

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-7-49

**Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона
взаимности квадратичных вычетов**

И. М. Виноградов

Виноградов Иван Матвеевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук СССР.

Аннотация

Впервые публикуется текст дипломной работы И. М. Виноградова, выполненной им под руководством Я. В. Успенского на математическом отделении физико-математического факультета Петербургского университета в 1914 г.

Ключевые слова: суммы Гаусса, символ Лежандра, квадратичные вычеты и невычеты, закон взаимности

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

И. М. Виноградов. Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 7–49.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-7-49

**Gaussian sums and their application to the proof
of quadratic reciprocity law**

I. M. Vinogradov

Vinogradov Ivan Matveevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the USSR Academy of Sciences.

Abstract

This is the first publication of I. M. Vinogradov's senior thesis written under the scientific guidance of Ya. V. Uspensky at the mathematical department of the Faculty of physics and mathematics of Petersburg's University in 1914.

Keywords: Gaussian sums, Legendre symbol, quadratic residues and non-residues, quadratic reciprocity law

Bibliography: 18 titles.

For citation:

I. M. Vinogradov, 2021, "Gaussian sums and their application to the proof of quadratic reciprocity law", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 7–49.

1. Введение

Настоящий том “Чебышевского сборника” посвящен 130-й годовщине со дня рождения академика И.М. Виноградова и открывается его студенческим сочинением “Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов”, написанным в 1914 г.

История появления этой работы в общих чертах известна. Вероятно, в конце 1912 или начале 1913 г. молодой приват-доцент Петербургского университета Яков Викторович Успенский¹ (1883-1947), уже зарекомендовавший себя как выдающийся специалист по теории чисел, поставил перед студентом физико-математического факультета Иваном Виноградовым задачу “дать простое изложение одного из доказательств квадратичного закона взаимности Гаусса” (см. [3, с. 5], [4, с. 5]). Размышления над ней, глубокое изучение работ классиков привели Ивана Матвеевича к новой оригинальной задаче, связанной с оценками суммы символов Лежандра и распределением квадратичных вычетов по заданному модулю, которую он блестяще решил. Именно с упоминания о ней и принято начинать рассказ о научном творчестве И.М. Виноградова (см., например: [3, с. 5-7], [4, с. 4-6], [5, с. 321], [6, с. 7-8]). Работа же о суммах Гаусса остается в тени.

Отчасти это оправдано. Оценивая ее формально, можно сказать, что эта работа не представляет самостоятельной научной ценности, столь характерной для всех последующих математических публикаций И.М. Виноградова, так как является лишь изложением результатов других математиков (К.Ф. Гаусса, П.Г.Л. Дирихле и О. Коши), хотя и не лишенным самобытности. Возникает естественный вопрос: нуждается ли вообще в публикации эта “зеленая” студенческая работа, не предназначавшаяся, кстати, самим автором к печати?

После долгих размышлений и колебаний мы все же пришли к положительному ответу на этот вопрос. По нашему мнению, такая публикация представляет, прежде всего, значительный историко-математический интерес для исследователей научного творчества И.М. Виноградова и для будущих биографов ученого. Действительно, внимательное изучение рукописи этой работы наряду с ранними печатными публикациями позволяет хотя бы отчасти реконструировать круг чтения молодого Ивана Матвеевича, а также понять, труды каких ученых сформировали его математические “вкусы”, заметнее всего повлияли на его математические интересы и в итоге привели к выбору теории чисел как будущей специальности.²

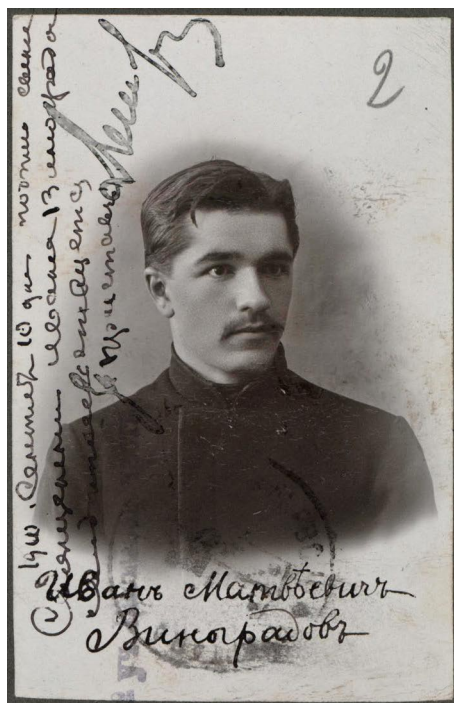
В этой студенческой работе мы уже можем разглядеть характерные черты научно-педагогического таланта И.М. Виноградова, хотя еще и не вполне устоявшиеся: ясность изложения, отбор и расположение излагаемого материала и даже умелый выбор обозначений. Удивительно, но некоторые обозначения, использованные в рукописи, “доживут” до последнего, девятого по счету, прижизненного издания его всемирно известного учебника “Основы теории чисел” (1981 г.).

Кроме того, публикация работы о суммах Гаусса устраняет и неопределенность, связанную с найденной И.М. Виноградовым и упоминавшейся выше оценкой суммы символов Лежандра

$$S = S(p; M, N) = \sum_{n=N+1}^{N+M} \left(\frac{n}{p} \right), \quad p - \text{простое число.}$$

¹В сентябре 1912 г. Я.В. Успенский был приглашен читать лекции в Петербургском университете, где стал преподавать теорию чисел, исчисление конечных разностей и вести упражнения по приложениям интегрального исчисления к геометрии [1, с. 115]. С 1914 г. официально руководил студенческим кружком по математике, в котором принимали участие не только студенты, но и окончившие университет специалисты. Многие участники этого кружка впоследствии стали известными учеными: А.А. Фридман, Я.Д. Тамаркин, Н.С. Кошляков и др. [2]

²Не лишним будет напомнить, что “при обучении в университете Иван Матвеевич с большим интересом занимался теорией вероятностей, которую им читал А.А. Марков” и “знал курс Маркова наизусть” (см. [4, с. 5]).



И.М. Виноградов. Фотомастерская М.С. Мельника (г. Великие Луки), 10 июня 1910 г. Пометы: «Иван Матвеевич Виноградов»; «Подпись сына Священника Ивана Виноградова (2 слова неразб.). Пристав (подпись)». Штамп: «2й УЧ[АСТОК] (неразб.) ЧАСТИ». Круглая печать (неразб.).

Личное дело студента С.-Петербургского Императорского Университета И.М. Виноградова,

ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л. 2.

