

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 514.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-88-99

**О проблеме сопряженности слов в некотором классе
подгрупп групп Артина¹**

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя

Безверхний Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Аннотация

Одной из основных проблем в комбинаторной теории групп является проблема равенства и сопряженности слов. Известно, что в классе конечноопределенных групп данная проблема алгоритмически неразрешима. Возникает задача изучения данных проблем в определенных классах групп, а также, наследуют ли подгруппы данного класса групп алгоритмическую разрешимость проблемы сопряженности слов.

Д. Коллинзом и К. Миллером была определена группа с разрешимой проблемой сопряженности слов, содержащая подгруппу конечного индекса, в которой не разрешима проблема сопряженности слов. А также построена группа с неразрешимой проблемой сопряженности слов, содержащая подгруппу конечного индекса с разрешимой проблемой сопряженности слов.

Э. Артином были определены группы кос и им же было доказано, что в группах кос алгоритмически разрешима проблема равенства слов. А.А. Марков построил алгебраическую теорию групп кос и передоказал, используя построенную теорию, проблему равенства слов.

Ф. Гарсайд доказал разрешимость проблемы сопряженности слов в группах кос $\mathfrak{B}_{n+1}$. Э. Брискорн и К. Сайто, используя идеи Ф. Гарсайда, доказали разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа. Известно, что данному классу групп принадлежат группы кос.

Интерес представляет исследование разрешимости данной проблемы в подгруппах групп данного класса групп, в частности, в нормальном делителе, порожденном квадратами образующих группы называемой крашенной подгруппой данной группы.

В [1] доказано, что в крашенной подгруппе групп Артина конечного типа проблема сопряженности слов разрешима.

Известно, что в группах Артина с древесной структурой проблема сопряженности слов также разрешима. [2]. В данной статье доказывается, что крашенные подгруппы групп Артина с древесной структурой наследуют свойство положительной разрешимости проблемы сопряженности слов.

Ключевые слова: Группы Артина, крашенная подгруппа, проблема сопряженности слов.

Библиография: 12 названий.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-41-710002_p_a.

Для цитирования:

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О проблеме сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 88–99.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 514.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-88-99

**On the problem of conjugacy of words in a certain class
of subgroups of Artin groups**

V. N. Bezverkhniĭ, N. B. Bezverkhnyaya

Bezverkhniĭ Vladimir Nicolaevich — professor, doctor of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of Russia (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Bezverkhnyaya Natalia Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of Russia (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Abstract

One of the main problems in combinatorial group theory is the problem of equality and conjugacy of words. It is known that this problem is algorithmically unsolvable in the class of finitely defined groups. The problem arises of studying these problems in certain classes of groups, as well as whether subgroups of this class of groups inherit the algorithmic solvability of the word conjugacy problem.

D. Collins and K. Miller defined a group with a solvable word conjugacy problem containing a subgroup of finite index in which the word conjugacy problem is not solvable. We also construct a group with an unsolvable word conjugacy problem containing a subgroup of finite index with a solvable word conjugacy problem.

E. Artin defined braid groups and proved that the problem of word equality is algorithmically solvable in braid groups. A. A. Markov constructed an algebraic theory of braid groups and re-proved, using the constructed theory, the problem of word equality.

F. Garside proved that the conjugacy problem of words in braid groups B_{n+1} is solvable. Saito, using the ideas of F. Garside, proved the solvability of the problem of equality and conjugacy of words in Artin groups of finite type. It is known that this class of groups belongs to braid groups.

The interest is to study the solvability of this problem in subgroups of the class groups, in particular, in the normal divisor generated by the squares forming a group called painted subgroup of this group.

In [1] it is proved that in a colored subgroup of Artin groups of finite type, the word conjugacy problem is solvable.

It is known that in Artin groups with a tree structure, the word conjugacy problem is also solvable. [2]. In this paper, we prove that colored subgroups of Artin groups with a tree structure inherit the property of positive solvability of the word conjugacy problem.

Keywords: Artin groups, colored subgroup, word conjugation problem.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

V. N. Bezverkhniĭ, N. B. Bezverkhnyaya, 2021, “On the problem of conjugacy of words in a certain class of subgroups of Artin groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 88–99.

1. Введение

В комбинаторной теории групп основными алгоритмическими проблемами являются проблемы равенства и сопряженности слов. Если в группе разрешима проблема сопряженности слов, то будет ли она разрешима в подгруппах данной группы? Д. Коллинзом и К. Миллером было доказано, что существуют группы с разрешимой проблемой сопряженности слов, содержащие подгруппу конечного индекса, в которой проблема сопряженности неразрешима. И наоборот, существуют группы, в которых в подгруппах конечного индекса разрешима проблема сопряженности слов, а в самих группах неразрешима. Для групп Артина конечного типа в было доказано, что крашенные подгруппы, то есть нормальные подгруппы, порожденные квадратами образующей группы, наследуют свойства сопряженности слов групп.

В данной статье авторами доказывается, что крашенные подгруппы групп Артина с древесной структурой наследуют свойство разрешимости проблемы сопряженности слов.

