = f(t)$.

Перейдем к доказательству леммы. Нам потребуются свойства функции $g(s) = T^s f(t_0)$, где t_0 — произвольная фиксированная точка. Ясно, что $\|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Покажем, что

$$\|g\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad p \geqslant 1, \tag{11}$$

(в [3] этого свойства нет). В силу интерполяционной теоремы Рисса–Торина достаточно ограничиться случаем $p = 1$.

Если f — полином вида (10), то функция

$$g(s) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(s)(a_k\varphi_k(t_0) + b_k\varphi_k'(t_0))$$

будет четным полином по переменной s той же степени. Отсюда в силу ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} T^s f(t_0) w_{\alpha\beta}(s)\, ds = a_0 \int_{\mathbb{T}} w_{\alpha\beta}(s)\, ds = \int_{\mathbb{T}} f(t) w_{\alpha\beta}(t)\, dt.$$

Данное равенство можно расширить на произвольные функции $f \in L^1_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ и записать

$$\int_{\mathbb{T}} T^s |f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds = \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, w_{\alpha\beta}(t)\, dt = \|f\|_1.$$

Действительно, в силу симметричности T^s на четных функциях и других его свойств

$$\int_{\mathbb{T}} |T^s f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant \int_{\mathbb{T}} T^s|f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant \int_{\mathbb{T}} T^s(|f(t_0)| + |f(-t_0)|)\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds$$
$$= \int_{\mathbb{T}} T^{t_0}(|f(s)| + |f(-s)|)\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant 2\|f\|_1.$$

Теперь можно воспользоваться плотностью $\mathcal{T}_n$ в $L^1_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$.

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{T}} |g(s)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant \int_{\mathbb{T}} T^s |f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds = \|f\|_1$$

и (11) установлено.

Завершим доказательство леммы. Оценка снизу в (9) очевидна, поэтому установим оценку сверху. Для этого возьмем произвольный полином $f \in \mathcal{T}_n$, $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Как выше положим $g(s) = T^s f(t_0)$. Тогда $g \in \mathcal{T}_n^{even}$, $|g(0)| = |f(t_0)|$ и $\|g\|_p \leqslant \|f\|_p$. Поэтому

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p} \leqslant \frac{|g(0)|}{\|g\|_p} \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])),$$

что влечет нужную оценку сверху. □

Нам потребуется еще следующая лемма для множества $\mathcal{E}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на $\mathbb{R}$. Хорошо известно, что для таких функций f справедлива оценка $|f(z)| \leqslant \|f\|_{\infty;\mathbb{R}} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 5. *Пусть $p \in [1,\infty)$, $\alpha \geqslant -1/2$. Тогда*

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1^{even}, L^p_{2x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)).$$

Если $d \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d)) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1^{even}, L^p_{|\mathbb{S}^{d-1}|x^{d-1}}(\mathbb{R}_+)).$$

Лемма вытекает из известных результатов, приведенных в работе [8].

Замечание 1. *Для простоты мы не стали это писать, но в леммах 2, 5 и других аналогичных случаях имеют место равенства*

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_A([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_{2^{-1}A}(\mathbb{T})),$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1^{even}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{2^{-1}|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})).$$

Действительно, нижняя оценка следует на четных функциях из соответствующего подпространства Y, а оценка сверху вытекает из рассмотрения четной части функции $f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, для которой $f_e \in Y$, $f_e(0) = f(0)$ и $\|f_e\|_p \leqslant \|f\|_p$ при $p \geqslant 1$ в силу четности соответствующего веса.

3. Доказательство основной теоремы

Вначале установим следующий вариант теоремы 1 в пространстве $L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ при $p > 0$ для периодического веса Якоби $w_{\alpha\beta}$ (6), который имеет самостоятельное значение.

Предложение 1. *Пусть $p \in (0,\infty)$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{(2\alpha+2)/p} \leqslant \frac{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T}))}{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}))} \leqslant \bigl(n + \lceil\tfrac{\alpha+3/2}{p}\rceil + \lceil\tfrac{\beta+1/2}{p}\rceil\bigr)^{(2\alpha+2)/p}. \tag{12}$$

Доказательство. Воспользуемся доказательством аналогичной теоремы при $\alpha = \beta$ из работы [8]. Мы повторим его с небольшими сокращениями и изменениями в нужных местах. Положим для удобства

$$2a = 2\alpha + 1 \geqslant 0, \quad 2b = 2\beta + 1 \geqslant 0, \quad w(x) = \bigl|2\sin\tfrac{x}{2}\bigr|^{2a}\bigl|\cos\tfrac{x}{2}\bigr|^{2b}.$$

Получим оценку снизу в (12). Для $n=0$ она очевидна, поэтому полагаем $n\geqslant 1$. Возьмем произвольную функцию $f\neq 0$ из $\mathcal{E}_1\cap L^p_{|x|^{2a}}(\mathbb{R})$. По весовому неравенству Никольского она будет ограничена на оси.