После прочтения соответствующих абзацев из очерков А.А. Карацубы [4, с. 3-5], [6, с. 7-8], может сложиться впечатление, что именно оценка вида

$$|S| < \sqrt{p} \ln p, \quad (1)$$

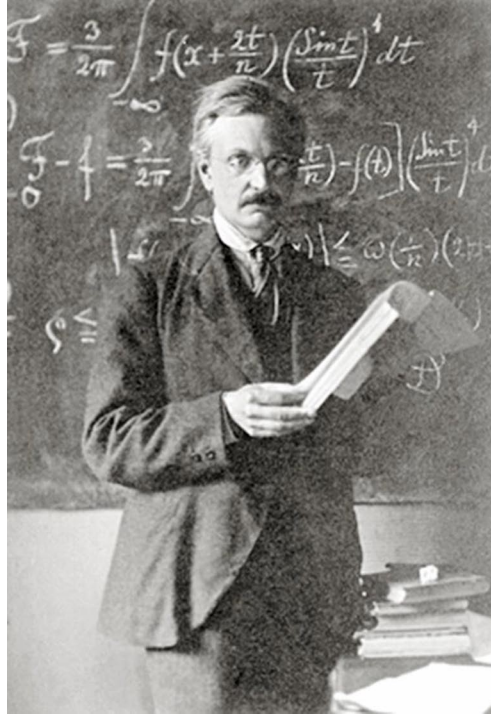
найденная Иваном Матвеевичем и принесшая ему широкую известность, и составила предмет его диплома. Между тем, оценка (1) была доказана чуть позже написания статьи о суммах Гаусса, в том же 1914 или в начале 1915 г.³

Наконец, такая публикация представляет интерес для исследователей педагогического таланта научного руководителя И.М. Виноградова – Я.В. Успенского. Ведь именно он столь промыслительно указал начинающему математику тему для исследований. Именно из этой студенческой работы как из семечка выросло в конечном итоге могучее древо метода тригонометрических сумм, в корне изменившего облик аналитической теории чисел.

Перейдем к содержательной части работы. Для этого напомним некоторые определения. Пусть p – нечетное простое число. Число n , не кратное p , называется квадратичным вычетом по модулю p , если оно сравнимо по модулю p с квадратом некоторого целого числа, и называется квадратичным невычетом в противном случае. Символ Лежандра $\left(\frac{n}{p}\right)$ определяется, соответственно, соотношением

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{квадратичный вычет по модулю } p, \\ -1, & \text{если } n - \text{квадратичный невычет по модулю } p, \\ 0, & \text{если } n \text{ кратно } p. \end{cases}$$

³Более точная датировка едва ли возможна. В [5], [6] доказательство И.М. Виноградовым неравенства (1) датируется 1915 г., в [3] - 1914 г. В силу ряда обстоятельств оценка (1) была опубликована лишь в 1918 г. на французском языке в «Журнале физико-математического общества при Пермском университете» (см. [7]).



Я.В. Успенский. Фотоснимок с официального сайта Российской Академии наук.

Квадратичный закон взаимности формулируется следующим образом: если p и q – различные нечетные простые числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}. \quad (2)$$

Эта теорема была известна еще Л. Эйлеру и частично доказана А.М. Лежандром; полное доказательство (2) было найдено К.Ф. Гауссом в 1795 г. (см. [8, с.179, примечания к гл. V]). Позже Гаусс дал несколько различных доказательств закона взаимности. Одно из них, четвертое по счету, и стало объектом исследования И.М. Виноградова.

Это доказательство опирается на квадратичные суммы Гаусса, т.е. тригонометрические суммы вида

$$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{hs^2}{n}} = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2\pi hs^2}{n} + i \sin \frac{2\pi hs^2}{n} \right)$$

(здесь h – целое число, взаимно простое с n). Несложно убедиться, что при нечетном простом $n = p$ имеет место равенство

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \varphi(1, p). \quad (3)$$

Гауссом было найдено точное значение суммы $\varphi(1, n)$ для произвольного n :

$$\varphi(1, n) = \frac{1 + i^{-n}}{1 - i} \sqrt{n}. \quad (4)$$



*И.М. Виноградов - выпускник университета.
Фотомастерская М.Д. Стуколкина (Санкт-Петербург), 1914 г.
Фотоснимок из фондов Дома-музея И.М. Виноградова в г. Великие Луки⁴.*

Равенства (3), (4) наряду с легко проверяемым соотношением

$$\varphi(h, mn) = \varphi(hm, n)\varphi(hn, m), \quad (m, n) = 1, \quad (5)$$

позволяют вывести равенство (2). Таким образом, доказательство квадратичного закона сводится, по сути, к нахождению явной формулы для суммы $\varphi(1; n)$. Способ, указанный для этого самим К.Ф. Гауссом, был вполне элементарным и требовал одних лишь алгебраических преобразований. Впоследствии для вычисления $\varphi(1; n)$ были предложены иные средства: аппарат рядов Фурье (П.Г.Л. Дирихле, 1835; М. Шаар, 1848-1850; Л. Кронекер, 1856), формула Абеля-Плана (А. Генocchi, 1852), тета-ряды (О. Коши, 1840), контурное интегрирование (Л. Кронекер, 1880) и др.⁵

И.М. Виноградовым были основательно изучены три метода вычисления квадратичной суммы Гаусса, принадлежащие, соответственно, самому Гауссу, Дирихле и Коши. Их подробное изложение и составляет содержание работы. Первый способ нахождения $\varphi(1; n)$ был опубликован Гауссом в 1811 г. в статье [11] под названием “Суммирование некоторых рядов определенного вида”⁶. Метод Гаусса основан на изучении свойств функций

$$(m, \mu) = \frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1}) \dots (1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^\mu)},$$

которые именуются теперь многочленами Гаусса, и, в частности, на вычислении их значений в точках $x = e^{2\pi i h/n}$.

⁴Публикуется с любезного разрешения директора Дома-музея И.М. Виноградова в г. Великие Луки Т.Г. Бобкиной.

⁵История исследований сумм Гаусса и их обобщений достаточно подробно изложена в статье [9], а также в примечаниях к первой главе книги [10].

⁶Интересно отметить, что перевод этой статьи на русский язык появился лишь в 1959 г. в составе “Трудов по теории чисел” К.Ф. Гаусса [12], изданных под общей редакцией академика И.М. Виноградова.

Второй метод был предложен в 1835 г. Дирихле в работе “Об одном новом приложении определенного интеграла к суммированию конечных и бесконечных рядов” [13]. Он основан на соотношении

$$2\pi \sum_{n=0}^N{}' f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi N} f(x) \cos(nx) dx, \quad (6)$$

называемом теперь формулой суммирования Пуассона (штрих означает, что слагаемые с $n = 0, N$ входят в сумму с коэффициентом 0.5). Применение (6) к случаю $N = 2m$, $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{8\pi m} + \delta\right)$ (δ – произвольное вещественное число) приводит к явным формулам для сумм

$$\sum_{s=0}^{4m-1} \cos \frac{2\pi s^2}{4m}, \quad \sum_{s=0}^{4m-1} \sin \frac{2\pi s^2}{4m},$$

и, следовательно, для суммы $\varphi(1, n)$ в случае $n = 4m \equiv 0 \pmod{4}$. Значения $\varphi(1, n)$ для оставшихся n могут быть легко найдены из полученного результата и тождества (5).

Наконец, третий метод вычисления $\varphi(1, n)$, опубликованный О. Коши в статье “Новый простой метод вычисления знакопеременных сумм, образованных при помощи примитивных корней двучленных уравнений” [14], основан на тождестве

$$\sqrt{a} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \dots \right\} = \sqrt{b} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \dots \right\}, \quad (7)$$

которое справедливо для любых комплексных чисел a, b с положительными вещественными частями, связанных равенством $ab = \pi$. Искомый результат получается из (7), если положить $a^2 = -2\pi i/n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и устремить затем ε к нулю.

Все три упомянутые работы вошли в собрания трудов Гаусса [15], Дирихле [16] и Коши [17] и в таком виде могли быть доступны Ивану Матвеевичу. Работа с ними оказала решающее воздействие на научное творчество И.М. Виноградова и позволила ему со временем осознать и блестяще раскрыть потенциал нового инструмента в аналитической теории чисел – метода тригонометрических сумм.