2. Группы Артина с двумя образующими

Группа Артина определяется конечной системой образующих: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ и системой определяющих соотношений: $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}$, где $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots$ – слово, из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_{ij} , m_{ij} – элемент симметрической матрицы Кокстера $M = (m_{ij})$, $i, j \in \overline{1, n}$, $m_{ii} = 1$ для всех $i \in \overline{1, n}$ при $i \neq j$, $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$, $m_{ij} = \infty$ – означает, что соотношение с образующими σ_i, σ_j отсутствует.

Копредставление группы Артина имеет вид:

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1, n} \rangle \quad (1)$$

Поставим в соответствие группе G конечный граф Γ , каждой вершине v_i которого ставится в соответствие образующий σ_i группы G , а ребру, соединяющему вершины v_i, v_j – элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре соответствует $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Кокстера, а соответствующая ему группа Артина имеет копредставление (1) и обозначается G_Γ .

С каждой группой Артина G_Γ связана группа Кокстера $\overline{G}_\Gamma$. Если группа $\overline{G}_\Gamma$ конечна, то группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данный класс групп содержит группы кос $\mathcal{B}_{n+1}$, в которых Ф. А. Гарсайдом в 1969 г. была решена проблема сопряженности слов. [3]

Э. Брискорном и К. Сайто была доказана разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа. [4]

П. Шупп и К. Анпель определили широкие классы групп Артина большого ($m_{ij} \geq 3$) и экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$). [5]

Для групп экстрабольшого типа, используя диаграммный метод, ими была решена проблема равенства и сопряженности слов. [5]

В работах [6], [7] авторами независимо были решены проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа.

В [8] были определены группы Артина с древесной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Группа Артина G_Γ называется группой Артина с древесной структурой, если соответствующий ей граф Γ , является дерево-графом.*

В группах Артина с древесной структурой числа Кокстера m_{ij} при $i \neq j$, принимают любые значения $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$.

Для описания строения диаграмм, соответствующих равенству и сопряженности слов в группе Артина с древесной структурой нам, понадобятся следующие леммы:

ЛЕММА 1. [5] Если $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$ группа Артина, w — нетривиальное слово в свободной группе, и равно w единице в G_{ab} , то $\|w\| \geq 2m_{ab}$.

($\|w\|$ — слоговая длина слова w в группе, являющейся свободным произведением циклических групп $\langle a \rangle, \langle b \rangle$).

ЛЕММА 2. [5] Пусть $w \in G_{ab}, w = w_1 w_2$, w — нетривиальное свободно приведенное слово, равно единице в G_{ab} . Тогда

- а) если $\|w_1\| \leq m_{ab}$, то $\|w_1\| \leq \|w_2\|$,
- б) если $\|w_1\| < m_{ab}$, то $\|w_1\| < \|w_2\|$.

ЛЕММА 3. [9] Пусть $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$ — группа Артина, $w \in G_{ab}, w$ — циклически несократимое слово в свободной группе и имеет слоговую длину, равную $2m_{ab}$ и равно единице в G_{ab} .

Тогда, если $m_{ab} = 2k + 1$, то w имеет вид:

- а) $a^m b a \dots a b^{-m} a^{-1} \dots b^{-1}$ либо
 - б) $a b \dots a^m b^{-1} \dots b^{-m}$, либо
- обратные им, либо их циклические перестановки;
- если $m_{ab} = 2k$, то w имеет вид:
- а) $a^m b a \dots b a^{-m} b^{-1} \dots b^{-1}$ либо
 - б) $a b \dots b^m a^{-1} b^{-1} \dots b^{-m}$, либо
- обратные им, либо их циклические перестановки, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

3. Доказательство основного результата

Пусть $w = v$ в группе Артина G с древесной структурой, то есть $wv^{-1} = 1$ в G .

Из теоремы ван-Кампена следует, что равенству $wv^{-1} = 1$ в G соответствует диаграмма M , $\partial M = \gamma\delta$, где $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$, с областями, метки которых есть определяющие соотношения группы G .

Будем говорить, что диаграмма M R -приведена, если для любых двух областей D, D' , имеющих общее ребро, их метки принадлежат разным группам $G_{ab}, G_{a'b'}$ где $a = a'$ либо $b = b'$.

Диаграмма M с границей $\partial M = \gamma\delta$ называется однослойной, если любая область $D \subset M$ имеет непустое пересечение как с γ так и с δ , то есть $\partial D \cap \gamma \neq \emptyset, \partial D \cap \delta \neq \emptyset$.

Через $d(D)$ обозначим число ребер, на которые соотношение $\phi(D)$ разбивает границу D , при этом, меткой каждого ребра является некоторая степень образующего группы, двум соседним ребрам соответствуют степени с разными основаниями.

Обозначим через $\|\varphi(D)\|$ слоговую длину метки области D , равную числу ребер в D .

Пусть $\gamma_1 = \partial D \cap \gamma$, тогда $|\gamma_1|$ есть число ребер пути γ_1 , равное числу слогов метки $\varphi(\gamma_1)$, $|\gamma_1| = \|\varphi(\gamma_1)\|$

Область D назовем граничной областью с $\gamma(\delta)$, если $\partial D \cap \gamma \neq \emptyset, (\partial D \cap \delta \neq \emptyset)$.

Граничная с $\gamma(\delta)$ область D называется деновской, если $|\partial D \cap \gamma| > |\partial D \setminus (\partial D \cap \gamma)|$, то есть $\|\varphi(\partial D \cap \gamma)\| > \|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \gamma))\|$.