Пусть $\varphi(x)=\bigl(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\bigr)^2$ — интегральное ядро Фейера. Тогда $\varphi\in\mathcal{E}_1$ и $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x+2\pi k)=1$ для $x\in\mathbb{R}$.

Положим $g(x)=f(nx)\varphi(x)$. Функция $g\in\mathcal{E}_{n+1}$ и $g(x)=O(x^{-2})$ при $x\to\pm\infty$, поэтому ее преобразование Фурье $\widehat{g}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}g(x)e^{-ixy}\,dx$ непрерывно на $\mathbb{R}$ и по теореме Пэли–Винера $\widehat{g}(y)=0$ при $|y|\geqslant n+1$. Отсюда для периодизации функции g получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(x+2\pi k)=\sum_{|k|\leqslant n}\widehat{g}(k)e^{ikx}=:T(x)\in\mathcal{T}_n.$$

Оценим сверху норму

$$\|T\|_{p,w}^p=\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p w(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\biggl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(x+2\pi k)\biggr|^p w(x)\,dx,$$

где

$$\biggl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(x+2\pi k)\biggr|^p\leqslant\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|\varphi(x+2\pi k)\biggr)^p=:I\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p.$$

Действительно, при $p<1$ в силу $|\varphi|\leqslant 1$

$$I\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p\varphi^p(x+2\pi k)\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p.$$

При $p\geqslant 1$ по неравенству Гёльдера

$$I\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^{p'}(x+2\pi k)\biggr)^{p/p'}\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p,$$

где была применена оценка

$$\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^q(x+2\pi k)\biggr)^{1/q}\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x+2\pi k)=1,\quad q\geqslant 1. \tag{13}$$

Таким образом, с учетом $w(\frac{x}{n})=\bigl|2\sin\frac{x}{2n}\bigr|^{2a}\bigl|\cos\frac{x}{2n}\bigr|^{2b}\leqslant\bigl|\frac{x}{n}\bigr|^{2a}$ для $x\in\mathbb{R}$, имеем

$$\|T\|_{p,w}^p\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+2\pi k))|^p w(x)\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi n(k-1/2)}^{2\pi n(k+1/2)}|f(x)|^p w(\tfrac{x}{n})\,dx$$
$$=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p w(\tfrac{x}{n})\,dx\leqslant\frac{1}{n^{2a+1}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p|x|^{2a}\,dx=\frac{\|f\|_{p,|x|^{2a}}^p}{n^{2a+1}}.$$

Отсюда и из

$$T(0)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(2\pi kn)\varphi(2\pi k)=f(0)$$

получаем

$$n^{(2a+1)/p}\,\frac{|f(0)|}{\|f\|_{p,|x|^{2a}}}\leqslant\frac{|T(0)|}{\|T\|_{p,w}}\leqslant\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n,L^p_w(\mathbb{T})),$$

что влечет оценку снизу в (12).

Докажем оценку сверху в (12). Пусть $n\geqslant 0$, $T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}$ — произвольный полином.

Положим $g(x)=T(x)\varphi^s(x)(\cos\frac{x}{2})^{2t}$, где целые неотрицательные степени s, t выберем чуть позже. Так как $T\in\mathcal{E}_n$, то $g\in\mathcal{E}_{n+s+t}$.

Оценим сверху норму g. Для $x\in\mathbb{R}$ имеем

$$
\begin{aligned}
|g(x)|^p|x|^{2a}=|T(x)|^p\Bigl|\tfrac{\sin(x/2)}{x/2}\Bigr|^{2ps}\bigl|\cos\tfrac{x}{2}\bigr|^{2pt}|x|^{2a}=\frac{|T(x)|^p\bigl|\frac{\sin(x/2)}{x/2}\bigr|^{2ps}\bigl|\cos\frac{x}{2}\bigr|^{2pt}|x|^{2a}}{\bigl|2\sin\frac{x}{2}\bigr|^{2a}\bigl|\cos\frac{x}{2}\bigr|^{2b}}\,w(x)\\
=|T(x)|^p\Bigl|\tfrac{\sin(x/2)}{x/2}\Bigr|^{2ps-2a}\bigl|\cos\tfrac{x}{2}\bigr|^{2pt-2b}w(x)\leqslant|T(x)|^p\varphi^{ps-a}(x)w(x),
\end{aligned}
$$

если выбрать t, так чтобы $pt-b\geqslant 0$. Выберем s из условия $sp-a\geqslant 1$. Тогда с учетом периодичности T, w

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^{2a}\,dx\leqslant\int_{\mathbb{R}}|T(x)|^p\varphi^{ps-a}(x)w(x)\,dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi(k-1/2)}^{2\pi(k+1/2)}|T(x)|^p\varphi^{ps-a}(x)w(x)\,dx\\
=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x+2\pi k)|^p\varphi^{ps-a}(x+2\pi k)w(x+2\pi k)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|w(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^{ps-a}(x+2\pi k)\,dx\\
\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|w(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

где на заключительном шаге мы воспользовались (13).