Текст работы публикуется по ксерокопии с рукописи, хранящейся в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова (шифр К 26471). Местонахождение оригинала неизвестно. Рукопись содержит 38 пронумерованных листов, написанных чернилами. На титульном листе указаны фамилия автора и название работы⁷. В нижней части листа почерком, отличным от почерка автора (предположительно, шариковой ручкой), проставлена дата создания рукописи: “1914”. В левом верхнем углу помещен библиотечный шифр, в центре – штамп Математического института. Как отмечено в [3, с. 9], в верхней части титульного листа оригинала рукописи присутствовала помета Я.В. Успенского: “Представленную работу считать весьма удовлетворительной”. К сожалению, плохое качество ксерокопии и способ нанесения (простой карандаш) делает эту и иные многочисленные пометы Я.В. Успенского на листах рукописи практически нечитаемыми.

⁷ Фотоснимок титульного листа приведен в [3, с. 9].

Первый рассмотренный метод,
который применяет Гаусс для
определения суммы $\varphi(1, n)$.
Пусть m — чётное число удовлетво-
ряющее условию $m \geq 0$. Положим тогда:

$$(m, n) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-n+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)} \quad (1)$$
 придем к случаю, когда x — корень
какого-нибудь из уравнений: $x^k = 1$ где
 $k = 1, 2, 3, \dots$ мы не рассматриваем за-
исключения только одного случая, когда
 x — первообразный корень уравнения $x^{m+1} = 1$,
— Этот ^{именно} случай нам понадобится впо-
следствии. При таких условиях

Фрагмент рукописи И.М. Виноградова

Текст рукописи разбит Я.В. Успенским на 17 частей: введение и 16 параграфов; им же даны названия некоторым из них (эти названия мы, однако, сочли возможным опустить в тексте публикации): “§1. Доказательство ... служащих для определения $\varphi(1, n)$ ”, “§7. Некоторые ...”, “§14. Доказательство Коши формул ...”, “§16. Формулы ...” (многоточие обозначает либо слова, не поддающиеся прочтению, либо вовсе отсутствующие в рукописи). Знаки §§2, 4, 8, 12 и 15 в рукописи не читаются и проставлены публикатором.

Тест работы публикуется в современной орфографии и пунктуации; сокращенно написанные слова воспроизводятся полностью, восстановленные части слов заключаются в квадратные скобки. Описки в формулах (лишние символы, пропуски, замена одного символа другим и т.п.) в тексте устранены, но отмечены в подстрочных примечаниях. Математическая символика автора в целом сохранена. Так, вместо знака $\lim_{m \rightarrow +\infty}$ оставлены использованные И.М. Виноградовым обозначения пред., предел (скорректированные с учетом современной орфографии).

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty}$$
 В ряде случаев, во избежание путаницы, отсутствующие скобки добавлены, квадратные заменены круглыми. Эти исправления виду их незначительности никак не оговариваются.

Текст работы подготовлен к публикации М.А. Королёвым.

2. Текст работы

Прежде чем приступить к настоящему исследованию, напомним некоторые предложения из теории двучленного уравнения $x^n = 1$.

Пусть n – любое целое положительное число, и пусть $h_1 = 1, h_2, h_3, \dots, h_{\varphi(n)}$ – числа, меньшие n и с ним взаимно простые. Обозначим $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ чрез ϱ .

Тогда числа $1, \varrho, \varrho^2, \dots, \varrho^{n-1}$ представят все решения уравнения $x^n = 1$, и числа $\varrho, \varrho^{h_2}, \varrho^{h_3}, \dots, \varrho^{h_{\varphi(n)}}$ – все различные первообразные корни этого уравнения. Пусть h – любое из чисел $h_1, h_2, \dots, h_{\varphi(n)}$, и положим $\varrho^h = r$. Тогда все решения уравнения $x^n = 1$ и все различные его первообразные корни соответственно так представятся: $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ и: $r, r^{h_2}, r^{h_3}, \dots, r^{h_{\varphi(n)}}$.

Сумму

$$\varphi(h, n) = 1 + r + r^4 + \dots + r^{(n-1)^2},$$

полное определение которой дал впервые Гаусс, назовем суммой Гаусса.

Исследования наши будут расположены в следующем порядке: сначала мы покажем, как определить величину $\varphi(h, n)$ для случая $h = 1$; далее мы покажем, как определяется $\varphi(h, n)$ при любом $h = h_1, h_2, h_3, \dots, h_{\varphi(n)}$. При этом, если вести исследование 2-мя путями, то для суммы $\varphi(h, n)$ можно получить 2 выражения, отличных формально одно от другого. Из сравнения этих выражений и получается закон взаимности квадратичных вычетов.

§1

Первым рассмотрим метод, которым пользовался Гаусс для определения суммы $\varphi(h, n)$.

Пусть m – целое число, удовлетворяющее условию $m \geq 0$. Положим тогда

$$(m, \mu) = \frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1}) \dots (1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^\mu)} \quad (8)$$

причем случаев, когда x – корень какого-нибудь из уравнений: $x^k = 1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, мы не рассматриваем, за исключением только одного случая, когда x – первообразный корень уравнения $x^{m+1} = 1$. Этот именно случай нам и понадобится впоследствии. При таких условиях функция (m, μ) для $\mu = 1, 2, 3, \dots, m$ вполне определяется формулой (8). Для значений же μ , превышающих m , функция $(m, \mu) = 0$, если не имеет места вышеупомянутый исключительный случай, и обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в этом случае. Однако для сокращения дальнейших рассуждений будем полагать $(m, \mu) = 0$ при $\mu > 0$ и в случае когда x – первообразный корень уравнения $x^{m+1} = 1$. По тем же соображениям будем полагать всегда $(m, 0) = 1$ и $(m, \mu) = 0$, если $\mu < 0$. Тогда для любого значения $\mu = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ легко доказываются следующие 2 равенства:

$$(m, \mu) = (m - 1, \mu) + x^{m-\mu}(m - 1, \mu - 1) \quad (9)$$

и

$$(m, \mu) = (m, m - \mu). \quad (10)$$

§2

Рассмотрим ряд

$$f(x, m) = \sum (-1)^\mu (m, \mu), \quad (11)$$

где суммирование распространяется на все целые значения μ . Применяя сюда формулу (9), находим:

$$f(x, m) = \sum (-1)^\mu (m - 1, \mu) + \sum (-1)^\mu x^{m-\mu} (m - 1, \mu - 1).$$

Заметим, далее, что во всех суммах вида $\sum \psi(\mu)(m, \mu)$, где суммирование распространяется по μ на все целые числа, очевидно, можно всегда вместо μ подставить $\pm\mu + k$, где k – любое целое число, и считать, что суммирование опять распространено на все целые значения μ .