Аналогично определяется деновская область вдоль границы δ диаграммы M . Пусть D — деновская область диаграммы M вдоль границы γ . Тогда удаление пути $\gamma_1 = \partial D \cap \gamma$, то есть, замена пути $\gamma = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0'$ границы ∂M путем $\gamma' = \gamma_0 (\partial D \setminus \gamma_1)^{-1} \gamma_0'$ назовем деновским сокращением слоговой длины $\varphi(\gamma)$ при этом метка $\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_0) \varphi(\gamma_1) \varphi(\gamma_0')$ заменяется меткой $\varphi(\gamma') = \varphi(\gamma_0) (\varphi(\partial D \setminus \gamma_1))^{-1} \varphi(\gamma_0')$, $\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma')$ в группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [7],[9]. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$ — образует полосу в R -приведенной диаграмме M вдоль граничного пути $\gamma, \partial M = \gamma\delta^{-1}$, если:

1. $\forall i, 1 \leq i \leq n, \partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$, где γ_i правильная часть граничного цикла ∂M ;
2. $\forall i, 1 \leq i \leq n-1, \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i, e_i$ – ребро;
3. $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \setminus (\partial D_1 \cap \gamma)|, |\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \setminus (\partial D_n \cap \gamma)|$
4. $\forall j, 2 \leq j \leq n-1, |\partial D_j \cap \gamma| + 2 = |\partial D_j \setminus (\partial D_j \cap \gamma)|$
5. $\partial \Pi \cap \partial M$ – правильная часть в граничном цикле ∂M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Удаление из граничного цикла ∂M пути $\partial \Pi \cap \gamma$ назовем R^* – сокращением границы ∂M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть M – связная, односвязная, R – приведенная диаграмма над группой Артина G с древесной структурой, где $\partial M = \gamma \delta^{-1}$ граничный цикл M с $\varphi(\gamma) \varphi^{-1}(\delta) = 1$ в G .

Тогда под R^* будем обозначать сокращение $\varphi(\partial M)$ вдоль γ состоящее в замене слова $\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_0) \varphi(\gamma_1) \varphi(\gamma'_0)$, где $\varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma \cap \partial \Pi)$, словом $\varphi(\gamma') = \varphi(\gamma_0) (\varphi(\Pi \setminus (\gamma \cap \partial \Pi)))^{-1} \varphi(\gamma'_0)$, где Π – полоса диаграммы M вдоль границы γ .

Аналогично определяется R^* вдоль границы δ .

ЛЕММА 4. Пусть M – связная, односвязная, R – приведенная диаграмма над группой Артина G с древесной структурой, соответствующая равенству слов $w = v$ в G ; $\partial M = \gamma \delta^{-1}$, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v$, слова w, v – R несократимы. Тогда диаграмма M не содержит внутренних вершин и является однослойной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в M содержится внутренняя вершина v . Тогда существует по меньшей мере три ребра e_1, e_2, e_3 , выходящие из v .

а) Пусть $\varphi(e_i) \neq \varphi(e_j)$ при $i \neq j, j \in \{1, 2, 3\}$, нетрудно убедиться в том, что это противоречит тому, что граф Γ группы G есть дерево-граф.

б) Пусть метки всех ребер: $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ выходящих из внутренней вершины v являются степенями одного образующего a .

Рассмотрим области $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ имеющие общую вершину v . Так как диаграмма M R – приведена, то метки областей $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ различны. Пусть $D_1 \cap D_2 = e_2, D_2 \cap D_3 = e_3, \dots, D_{n-2} \cap D_{n-1} = e_{n-1}, D_{n-1} \cap D_n = e_n, D_n \cap D_1 = e_1, \varphi(e_1) = a^{\alpha_1}, \varphi(e_2) = a^{\alpha_2}, \varphi(e_n) = a^{\alpha_n}$.

Тогда

$$\varphi(D_1) = a^{\alpha_n} \varphi(\gamma_1) a^{\alpha_1}, \varphi(D_2) = a^{\alpha'_1} \varphi(\gamma_2) a^{\alpha_2}, \dots, \varphi(D_n) = a^{\alpha'_n} \varphi(\gamma_n) a^{\alpha'_1}$$

Очевидно, что концы каждого пути $\gamma_i \subset \partial D_i$ принадлежат ∂M , в противном случае, если одна из концевых вершин пути γ_i будет внутренней точкой, то из нее будут выходить минимум три ребра с разными метками, что невозможно.

Рассмотрим поддиаграмму M_i диаграммы M , $\partial M_i = \bar{\gamma}_i \gamma_i^{-1}$, где $\bar{\gamma}_i \subset \partial M, \bar{\gamma}_i$ соединяет концевые вершины v_i, v_{i+1} пути γ_i .

Так как $|\gamma_j| \geq 3$ и M – R -приведена, то вершины пути γ_i являются внутренними вершинами диаграммы M , что невозможно, поэтому $\bar{\gamma}_i \equiv \gamma_i$, но тогда ∂M R -сократима.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть wiv – циклически R несократимые слова группы Артина G с древесной структурой. Тогда кольцевая диаграмма M , соответствующая сопряженности слов wiv в G , где γ и δ граничные циклы M , $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$, является однослойной.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

ЛЕММА 6. [9] Пусть G — группа Артина с древесной структурой, и пусть степень образующего a^m сопряжена с w в G , где w — циклически, R и R^* несократимо. Тогда w есть степень некоторого образующего b^k причем $m = k$.