Сделаем замену $g(x)=f((n+s+t)x)$. Тогда $f\in\mathcal{E}_1$,

$$
\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p|x|^{2a}\,dx=(n+s+t)^{2a+1}\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^{2a}\,dx\leqslant(n+s+t)^{2a+1}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^pw(x)\,dx
$$

и $f(0)=g(0)=T(0)$. Следовательно,

$$
\frac{|T(0)|}{\|T\|_{p,w}}\leqslant(n+s+t)^{(2a+1)/p}\,\frac{|f(0)|}{\|f\|_{p,|x|^{2a}}}\leqslant(n+s+t)^{(2a+1)/p}\,\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1,L^p_{|x|^{2a}}(\mathbb{R})).
$$

Осталось выбрать s,t минимально возможными при указанных на них ограничениях, что дает $s=\lceil\frac{a+1}{p}\rceil$, $t=\lceil\frac{b}{p}\rceil$ и оценку сверху в (12). $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 1. Продолжим пользоваться обозначениями раздела 2. Последовательно применим леммы 1, 2, 4, 5, тогда с учетом замечания 1 получаем при $p\geqslant 1$

$$
\mathcal{C}(\Pi_n,L^p)=\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n,L^p)=\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even},L^p_A([0,\pi]))=\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n,L^p_{2^{-1}|\mathbb{S}^{d-1}|\,w_{\alpha_d\beta_d}}(\mathbb{T})),
$$

$$
\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))=\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1,L^p_{2^{-1}|\mathbb{S}^{d-1}|\,|x|^{d-1}}(\mathbb{R})).
$$

Отсюда и из $\alpha_d=d/2-1$ находим

$$
\frac{\mathcal{C}(\Pi_n,L^p)}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d,L^p(\mathbb{R}^d))}=\frac{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n,L^p_{w_{\alpha_d\beta_d}}(\mathbb{T}))}{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1,L^p_{|x|^{2\alpha_d+1}}(\mathbb{R}))}.
$$

Осталось воспользоваться предложением 1. Теорема 1 доказана.

4. Заключение

Все наши результаты доказаны для случаев $p \geqslant 1$, $q = \infty$ и компактных пространств ранга 1. Поэтому в развитие темы интересно решить следующие проблемы.

1. Доказать теорему 1 при $p < 1$.
2. Установить аналог теоремы 1 для тригонометрического случая (см. (2)).
3. Обобщить приведенные результаты на случай $q \neq \infty$.

Проблемы 1 и 3 кажутся особенно сложными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.
2. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Anal. Math. 2016. Vol. 42, № 2. P. 91–120.
3. Во Тхи Кук. Операторы обобщенного сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 1. С. 17–43.
4. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, № 1. P. 161–185.
5. Gangolli R. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters // Ann. Inst. H. Poincaré. 1967. Vol. 3, no. 2. P. 121–226.
6. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // J. Fourier Anal. Appl. 2020. Vol. 26, № 11.
7. Горбачев Д.В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.
8. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.
9. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3 (231). С. 179–180.
10. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР. 1992. Том 194. С. 111–119.
11. Jaming P., Speckbacher M. Concentration estimates for finite expansions of spherical harmonics on two-point homogeneous spaces via the large sieve principle // Sampl. Theory Signal Process. Data Anal. 2021. Vol. 19, no. 9.
12. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, № 3. P. 459–468.

13. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.

14. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

15. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5–27.

REFERENCES

1. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. "Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, vol. 284, no. suppl. 1, pp. 9–23.

2. Arestov, V. & Deikalova, M. 2016. "Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval", *Anal. Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 91–120.

3. Vo Thi Cuc. 2012. "Generalized translation operators in L_p-spaces on torus with Jacobi weight and their application", *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russ.)

4. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere", *J. d'Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

5. Gangolli, R. 1967. "Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters", *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 3, no. 2, pp. 121–226.

6. Ganzburg, M.I. 2020. "Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities", *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 26, no. 11.

7. Gorbachev, D.V. 2005. "An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. Suppl. 2, pp. S117–S138.

8. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

9. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

10. Ivanov, V.A. 1993. "Precise results in the problem of the Bernstein–Nikol'skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124.

11. Jaming, P. & Speckbacher, M. 2021. "Concentration estimates for finite expansions of spherical harmonics on two-point homogeneous spaces via the large sieve principle", *Sampl. Theory Signal Process. Data Anal.*, vol. 19, no. 9.

12. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. "Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle", *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.

13. Martyanov, I.A. 2020. "Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247–258. (In Russ.)

14. Helgason, S. 1962. “Differential geometry and symmetric spaces”, Academic Press, New York.

15. Chertova, D.V. 2009. “Jackson theorems in L_p-spaces, $1 \leqslant p \leqslant 2$, with periodic Jacobi weight”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russ.)

Получено 27.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.