На этом основании находим:

$$\begin{aligned} f(x, m) &= \sum (-1)^\mu (m-1, \mu) + \sum (-1)^{\mu+1} x^{m-\mu-1} (m-1, \mu) = \\ &= \sum (-1)^\mu (1 - x^{m-\mu-1}) (m-1, \mu). \end{aligned}$$

Далее, легко видеть, что $(1 - x^{m-\mu-1}) (m-1, \mu) = (1 - x^{m-1}) (m-2, \mu)$ и следовательно:

$$f(x, m) = \sum (-1)^\mu (1 - x^{m-1}) (m-2, \mu) = (1 - x^{m-1}) \sum (-1)^\mu (m-2, \mu),$$

то есть:

$$f(x, m) = (1 - x^{m-1}) f(x, m-2).$$

Положим теперь, что m – четное число. Находим последовательно:

$$f(x, 0) = (-1)^0 (0, 0) = 1$$

[u] далее

$$\begin{aligned} f(x, 2) &= (1 - x) f(x, 0) \\ f(x, 4) &= (1 - x^3) f(x, 2) \\ &\dots \\ f(x, m) &= (1 - x^{m-1}) f(x, m-2). \end{aligned}$$

Перемножая все эти равенства, находим:

$$f(x, m) = \sum (-1)^\mu (m, \mu) = (1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5) \dots (1 - x^{m-1}). \quad (12)$$

§3

Рассмотрим еще такой ряд:

$$F(x, m) = \sum x^{\frac{\mu}{2}} (m, \mu), \quad (13)$$

где суммирование опять распространяется на все целые значения μ . Равенство это на основании формулы (10) так можно переписать:

$$F(x, m) = \sum x^{\frac{\mu}{2}} (m, m - \mu)$$

Заменяя в этой сумме μ на $-\mu + m$ и переписав ее в обратном порядке, имеем

$$F(x, m) = \sum x^{\frac{m-\mu}{2}} (m, \mu),$$

или еще, заменяя μ на $\mu - 1$:

$$F(x, m) = \sum x^{\frac{m+1}{2} - \frac{\mu}{2}} (m, \mu - 1),$$

откуда

$$x^{\frac{m+1}{2}} F(x, m) = \sum x^{m+1-\frac{\mu}{2}} (m, \mu - 1). \quad (14)$$

Складывая равенства (13) и (14), найдем:

$$F(x, m) \left(1 + x^{\frac{m+1}{2}}\right) = \sum x^{\frac{\mu}{2}} [(m, \mu) + x^{m+1-\mu} (m, \mu - 1)].$$

Откуда, принимая во внимание формулу (9), находим окончательно:

$$F(x, m) \left(1 + x^{\frac{m+1}{2}}\right) = \sum x^{\frac{\mu}{2}}(m+1, \mu) = F(x, m+1).$$

Но

$$F(x, 0) = 1;$$

далее,

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right) F(x, 0) \\ F(x, 2) &= (1 + x) F(x, 1) \\ &\dots \\ F(x, m) &= \left(1 + x^{\frac{m}{2}}\right) F(x, m-1). \end{aligned}$$

Перемножая эти равенства, найдем:

$$F(x, m) = \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right) (1 + x) \dots \left(1 + x^{\frac{m}{2}}\right). \quad (15)$$

§4

Пусть теперь n – целое нечетное число. Заменим в формуле (12) m на $n-1$ и x – первообразным корнем уравнения $x^n = 1$. Найдем тогда:

$$\sum (-1)^\mu (n-1, \mu) = (1-r)(1-r^3) \dots (1-r^{n-2}),$$

причем знак Σ достаточно распространить на значения $\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Но

$$\begin{aligned} (-1)^\mu (n-1, \mu) &= (-1)^\mu \frac{(1-r^{n-1})(1-r^{n-2}) \dots (1-r^{n-\mu})}{(1-r)(1-r^2) \dots (1-r^\mu)} = \\ &= (-1)^\mu \frac{(1-r^{-1})(1-r^{-2}) \dots (1-r^{-\mu})}{(1-r^1)(1-r^2) \dots (1-r^\mu)} = r^{-1-2-\dots-\mu} = r^{-\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \end{aligned}$$

и след[овательно] получаем:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} r^{-\frac{\mu(\mu+1)}{2}} = (1-r)(1-r^3) \dots (1-r^{n-2}).$$

Эта формула справедлива, если понимать под r какой угодно первообразный корень уравнения $x^n = 1$. Легко видеть, что r^{-2} будет также первообразным корнем уравнения $x^n = 1$, т[ак] как -2 – число, взаимно простое с n . Заменив в последнем равенстве r на r^{-2} , находим:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} r^{\mu(\mu+1)} = (1-r^{-2})(1-r^{-6})(1-r^{-10}) \dots (1-r^{-2(n-2)}). \quad (16)$$

Умножив обе части этого равенства на $r^{\frac{1}{4}(n-1)^2} = r \cdot r^3 \cdot r^5 \dots r^{n-2}$, найдем в левой части:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} r^{\mu^2 + \mu - \mu n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=0}^{n-1} r^{\left(\frac{n-1}{2}-\mu\right)^2} = \sum_{\mu=0}^{\frac{n-1}{2}} r^{\left(\frac{n-1}{2}-\mu\right)^2} + \sum_{\mu=\frac{n+1}{2}}^{n-1} r^{\left(\frac{n-1}{2}-\mu+n\right)^2} = \\
&= \sum_{t=\frac{n-1}{2}}^0 r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} r^{t^2} = \sum_{t=0}^{n-1} r^{t^2} = \varphi(h, n).
\end{aligned}$$

Равенство (16) теперь так переписывается:

$$\varphi(h, n) = (r - r^{-1})(r^3 - r^{-3})(r^5 - r^{-5}) \dots (r^{n-2} - r^{-(n-2)}). \quad (17)$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned}
r - r^{-1} &= -(r^{n-1} - r^{-(n-1)}) \\
r^3 - r^{-3} &= -(r^{n-3} - r^{-(n-3)}) \\
&\dots \\
r^{n-2} - r^{-(n-2)} &= -(r^2 - r^{-2})
\end{aligned}$$

и след[овательно]:

$$\varphi(h, n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (r^2 - r^{-2})(r^4 - r^{-4}) \dots (r^{n-1} - r^{-(n-1)}). \quad (18)$$

Перемножая (17) и (18), найдем:

$$[\varphi(h, n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (r - r^{-1})(r^2 - r^{-2}) \dots (r^{n-1} - r^{-(n-1)})$$

или:

$$\begin{aligned}
[\varphi(h, n)]^2 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} r^{1+2+3+\dots+n-1} (1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-2(n-1)}) = \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1 - r^{-2})(1 - r^{-4}) \dots (1 - r^{-2(n-1)}).
\end{aligned}$$

Но $r^{-2}, r^{-4}, \dots, r^{-2(n-1)}$, очевидно, представляют все корни такого уравнения: $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, и след[овательно]:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - r^{-2}) \dots (x - r^{-2(n-1)})$$

при $x = 1$ находим отсюда:

$$n = (1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-2(n-1)})$$

и след[овательно], окончательно: $[\varphi(h, n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$. Т[о] есть если n формы $4\mu + 1$, то $\varphi(h, n) = \pm\sqrt{n}$; если же n формы $4\mu + 3$, то: $\varphi(h, n) = \pm i\sqrt{n}$.