ЛЕММА 7. Пусть $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$. Если $m_{ab} = 2k$, то для любого $z \in G_{ab}$ соотношение $za^m z^{-1} = b^m$ не имеет места, $m \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m_{ab} = 2k$, тогда группа $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab \rangle^{2k} = \langle ba \rangle^{2k} \rangle$ изоморфна группе $G = \langle x, y; y^{-1}x^ky = x^k \rangle$ определяемой отображением $\varphi : a \rightarrow y, b \rightarrow xy^{-1}$. [7]

Допустим, что в группе G_{ab} имеет место равенство $za^m z^{-1} = b^m$, тогда в группе G $\varphi(z)\varphi(a^m)\varphi(z)^{-1} = \varphi(b^m)$ и $\varphi(a)^m = y^m, \varphi(b)^m = xy^{-1}xy^{-1} \dots xy^{-1}$. Данные слова в группе G не сопряжены (лемма Бритона).

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. [2], [9]. Пусть G — конечнопорожденная группа Артина с древесной структурой. Слова w и v , слоговые длины которых $\|w\| = \|v\| = 1$, сопряжены в G тогда и только тогда, когда существует ломаная, графа Γ , соединяющая вершины, соответствующие данным образующим группы и каждому из ребер, выделенного пути, соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера m_{ij} и слово z сопрягающее w в v будет произведением кусков z_i определяющих соотношений группы, каждое из которых соответствует данному ребру, $\|z_i\| = m_{ij} - 1$.

ЛЕММА 9. Центризатор образующего группы Артина с древесной структурой конечнопорожден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть Γ дерево-граф группы G , каждой вершине которого поставлен в соответствие образующий G , а ребру соответствующему σ_i, σ_j число Кокстера m_{ij} , которое соответствует определяющее соотношение $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}$.

Рассмотрим путь γ_{k+1} в Γ , выходящий из σ_1 с вершинами, которые для простоты рассуждения запишем как $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}$, в котором всем ребрам $(\sigma_i, \sigma_{i+1}), i \leq k$, соответствуют нечетные числа Кокстера $m_{ii+1} = 2k_i + 1$, а ребру (σ_k, σ_{k+1}) — четное число $m_{kk+1} = 2k$, если оно содержится в Γ .

Каждому ребру $(\sigma_i, \sigma_{i+1}), i = \overline{1, k}$ поставим в соответствие кусок z_i определяющего соотношения $\langle \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle^{m_{ii+1}} = \langle \sigma_{i+1} \sigma_i \rangle^{m_{i+1i}}, z_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \dots \sigma_i, |z_i| = m_{i,i+1} - 1$, введем в рассмотрение $\bar{z}_i = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+1}, |\bar{z}_i| = m_{i,i+1} - 1$ — являющийся куском указанного определяющего соотношения.

Легко проверить, что слова $z^{(p)}(\sigma_1 \sigma_s \sigma_i) = z_1 z_2 \dots z_{s-1} (z_s \dots z_i \sigma_{i+1}^m \bar{z}_i \dots \bar{z}_s)^p \bar{z}_{s-1} \dots \bar{z}_1$ при любых $1 \leq i \leq k, 1 < s \leq i, m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}$, принадлежат центризатору элемента σ_1 . Варьируя в $z^{(p)}(\sigma_1 \sigma_s \sigma_i)$ параметры s, p можно получить слова

$$\begin{aligned} z^{(0)}(\sigma_1, \sigma_i) &= z_1 z_2 \dots z_i \bar{z}_i \dots \bar{z}_1; \\ z^{(1)}(\sigma_1, \sigma_i) &= z_1 z_2 \dots z_i \sigma_{i+1} \bar{z}_i \dots \bar{z}_1; \\ z^1(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_i) &= \bar{z}_1^{-1} \dots \bar{z}_{s-1}^{-1} (z_s \dots z_i \sigma_{i+1} \bar{z}_i \dots \bar{z}_s) \bar{z}_{s-1} \dots \bar{z}_1 \\ \bar{z}^1(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_i) &= z_1 \dots z_{s-1} (z_s \dots z_i \sigma_{i+1} \bar{z}_i \dots \bar{z}_s) z_{s-1}^{-1} \dots z_1^{-1}; \\ z(\sigma_1, \sigma_i) &= z_1 \dots z_i \sigma_{i+1} z_i^{-1} \dots z_1^{-1} \\ \bar{z}(\sigma_1, \sigma_i) &= \bar{z}_1^{-1} \dots \bar{z}_i^{-1} \sigma_{i+1} \bar{z}_i \dots \bar{z}_1 \end{aligned}$$

К данному множеству слов нужно добавить слова $z^{(1)}(\sigma_1 \sigma_s, \sigma_i), \bar{z}^{(1)}(\sigma_1 \sigma_s, \sigma_i)$ при $1 < s \leq i$. Слова $z(\sigma_1, \sigma_i), \bar{z}(\sigma_1, \sigma_i)$ равны σ_1 в группе G .