Знак, который нужно брать в 2-х последних формулах, мы определим следующим образом: пока лишь для случая, когда $h = 1$, т[о] есть для случая $r = \varrho$. Имеем тогда

$$\varrho^s - \varrho^{-s} = e^{2\frac{\pi}{n}si} - e^{-2\frac{\pi}{n}si} = i \cdot 2 \sin \frac{2\pi \cdot s}{n},$$

и формула (17) дает нам:

$$\varphi(1, n) = 2^{\frac{n-1}{2}} i^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin 3 \frac{2\pi}{n} \dots \sin (n-2) \frac{2\pi}{n}.$$

Если притом n формы $4\mu + 1$, то числа

$$\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \left(\frac{n+1}{2} + 1\right) \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad (n-2) \frac{2\pi}{n}$$

будут больше π , соответственно чему $\frac{n-1}{4}$ синусов будут отрицательны. Кроме того, $i^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{4}}$ и след[овательно] знак всего произведения определится знаком выражения:

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{4}} = 1,$$

т[о] есть будет «+». Если же n формы $4\mu + 3$, то числа

$$\frac{n+3}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \left(\frac{n+3}{2} + 1\right) \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad (n-2) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

будут больше π , соответственно чему $\frac{n-3}{4}$ синусов будут отрицательны, и, кроме того, $i^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{4}} i$. След[овательно], в этом случае все произведение равно положительному числу, умноженному на $i \cdot (-1)^{\frac{n-3}{4}} \cdot (-1)^{\frac{n-3}{4}}$, т[о] есть на i . Итак, окончательно:

$$\begin{cases} \varphi(1, n) &= +\sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu + 1 \\ \text{и } \varphi(1, n) &= +i\sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu + 3. \end{cases} \quad (19)$$

§5

Пусть n – четное число $\equiv 2 \pmod{4}$. В таком случае сумму $\varphi(h, n)$ так разложим:

$$\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} r^{t^2}.$$

Во второй из полученных сумм переменную суммирования заменим по формуле $t = \frac{n}{2} + t_1$; тогда она примет вид

$$\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n^2}{4} + nt_1 + t_1^2}.$$

Но легко видеть, что $\frac{n^2}{4} + nt_1 \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$, и, следовательно, окончательно вторая сумма принимает вид:

$$\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n}{2} + t_1^2} = \sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t_1^2},$$

т[ак] как $r^{\frac{n}{2}} = -1$. Итак, имеем:

$$\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} - \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} = 0. \quad (20)$$

§6

Рассмотрим, наконец, случай $n \equiv 0 \pmod{4}$. В формуле (15) положим $m = \frac{n}{2} - 1$ и $x^{\frac{1}{2}} = -r^{-1}$ (нетрудно убедиться в том, что $x = r^{-2}$ — первообразный корень уравнения $x^{\frac{n}{2}} = 1$). После такого преобразования формула (15) примет вид:

$$\sum (-1)^\mu r^{-\mu} (m, \mu) = (1 - r^{-1})(1 + r^{-2})(1 - r^{-3}) \cdots (1 - r^{-\frac{n}{2}+1}), \quad (2.8')$$

причем знак $\sum$ достаточно распространить на значения $\mu = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$. (m, μ) будет равно теперь такому выражению:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - r^{-n+2})(1 - r^{-n+4}) \cdots (1 - r^{-n+2\mu})}{(1 - r^{-2})(1 - r^{-4}) \cdots (1 - r^{-2\mu})} &= \\ &= \frac{(1 - r^2)(1 - r^4)(1 - r^6) \cdots (1 - r^{2\mu})}{(1 - r^{-2})(1 - r^{-4})(1 - r^{-6}) \cdots (1 - r^{-2\mu})} = \\ &= (-1)^\mu r^{2(1+2+3+\cdots+\mu)} = (-1)^\mu r^{\mu(\mu+1)}; \end{aligned}$$

след[овательно], сумма, стоящая в левой части равенства (2.8'), преобразуется в:

$$\sum_{\mu=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^\mu r^{-\mu} \cdot (-1)^\mu r^{\mu(\mu+1)} = \sum_{\mu=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\mu^2}.$$

С другой стороны, находим:

$$\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{n-1} r^{t^2} = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} r^{t^2}.$$

Вторую из полученных сумм подстановкой $t = \frac{n}{2} + t_1$ приведем к следующей:

$$\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n^2}{4} + nt_1 + t_1^2}.$$

Замечая, что $\frac{n^2}{4} + nt_1 \equiv 0 \pmod{n}$, найдем для второй суммы такое выражение: $\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t_1^2}$, и

след[овательно]: $\varphi(h, n) = 2 \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2}.$

На этом основании формула (8') окончательно преобразуется в следующую:

$$\varphi(h, n) = 2(1 - r^{-1})(1 + r^{-2})(1 - r^{-3}) \cdots (1 - r^{-\frac{n}{2}+1}); \quad (2.8'')$$

далее находим:

$$\begin{aligned} 1 + r^{-2} &= -r^{\frac{n}{2}-2} (1 - r^{-\frac{n}{2}+2}) \\ 1 + r^{-4} &= -r^{\frac{n}{2}-4} (1 - r^{-\frac{n}{2}+4}) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$1 + r^{-\frac{n}{2}+2} = -r^{-2}(1 - r^{-2}),$$

и след[овательно]

$$\begin{aligned}\varphi(h, n) &= 2(-1)^{\frac{n}{4}-1} r^{2(1+2+\dots+(\frac{n}{4}-1))} (1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-\frac{n}{2}+1}) = \\ &= 2(-1)^{\frac{n}{4}-1} r^{\frac{n^2}{16}-\frac{n}{4}} (1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-\frac{n}{2}+1});\end{aligned}\quad (21)$$

далее находим:

$$\begin{aligned}1 - r^{-1} &= -r^{-1}(1 - r^{-n+1}) \\ 1 - r^{-2} &= -r^{-2}(1 - r^{-n+2}) \\ &\dots \\ 1 + r^{-\frac{n}{2}+1} &= -r^{-\frac{n}{2}+1}(1 - r^{-\frac{n}{2}-1}).\end{aligned}$$

Принимая во внимание эти равенства, формулу (21) так перепишем:

$$\varphi(h, n) = 2(-1)^{\frac{3}{4}n - \frac{n^2}{16}} (1 - r^{-\frac{n}{2}-1})(1 - r^{-\frac{n}{2}-2}) \dots (1 - r^{-n+1}).\quad (22)$$

Перемножая равенства (21), (22) и $2 = (1 - r^{\frac{n}{2}})$, имеем:

$$2[\varphi(h, n)]^2 = 4(-1)^{\frac{n}{4}-1+\frac{3}{4}n - \frac{n^2}{4}} r^{-\frac{n}{4}} (1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-n+1})$$

или:

$$[\varphi(h, n)]^2 = 2r^{\frac{n}{4}} (1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-n+1}).$$

Заметим, что:

$$r^{\frac{n}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi h}{n} \cdot \frac{n}{8}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi h}{n} \cdot \frac{n}{8}\right) = \cos\frac{\pi h}{4} + i \sin\frac{\pi h}{4} = \pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}},$$

причем в числителе берется знак «+» или «-» смотря по тому, будет ли h формы $4\mu + 1$, или формы $4\mu + 3$. Кроме того,

$$(1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-n+1}) = n,$$

поэтому окончательно находим

$$\varphi(h, n) = \pm(1 \pm i)\sqrt{n}.\quad (23)$$

Остается определить знак, стоящий пред выражением $(1 \pm i)\sqrt{n}$. Это мы сделаем пока лишь для случая $h = 1$. Полагая $R = \cos\frac{\pi}{n} + i \sin\frac{\pi}{n}$ и замечая что $R^n = -1$, мы формулу (2.8'') так преобразуем для случая $h = 1$:

$$\varphi(h, n) = 2(1 + R^{n-2})(1 + R^{-4})(1 + R^{n-6}) \dots (1 + R^{-n+4})(1 + R^2)$$

или

$$\varphi(h, n) = 2(1 + R^2)(1 + R^{-4})(1 + R^6) \dots (1 + R^{-n+4})(1 + R^{n-2});$$

далее находим:

$$1 + R^2 = R(R^{-1} + R^1) = 2R \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\begin{aligned}
1 + R^{-4} &= 2R^{-2} \cos \frac{2\pi}{n} \\
1 + R^6 &= 2R^3 \cos \frac{3\pi}{n} \\
&\dots \\
1 + R^{n-2} &= 2R^{\frac{n}{2}-1} \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{n}
\end{aligned}$$

и след[овательно]:

$$\varphi(h, n) = 2^{\frac{n}{2}} R^{\frac{n}{4}} \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdots \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{n}.$$

Все косинусы, входящие в это произведение, положительны, и кроме того: $R^{\frac{n}{4}} = (1 + i)$ и след[овательно] $\varphi(1, n)$ = положительному числу, умноженному на $(1 + i)$; т[o] есть:

$$\varphi(1, n) = (1 + i)\sqrt{n}. \quad (24)$$

Собирая формулы (19), (20), (24), имеем окончательно:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(1, n) = (1 + i)\sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu; \\ \varphi(1, n) = \sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu + 1; \\ \varphi(h, n) = 0, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu + 2; \\ \varphi(1, n) = i\sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu + 3. \end{array} \right. \quad (25)$$

§7

Метод Гаусса, которым мы получили формулы (25), – метод алгебраический, так как выполняется чисто алгебраическими преобразованиями. Сейчас мы рассмотрим другие доказательства тех же формул, основанные на довольно высоких предложениях математического анализа. Одно из них дано Дирихле, другое Коши. При рассмотрении этих доказательств нам придется пользоваться некоторыми предложениями из теории рядов Фурье. Выводом этих предложений мы и займемся.

Пусть γ – некоторое положительное число, и пусть функция $F(\theta)$ – конечная, непрерывная, убывающая в промежутке $(0, \gamma)$, удовлетворяющая условию: $F(\theta) \geq 0$. Положим

$$S_p = \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta \quad \text{и рассмотрим} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} S_p.$$

Подстановкою $p\theta = x$ найдем:

$$S_p = \int_0^{p\gamma} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

Пусть теперь $p\gamma = q\pi + \rho$, где $0 \leq \rho < \pi$. Тогда интеграл S_p можно разложить по следующей схеме:

$$S_p = \left(\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(q-1)\pi}^{q\pi} + \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \right) \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

n -ый интеграл этого ряда, т[o] есть

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx,$$

подстановкою $x = (n-1)\pi + \xi$ преобразуется к интегралу:

$$(-1)^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin \xi}{(n-1)\pi + \xi} F\left(\frac{(n-1)\pi + \xi}{p}\right) d\xi,$$

подынтегральная функция которого, очевидно, постоянно ≥ 0 , и след[овательно] n -ый член нашего ряда можно представить в виде: $(-1)^{n-1}u_n$ где $u_n > 0$. Можно написать на этом основании:

$$S_p = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{q-1}u_q + R_q \quad (26)$$

где положено:

$$R_q = \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

$(n+1)$ -ый же член нашего ряда после преобразования имеет вид:

$$(-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin \xi}{n\pi + \xi} F\left(\frac{n\pi + \xi}{p}\right) d\xi.$$

Сравнивая это выражение с выражением для n -го члена и принимая во внимание, что $F(\theta)$ – функция убывающая, легко найдем, что $u_{n+1} < u_n$, т[ак] что члены знакопеременного ряда (26) убывают по мере удаления от начала ряда. На основании общей теории знакопеременных рядов можем написать поэтому:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_{2k} < S_p - R_q < u_1 - u_2 + \dots + u_{2k+1}$$

и след[овательно]: $S_p - R_q = u_1 - u_2 + \dots - u_{2k} + \varepsilon_k u_{2k+1}$, где $0 < \varepsilon_k < 1^8$, то есть

$$S_p = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon_k \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

Применяя к последним двум интегралам теорему о среднем значении, преобразовав их предварительно подстановками $x = 2k\pi + \xi$ и $x = q\pi + \xi$, найдем:

$$S_p = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \vartheta_k \frac{\sin \vartheta\pi}{2k + \vartheta} F\left(\frac{2k\pi + \vartheta\pi}{p}\right) + (-1)^q \frac{\rho \sin \vartheta_1 \rho}{q\pi + \vartheta_1 \rho} F\left(\gamma - \frac{(1 - \vartheta_1)\rho}{p}\right)$$

где $0 < \vartheta < 1$ и $0 < \vartheta_1 < 1^9$. Оставляя k постоянным, будем приближать p , а след[овательно] и q к пределу ∞ . Найдем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = F(0) \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon_k \cdot \frac{\sin \vartheta\pi}{2k + \vartheta} F(0),$$

причем будет, очевидно, $0 \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon_k \leq 1$ в силу условия: $0 < \varepsilon_k < 1$.

Увеличивая теперь произвольное до сих пор число k до бесконечности, найдем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \quad (27)$$

Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ представляет собою конечное определенное число. Действительно, разлагая этот интеграл по схеме:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots,$$

⁸Здесь k – произвольное целое число с условиями $1 \leq k < [q/2]$. – Прим. публ.

⁹Исправлено. В рукописи: $0 < \vartheta < \pi$ и $0 < \vartheta_1 < \pi$. – Прим. публ.

легко убеждаемся, что ряд, выражающий этот интеграл, знакопеременный; члены его убывают беспрдельно по мере удаления от начала ряда. Следовательно, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходящийся, т[о] есть $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \kappa$ – постоянному числу, и след[овательно]:

$$\lim_{p=\infty} S_p = \kappa F(0). \quad (28)$$

Не определяя пока постоянной κ , обобщим формулу (28) на более общие случаи выбора $F(\theta)$.

Пусть $F(\theta)$ принимает в интервале $(0, \gamma)$ отрицательные значения. В силу конечности функции $F(\theta)$ можно найти такое число A , что $A + F(\theta)$ в промежутке $(0, \gamma)$ будет принимать только положительные значения. Но тогда по формуле (28):

$$\lim_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} [A + F(\theta)] d\theta = \kappa [F(0) + A],$$

откуда

$$\lim_{p=\infty} \int_0^\gamma F(\theta) d\theta = \kappa F(0),$$

т[о] есть формула (28) справедлива и в этом случае.

Если $F(\theta)$ – возрастающая функция в интервале $(0, \gamma)$, то $-F(\theta)$ – убывающая функция в том же интервале, и к последней функции можно, след[овательно], применить формулу (28). Найдем:

$$\lim_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} [-F(\theta)] d\theta = \kappa [-F(0)],$$

откуда опять получается формула (28).

Найдем теперь

$$\lim_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta,$$

полагая, что $F(\theta)$ монотонна в интервале (α, β) . Пусть для определенности $\beta > \alpha > 0$ ¹⁰. Всегда можно выбрать в интервале $(0, \beta)$ такую монотонную функцию $F_1(\theta)$, которая бы для значений θ в интервале (α, β) совпадала с функцией $F(\theta)$ (на черт[еже] I кривая MN изображает функцию $F(\theta)$ и CB – графическое изображение функции $F_1(\theta)$).