Подгруппу, порожденную данным множеством слов, соответствующую пути γ_i , выходящего из σ_1 и входящего в σ_i , обозначим $H(\sigma_1, \sigma_i)$,

$$H(\sigma_1, \sigma_i) < C_G(\sigma_1).$$

Пути γ_{k+1} , оканчивающегося ребром (σ_k, σ_{k+1})

С числом Коксетера $m_{k,k+1} = 2k$, и соответствующим ему куском z_{k+1} определяющего соотношения: $\langle \sigma_k \sigma_{k+1} \rangle^{m_{k,k+1}} = \langle \sigma_{k+1}, \sigma_k \rangle^{m_{k+1,k}}$, где $z_{k+1} = \sigma_{k+2} \sigma_{k+1} \sigma_{k+2} \cdots \sigma_{k+2}$, $|z_{k+1}| = m_{k,k+1} - 1$, соответствует подгруппа $H(\sigma_1 \sigma_{k+1})$, к которой кроме образующих

$$z^{(1)}(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = z_1 z_2 \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_1};$$

$$z^{(0)}(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = z_1 z_2 \cdots z_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_1};$$

$$z(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = z_1 \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} z_{k+1}^{-1} \cdots z_1^{-1}$$

$$\overline{z}(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = \overline{z_1}^{-1} \cdots \overline{z_{k+1}}^{-1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_1}$$

Нужно добавить образующие

$$\overline{z}^1(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_{k+1}) = \overline{z_1}^{-1} \cdots \overline{z_{s-1}}^{-1} (z_s \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_s}) \overline{z_{s-1}} \cdots \overline{z_1};$$

$$\overline{z}^1(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_{k+1}) = z_1 \cdots z_{s-1} (z_s \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_s}) z_{s-1}^{-1} \cdots z_1^{-1},$$

где $1 < s \leq k+1$. Слова $z(\sigma_1, \sigma_{k+1})$, $\overline{z}(\sigma_1, \sigma_{k+1})$ равны σ_1 в группе G .

Отметим, что для продолжения пути $\gamma_k \subset \Gamma$, нужно начинать из вершины σ_k , так как слово $z(\sigma_1, \sigma_{k+2}) \notin C_G(\sigma_1)$

Подгруппы $H(\sigma_1, \sigma_j)$, $1 \leq j \leq n$, (n — число вершин графа Γ) соответствующие всем путям, выходящим из вершины σ_1 графа Γ группы G , образующей свободное произведение подгруппы объединенных по циклической подгруппе $\langle \sigma_1 \rangle$. Обозначим эту подгруппу $H(\sigma_1)$, которая будет иметь копредставление

$$H(\sigma_1) = \prod_{j=1}^n * \langle H(\sigma_1, \sigma_j); \sigma_1 = \sigma_1 \rangle.$$

Очевидно, $H(\sigma_1) < C_G(\sigma_1)$. Нетрудно показать, что любое $w \in C_G(n)$ принадлежит $\langle \sigma_1 \rangle \text{ rangle} \times H(\sigma_1)$, для этого необходимо использовать структуры образующих подгруппы $H(\sigma_1)$ и конечность графа Γ .

Таким образом

$$C_G(\sigma_1 = \langle \sigma_1 \rangle) \times \prod_{j=1}^n * \langle H(\sigma_1, \sigma_j); \sigma_1 = \sigma_1 \rangle$$

Отсюда следует, что централизатор $C_G(\sigma_1)$ — конечнопорожден. Лемма доказана.

Пусть w, v — циклически, R и R^* несократимы в G и пусть w сопряжено v в G . Тогда существует кольцевая диаграмма сопряженности M с граничными циклами γ, δ , такими, что $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\sigma) = v^{-1}$.

Из леммы 5 следует, что диаграмма сопряженности слов является однослойной.

Пусть $D_1, D_2, D_3, \dots, D_s$ — последовательность областей, образующих данную диаграмму M , и пусть для любого $s, 1 \leq s < n, D_s \cap D_{s+1} = e_s, D_n \cap D_1 = e_n$, и $\varphi(e_s) = a_j^{k_{sj}}$, где a_j — образующий группы G .

Параметром кольцевой диаграммы M называется число, ограничивающее абсолютные величины показателей степеней меток внутренних ребер диаграммы M .

ЛЕММА 10. Пусть w, v — циклически, R и R^* несократимы сопряжены в G (G — с древесной структурой). Тогда $|w| = |v|$.

При доказательстве непосредственно используется лемма 3.

Обозначим через L замкнутый простой цикл кольцевой однослойной диаграммы M с граничными циклами γ, δ .

Покажем, что параметр p кольцевой диаграммы сопряженности слов w, v не превосходит c , где c – максимальный по абсолютной величине показатель степени образующего, содержащегося в словах w, v .

Пусть D_i область M и $\varphi(D_i)$ ее метка.

1. Допустим, что $\|\partial D_i \cap \gamma\| = \|\partial D_i \cap \delta\|$, тогда
 - i) если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_i) a_\alpha^k$, либо $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_1) a_\alpha^m \varphi(\gamma_2)$, либо $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = a_\alpha^m \varphi(\gamma_2)$, то $|\varphi(e_{i-1})| = |\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i)| = |\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})| = |\varphi(e_{i-1})| = 1$
 - ii) если $|\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i)| = k$, то $|\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})| = k$
2. Допустим, что $\|\partial D_i \cap \gamma\| = \|\partial D_i \cap \delta\| + 2$, ($\|\partial D_i \cap \delta\| = \|\partial D_i \cap \gamma\| + 2$);
 - iii) если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_i) a_\alpha^k$, ($\varphi(\partial D_i \cap \delta) = \varphi(\delta_i) a_\alpha^k$), то $|\varphi(e_{i-1})| = |\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i)| = k$, аналогично, если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = a_\alpha^k \varphi(\gamma_2)$, ($\varphi(\partial D_i \cap \delta) = a_\alpha^k \varphi(\delta_2)$), то $|\varphi(e_i)| = |\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})| = k$;
 - iv) если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_1) a_\alpha^k \varphi(\gamma_2)$, либо $\varphi(\partial D_i \cap \delta) = \varphi(\delta_1) a_\beta^k \varphi(\delta_2)$ метки ребер $e_{i-1}, e_i : \varphi(e_{i-1}) = \varphi(e_i) = 1$.

Заметим, что в случае (ii), если все внутренние ребра $\varphi(e_i), i = \overline{1, n}$, имеют $|\varphi(e_i)| = k > 1$, то k можно взять равным единице.

Пусть максимальная слоговая длина определяющих соотношений группы G равна R_0 , тогда длина замкнутого цикла диаграммы M ограничена сверху, а именно, $|\varphi(L)| < R_0(|v| + |w|)p$, где p – параметр диаграммы M .

Обозначим через $S(w, v)$ – множество всех слов группы G , длина которых не превышает $L_0 = R_0(|v| + |w|)p$.

Пусть $\mathcal{H}$ – множество всех степеней образующих группы G , показатели которых k ограничены по абсолютной величине числом p , то есть $\mathcal{H} = \{a_i^k | 1 \leq i \leq n, |k| \leq p\}$.

Назовем элементы $\mathcal{H}$ кусками.

Рассмотрим следующую последовательность

$$w_0, H_1, w_1, H_2, w_2, \dots, H_m, w_m, H_{m+1}, \dots \quad (2)$$

где $w = w_0, w_i = H_i^{-1} w_{i-1} H_i, H_i \in \mathcal{H}, \forall i, w_i \in S(w, v)$.

Обозначим через $S_0 = |S(w, v)|$ – число слов, содержащихся в $S(w, v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Последовательность $w_0, H_1, w_1, H_2, w_2, \dots, H_m, w_m, H_{m+1}, \dots$ назовем фундаментальной, если не существуют $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha < \beta \leq m$, такие, что $w_\alpha = w_\beta$.

ЛЕММА 11. Пусть w, v – циклически, R и R^* несократимы в G (G – группа Артина с древесной структурой). w, v сопряжены в G тогда и только тогда, когда существует фундаментальная последовательность, оканчивающаяся, словом w_m , что $w_m = v$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Последовательность

$$w_0, H_1, w_1, H_2, w_2, \dots, H_\alpha, w_\alpha, H_{\alpha+1}, \dots, H_\beta, w_\beta, H_{\beta+1}, \dots \quad (3)$$

назовем базисной, если существуют α, β , такие, что $w_\alpha = w_\beta$, причем β – наименьшее из возможных.

Данной последовательности соответствует слово

$$T_{\alpha\beta} = H_1 H_2 \dots H_{\alpha-1} H_\alpha \dots H_\beta H_\alpha^{-1} \dots H_1^{-1} \quad (4)$$

принадлежащее централизатору элемента $w_0 = w$, слово, (4) определяется последовательностью слов: $w_0, w_1, w_2, \dots, w_\alpha, \dots, w_\beta$, в которой все w_i , кроме w_α, w_β того различны и для любых w_{i-1}, w_i существует $H_i \in \mathcal{H}$ такое, что $H_i^{-1}w_{i-1}H_i = w_i$.

Так как множество слов $S(w, v)$ конечно, то число различных базисных последовательностей конечно, следовательно, число слов $T_{\alpha\beta}$ конечно.

ЛЕММА 12. *Централизатор элемента $w \in G$ (G – группа Артина с древесной структурой) конечнопорожден.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть слоговая длина слова w больше единицы. Рассмотрим подгруппу группы G , порожденную словами $T_{\alpha\beta}$, слоговая длина которых не превышает $2S_0 + 1$, ($S_0 = |S(w, w)|$)

Под длиной конечной последовательности (3), соответствующей слову $w = w_0$, будем понимать число слов w_i в ней, то есть: $w_0, H_1, w_1, H_2, \dots, w_{m-1}, H_m, w_m, H_{m+1}$, где каждое $w_i \in S(w, w)$.

Очевидно, что всякая последовательность (3), соответствующая слову w_0 , длины больше или равной $S_0 + 1$ является базисной.

Рассмотрим множество всех слов $T_{\alpha\beta}$, длины не превосходящих $2S_0 + 1$, соответствующих всевозможным базисным последовательностям (3) длины не превосходящих $2S_0 + 1$, соответствующих w_0 .