Найдем тогда:

$$\begin{aligned} \lim_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} F_1(\theta) d\theta &= \\ &= \lim_{p=\infty} \int_0^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} F_1(\theta) d\theta - \lim_{p=\infty} \int_0^\alpha \frac{\sin p\theta}{\theta} F_1(\theta) d\theta = \kappa F(0) - \kappa F(0) = 0, \end{aligned}$$

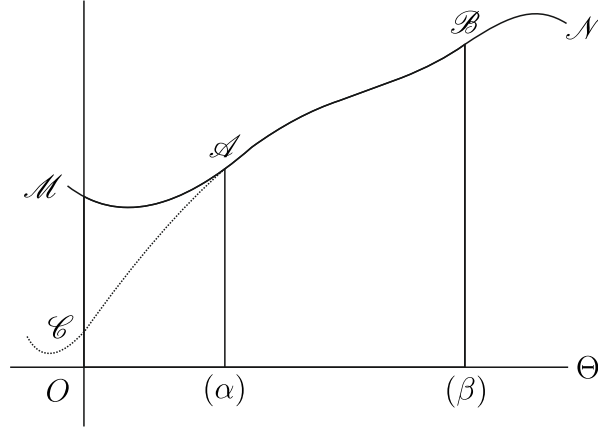
а следовательно и

$$\lim_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta = 0. \quad (29)$$

Положим теперь, что функция $F(\theta)$ не монотонна в интервале $(0, \gamma)$. Пусть все максимумы и минимумы ее соответствуют значениям $\theta = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$. Интеграл $\int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta$ расположим по схеме:

$$\int_0^\gamma = \int_0^{\mu_1} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} + \dots + \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} + \int_{\mu_k}^\gamma.$$

¹⁰Исправлено. В рукописи: $\beta > \alpha$. - Прим. публ.



Чертеж I.

Так как в каждом из интервалов $(0, \mu_1), (\mu_1, \mu_2), \dots, (\mu_k, \gamma)$ функция $F(\theta)$ монотонна, то можно применить к первому из этих интегралов формулу (28), а к каждому из остальных – формулу (29), после чего придем снова к формуле (28).

Положим наконец, что $F(\theta)$ включает в себе мнимые параметры. Отделив вещественную часть $F(\theta)$ от мнимой, найдем: $F(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta)$. Полученные функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ также конечны и непрерывны и к ним, след[овательно], можно применить формулу (28). Найдем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \kappa \varphi(0) \quad \text{и} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} \psi(\theta) d\theta = \kappa \psi(0).$$

Принимая во внимание эти равенства, найдем:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\gamma} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta &= \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\gamma} \frac{\sin p\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta + i \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\gamma} \frac{\sin p\theta}{\theta} \psi(\theta) d\theta = \kappa \varphi(0) + i \cdot \kappa \psi(0) = \kappa F(0). \end{aligned}$$

Итак, формула (28) справедлива и в этом случае.

Для определения постоянной κ воспользуемся формулой (28). Т[ак] как $\kappa = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ не зависит ни от вида функции $F(\theta)$, ни от γ и p , то для определения его в формуле (28) можно положить $F(\theta) = \frac{\theta}{\sin \theta}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $p = 2n + 1$. Найдем тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \kappa, \quad \text{ибо} \quad F(0) = 1.$$

Применяя сюда известную формулу

$$\cos 2\theta + \cos 4\theta + \dots + \cos 2n\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{2 \sin \theta} - \frac{1}{2}, \quad (30)$$

найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2 \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta + 2 \cos 6\theta + \dots + 2 \cos 2n\theta \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (31)$$

и след[овательно] $\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Формула (28) теперь примет следующий вид:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} F(0) \quad (32)$$

§8

Обратимся теперь к разысканию такого предела:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\gamma \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta,$$

причем положим, что m – целое нечетное число. Положим $F(\theta) = \frac{\theta}{\sin \theta} f(\theta)$, где $f(\theta)$ – конечная непрерывная функция. $F(\theta)$ будет также конечной непрерывной функцией для всякого θ , лежащего в интервале $(0, \infty)$, за исключением $\theta = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, для которых $F(\theta) = \infty$. Если $\gamma < \pi$,¹¹ то непосредственно, след[овательно], можем применить к $F(\theta)$ формулу (32). Найдем тогда:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\gamma \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0). \quad (33)$$

Если $\gamma = \pi$, то $\int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ представим в виде суммы интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \quad \text{и} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta.$$

Второй из этих интегралов подстановкою $\theta = \pi - \theta_1$ преобразуется к следующему:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta_1}{\sin \theta_1} f(\pi - \theta_1) d\theta_1,$$

и след[овательно]

$$\int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} [f(\theta) + f(\pi - \theta)] d\theta.$$

Функция, стоящая в скобках вида $[]$, – конечная непрерывная функция в промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$.

Поэтому можно применить к ней формулу (32). Найдем тогда:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} [f(\theta) + f(\pi - \theta)] d\theta = \frac{\pi}{2} [f(0) + f(\pi)],$$

т[о] есть

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} [f(0) + f(\pi)]. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь случай, когда γ – любое кратное π положительное число; положим $\gamma = h\pi$. Интеграл

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

¹¹Исправлено. В рукописи: $\gamma < 0$. – *Прим. публ.*

разложим по схеме:

$$\int_0^{h\pi} = \left(\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots + \int_{(h-1)\pi}^{h\pi} \right) \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta.$$

Подставляя в каждом k -ом интеграле этого ряда: $(k-1)\pi + \theta_1$ вместо θ , получим, следовательно, равенство:

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} [f(\theta) + f(\pi + \theta) + \dots + f((h-1)\pi + \theta)] d\theta.$$

Т[ак] как функция, стоящая в скобках вида [], конечна и непрерывна, то к последнему интегралу мы можем применить формулу (34). Найдем тогда:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left[\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f((h-1)\pi) + \frac{1}{2} f(h\pi) \right]. \quad (35)$$

Положим наконец $\gamma = h\pi + \rho$, где $0 < \rho < \pi$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{h\pi+\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta &= \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{h\pi}^{h\pi+\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_0^\rho \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(h\pi + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Применив к первому из полученных интегралов формулу (35), и ко второму – формулу (33), найдем:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{h\pi+\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left[\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(h\pi) \right]. \quad (36)$$

Для нашей цели важно еще рассмотреть тот случай, когда γ стремится к пределу ∞ . Пусть притом $f(\theta)$ такова, что $|f(\theta)|$ представляет монотонную убывающую функцию¹², такую что ряд

$$|f(\theta)| + |f(\pi + \theta)| + |f(2\pi + \theta)| + \dots \quad (37)$$

– сходящийся. Как легко видеть в этом случае, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ есть интеграл сходящийся. Действительно, рассмотрим¹³

$$J_k = \int_{k \cdot \frac{\pi}{2}}^{k_1 \cdot \frac{\pi}{2} + r} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta, \quad \text{где } 0 \leq r < \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл этот можно разложить по следующей схеме:

$$J_k = \left(\int_{k \cdot \frac{\pi}{2}}^{(k+1) \cdot \frac{\pi}{2}} + \int_{(k+1) \cdot \frac{\pi}{2}}^{(k+2) \cdot \frac{\pi}{2}} + \dots + \int_{k_1 \cdot \frac{\pi}{2}}^{k_1 \cdot \frac{\pi}{2} + r} \right) \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta,$$

или, после очевидных преобразований, можно положить J_k равным

¹²Из общего контекста рассуждений следует, что И.М. Виноградов рассматривал лишь непрерывные функции $f(\theta)$. Это и предполагается в дальнейшем; см. раздел 3 “Дополнение”. – *Прим. публ.*