Покажем, что всякое F , удовлетворяющее условию: $F^{-1}w_0F = w_0$, принадлежит подгруппе $\langle \{T_{\alpha\beta}\} \rangle$.

Если $F = 1$, то $F \in \langle \{T_{\alpha\beta}\} \rangle$.

Пусть $F \neq 1$, тогда $F = H_1H_2, \dots, H_m$ где $H_i \in \mathcal{H}$, обозначим F через F_m и пусть для любого $k < m$ слово $F_k \in \langle \{T_{\alpha\beta}\} \rangle$.

Слову F_m будет соответствовать последовательность:

$$w_0, H_1, w_1, H_2, \dots, H_{m-1}, w_{m-1}H_mw_m \quad (5)$$

Пусть $S_0 + 1 < m$, тогда последовательность (5) – базисная, то есть существуют $0 \leq \alpha < \beta \leq S_0 + 1 < m$, такие что $w_\alpha = w_\beta$.

Рассмотрим слово $T = H_1H_2 \dots H_{\alpha-1}H_\alpha \dots H_\beta H_\alpha^{-1} \dots H_1^{-1}$. Так как $\alpha < S_0, \beta \leq S_0 + 1$, то слово T имеет слоговую длину меньше $2S_0 + 1$, поэтому $T \in \langle \{T_{\alpha\beta}\} \rangle$.

Рассмотрим произведение $T^{-1}F = H_1 \dots H_\alpha H_{\beta+1} \dots H_m, T^{-1}F \in C_G(w_0)$, и так как $\|T^{-1}F\| < m$, то $T^{-1}F \in \langle \{T_{\alpha\beta}\} \rangle$, отсюда следует, что $F \in \langle \{T_{\alpha\beta}\} \rangle$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. *Существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ (G – группа Артина с древесной структурой) построить его централизатор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство непосредственно следует из того факта, что длина любой фундаментальной последовательности для элемента $w, \|w\| > 1$, большей S_0 , будет базисной, поэтому, как показано в лемме 13 множество всех слов $T_{\alpha\beta}$, длины которых не превосходят $2S_0 + 1$ соответствующих этим последовательностям порождают $C_G(w_0)$. Централизаторы элементов, слоговая длина которых равна единице, как следует из выше изложенного, конечнопорождены и могут быть эффективно построены.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Централизатор любого элемента в группах Кокстера с древесной структурой конечнопорожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.*

Пусть G – группа Артина с древесной структурой и $\bar{G}$ – гомоморфная ей группа Кокстера. Пусть θ гомоморфизм G на $\bar{G}$, то есть $G/N_G = \theta(G) = \bar{G}$, где $N_G = \langle \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 \rangle^G$. Пусть $C_G(w)$ – централизатор элемента $w \in G$. Обозначим через $\theta(C_G(w))$ – гомоморфный образ подгруппы $C_G(w)$. Очевидно, что $\theta(C_G(w)) = C_G(w)/N_G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. В группе A разрешима проблема вхождения в конечнопорожденную подгруппу H , если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in A$ установить, принадлежит ли w подгруппе H .

ЛЕММА 14. [11] В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

ЛЕММА 15. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения в подгруппу $N_G = \langle \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 \rangle^G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим образ данного слова w в группе Кокстера $\bar{G}$, соответствующей данной группе G . Если $w = 1$ в $\bar{G}$, то $w \in N_G$, что непосредственно следует из леммы 15, согласно которой в группе $\bar{G}$ разрешима проблема вхождения, а следовательно, разрешима и проблема равенства слов.

Лемма доказана.

ЛЕММА 16. Пусть F – решение уравнения $z^{-1}wz = v$, то есть $F^{-1}wF = v$, где $F, v, w \in G$. Тогда множество всех решений данного уравнения образует смежный класс $C_G(w) \bullet F$ подгруппы $C_G(w)$ в G .

ЛЕММА 17. Пусть z_0 – решение уравнения $z^{-1}wz = v$ в группе G , G – группа Артина с древесной структурой, v, w принадлежат N_G . Слова v, w сопряжены в N_G тогда и только тогда, когда $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 \in N_G$, тогда $\theta(z_0) = 1$ и, следовательно, $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$. Пусть $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$, тогда $\theta(z_0) = \theta(u_1)\theta(u_2)\dots\theta(u_m)$, где $\theta(u_i)$ образующие подгруппы $\theta(C_G(w))$.

Рассмотрим слово $s = u_1u_2\dots u_m \in C_G(w)$, являющееся одним из прообразов слова $\theta(u_1)\theta(u_2)\dots\theta(u_m)$, и рассмотрим произведение $z_0s^{-1}, z_0s^{-1} = h$, где $h \in N_G$. Поэтому $z_0s^{-1}w(z_0s^{-1})^{-1} = hwh^{-1} = v$, то есть слова $v, w \in N_G$ сопряжены в N_G .

Если $C_G(w) < N_G$, то $\theta(C_G(w)) = E$, (E – единичная подгруппа), поэтому из того, что $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$ следует, что $z_0 \in N_G$.

Пусть z_0 удовлетворяет соотношению $z_0^{-1}wz_0 = v$ и пусть $\theta(z_0) \notin \theta(C_G(w))$. Из леммы 16 следует, что смежный класс $C_G(w) \bullet z_0$ содержит все решения данного соотношения.

Очевидно, что для любого $h \in C_G(w)\theta(hz_0) \notin \theta(C_G(w))$. Допустим, что существует $s_0 \in N(G)$ такое, что $s_0^{-1}ws_0 = v$. Но тогда существует $h_0 \in C_G(w)$ такое, что $h_0z_0 = s_0$. Но тогда $z_0 = h_0^{-1}s_0$ и $\theta(z_0) = \theta(h_0^{-1}s_0) \in \theta(C_G(w))$.

Получаем противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, справедлива следующая теорема, анонсированная в [12].

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – группа Артина с древесной структурой, тогда в подгруппе $N_G \triangleleft G$ разрешима проблема сопряженности слов.

4. Заключение

Отметим, что для групп Артина с древесной структурой проблема сопряженности решается положительно. Таким образом, нами доказано, что крашенные подгруппы групп Артина с древесной структурой наследуют свойство группы: положительное решение проблемы сопряженности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Гринблат В. А. Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа. \\\ Mat. заметки. Т. 79, Вып. 5, 2006.
2. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой. \\\ Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Информатика». Т.11. Вып.1. «Математика». –Тула, 2006. С. 67-82.
3. Garsid F. A. The braid groups and other groups \\\ Quart. Math. Oxford. ser(2), 1969, №20, p. 235-254.
4. Брискорн Э., Сайто К. группы Артина и группы Кокстера \\\ Математика. 1974, т. 18, №6, С. 56-79.
5. Appel K. J., Schupp E. Artin group and infinite Coxeter groups \\\ Invent math, 1984, p. 50-78.
6. Appel K. J. On Artin groups and Coxeter groups of large type \\\ Contempor. Math., 1984, p. 50-78.
7. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. \\\ Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вуз. сборник науч. трудов. Тула, 1986, С. 26-61.
8. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой \\\ V Международная конференция. Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения. Тезисы докладов. Тула. 2003, С. 33-34.
9. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа \\\ Фундаментальная и прикладная математика, 1999, С. 1-38.
10. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина. \\\ Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, №4, С.9-27
11. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечнопорожденных группах Кокстера с древесной структурой. \\\ Чебышевский сборник, 2010. — Т.11, № 3. С. 32-56.
12. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы сопряженности слов в некотором классе подгрупп Артина с древесной структурой. \\\ Алгебра и теория чисел, и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV межд. конф. Посвященной 100-летию со дня рождения Н.М. Коробова Тула 2018 С. 67-69.
13. Collins D., Miller C. The conjugacy problem and subgroups of finite index. \\\ Proc. London Math. Soc. (3)34 1977? №3, P.535-556.

REFERENCES

1. Bezverkhny V. N., Grinblat V. A. Solution of the generalized problem of conjugacy of words in colored subgroups of Artin groups of finite type. \\\ Mate. notes. Vol. 79, Issue 5, 2006.

2. Bezverkhny V. N., Karpova O. Yu. The problem of equality and conjugacy in Artin groups with wood structure. \\ WPI. Tula state. UN-TA. Ser. «Mathematics. Mechanics. Informatics». Vol. 11. Issue 1. "Matematika". Tula, 2006
3. Garsid F. A. The braid groups and other groups \\ Quart. Math. Oxford. ser (2), 1969, №20, p. 235-254.
4. Briskorn E., Saito K. Artin groups and Coxeter groups \\ Mathematics. 1974, vol. 18, no. 6, Pp. 56-79., Pp. 67-82.
5. Appel K. J., Schupp E. Artin group and infinite Coxeter groups \\ Invent math, 1984, p. 50-78.
6. Appel K. J. On Artin groups and Coxeter groups of large type \\ Contempor. Math., 1984, p. 50-78.
7. Bezverkhny V. N. Solving the problem of conjugacy of words in Artin and Coxeter groups of large type. \\ Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. collection of scientific works. Tula, 1986, Pp. 26-61.
8. Bezverkhny V. N. about Artin and Coxeter groups with wood structure \\ V international conference. Algebra and number theory. Modern problems and their applications. Thesis of reports. Tula. 2003, Pp. 33-34.
9. Bezverkhny V. N. Solving the problem of generalized conjugacy of words in large-type Artin groups \\ Fundamental and applied mathematics, 1999, Pp. 1-38.
10. Bezverkhny V. N., Bezverkhnyaya N. B. Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups. \\ Fundamental and applied mathematics, 2019, vol. 22, no. 4, P. 9-27
11. Bezverkhny V. N., Inchenko O. V. the problem of conjugacy of subgroups in finite-born Coxeter groups with wood structure. \\ Chebyshev collection, 2010. — Vol. 11, No. 3. Pp. 32-56.
12. Bezverkhny V. N., Bezverkhnyaya N. B. Solving the problem of conjugation of words in a certain class of Artin subgroups with a tree structure. \\ Algebra and number theory and discrete geometry: modern problems and applications. Materials of the XV international Conf. Dedicated to the 100th anniversary of the birth of N. M. Korobov Tula 2018 P. 67-69.
13. Collins D., Miller C. The conjugacy problem and subgroups of finite index. \\ Proc. London Math. Soc. (3)34 1977? №3, P.535-556.

Получено 24.06.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.