¹³Следующий фрагмент рукописи до слов “на основании сходимости ряда (37)” содержит ошибочные рассуждения, которые, впрочем, не влияют на правильность основного результата. По этому поводу см. раздел 3 “Дополнение”. – *Прим. публ.*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f\left(k \frac{\pi}{2} + \theta\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f\left((k+1) \frac{\pi}{2} + \theta\right) d\theta +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f\left((k+2) \frac{\pi}{2} + \theta\right) d\theta + \dots + \int_0^r \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f\left(k_1 \frac{\pi}{2} + \theta\right) d\theta.$$

Замечая же, что $\frac{\sin m\theta}{\sin \theta}$ постоянно ≥ 0 и что $|f(\theta)|$ — убывающая монотонная функция, находим без труда:

$$|J| \leq \left| f\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta + \left| f\left((k+1) \frac{\pi}{2}\right) \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta + \dots + \left| f\left(k_1 \frac{\pi}{2}\right) \right| \int_0^r \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Заменяя теперь интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta$ его значением из формулы (31), именно чрез $\frac{\pi}{2}$, и замечая что

$$\int_0^r \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta,$$

$$|J_k| < \frac{\pi}{2} \left(\left| f\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right| + \left| f\left((k+1) \frac{\pi}{2}\right) \right| + \dots + \left| f\left(k_1 \frac{\pi}{2}\right) \right| \right) = \frac{\pi}{2} \varepsilon_k$$

на основании сходимости ряда (37) заключаем, что ε_k , а вместе с тем и $|J_k|$ при достаточно большом k и при всяком $k_1 > l$ будет сколь угодно мало, и, следовательно, $\int_0^\infty \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ — интеграл сходящийся. На этом основании заключаем, что формула (35) или (36) остается справедливой и в предельном случае — при $h = \infty$, если только $f(\theta)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Можем написать поэтому:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left[\frac{1}{2} f(\theta) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \dots \right].^{14} \quad (38)$$

§9

Положим теперь $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2h\pi} f(t) \cos nt dt$ и рассмотрим ряд¹⁵

$$\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2h\pi} f(t) \left[1 + 2 \cos x \cos t + 2 \cos 2x \cos 2t + \dots \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2h\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \cos(x-t) + 2 \cos 2(x-t) + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \dots \right] dt$$

Принимая во внимание формулу (30), найдем отсюда:

$$\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots =$$

¹⁴Исправлено. В рукописи пропущен множитель π в правой части. — Прим. публ.

¹⁵Из дальнейших рассуждений оказывается, что этот ряд рассматривается для значений $0 \leq x < \pi$. — Прим. публ.

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \lim_{n=\infty} \int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt + \lim_{n=\infty} \int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t+x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) dt \right\} \quad (39)$$

Интеграл

$$U_n = \int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt$$

преобразуем подстановкою: $\frac{1}{2}(t-x) = \omega$, т[о] есть $t = x + 2\omega$; получим тогда:

$$\begin{aligned} U_n &= \int_{-\frac{x}{2}}^{h\pi - \frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin \omega} f(x+2\omega) d\omega = \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin \omega} f(x-2\omega) d\omega + \int_0^{h\pi - \frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin \omega} f(x+2\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Отсюда для случая $x \neq 0$ находим по формулам (33) и (36) предел первого интеграла при $n = \infty$ равным $\frac{\pi}{2}f(x)$, а второго

$$\pi \left\{ \frac{1}{2}f(x) + f(2\pi+x) + f(4\pi+x) + \dots + f(2(h-1)\pi+x) \right\}$$

и след[овательно]:

$$\lim_{n=\infty} U_n = \pi \{ f(x) + f(2\pi+x) + f(4\pi+x) + \dots + f(2(h-1)\pi+x) \}.$$

Если же $x = 0$, то первый интеграл равен 0, а для второго по формуле (35) получается предел

$$\pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \dots + \frac{1}{2}f(2h\pi) \right\}$$

и след[овательно]:

$$\lim_{n=\infty} U_n = \pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \dots + \frac{1}{2}f(2h\pi) \right\}.$$

Аналогично находим, обозначая

$$\int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t+x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) dt \quad \text{чрез} \quad V_n,$$

для $x \neq 0$:

$$\lim_{n=\infty} V_n = \pi \{ f(2\pi-x) + f(4\pi-x) + \dots + f(2h\pi-x) \},$$

и если $x = 0$, то

$$\pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \dots + f(2(h-1)\pi) + \frac{1}{2}f(2h\pi) \right\}.$$

Формула (39) обращается теперь в следующую:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots &= f(x) + f(2\pi-x) + f(2\pi+x) + \\ &+ f(4\pi-x) + f(4\pi+x) + \dots + f(2(h-1)\pi+x) + f(2h\pi-x) \end{aligned}$$

если $x \neq 0$ и лежит в интервале $(0, \pi)$, и

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 + \dots = 2 \left[\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \dots + f(2(h-1)\pi + x) + \frac{1}{2}f(2h\pi) \right]$$

если $x = 0$. Замечая, что $\cos nt = \cos(-n)t$, последнюю формулу приведем к виду:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^{2h\pi} f(x) \cos nx \, dx = 2\pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots + f(2(h-1)\pi) + \frac{1}{2}f(2h\pi) \right\}. \quad (40)$$

§10

Пусть, наконец,

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos nt \, dt,$$

где $f(t)$ означает функцию, удовлетворяющую условиям, указанным при выводе формулы (38). Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$$

Можно все интегралы, представляющие члены этого ряда, объединить под одним знаком. Найдем тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2} + 2 \cos x \cos t + 2 \cos 2x \cos 2t + \dots \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \dots + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \dots \right] dt. \end{aligned} \quad ^{16}$$

Принимая во внимание формулу (30), найдем отсюда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots &= \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \lim_{n=\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) \, dt + \lim_{n=\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t+x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) \, dt \right\} \end{aligned}$$

Интеграл

$$U_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) \, dt$$

преобразуем подстановкой: $\frac{1}{2}(t-x) = \omega$, откуда $t = x + 2\omega$. Получим тогда:

$$\begin{aligned} U_n &= \int_{-\frac{x}{2}}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega}{2 \sin \omega} f(x+2\omega) \, d\omega = \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{2 \sin \omega} f(x-2\omega) \, d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega}{2 \sin \omega} f(x+2\omega) \, d\omega. \end{aligned}$$

¹⁶Исправлено. В рукописи под последним интегралом вместо x используется переменная u . Тоже относится к приводимым ниже формулам для U_n и ω . — *Прим. публ.*

Если x лежит в промежутке $(0, \pi)$ и не равно 0, то к первому из полученных интегралов можно применить формулу (33), а ко второму – формулу (38). Предел первого интеграла при $n = \infty$ будет $\frac{1}{2}\pi f(x)$, а второго –

$$\pi \left\{ \frac{1}{2} f(x) + f(2\pi + x) + \dots \right\},$$

и, след[овательно],

$$U_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \pi \{ f(x) + f(2\pi + x) + \dots \}.$$

Если же $x = 0$, то первый интеграл = 0 и, след[овательно],

$$U_\infty = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots \right\}.$$

Аналогично найдем:

$$V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t + x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t + x)} f(t) dt = \pi \{ f(2\pi - x) + f(4\pi - x) + \dots \},$$

если $x \neq 0$, и

$$V_\infty = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots \right\}$$

если $x = 0$ и, след[овательно],

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots &= f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + \dots \quad \text{если } x \neq 0 \\ \text{и } \frac{1}{2} A_0 + A_1 + A_2 + \dots &= 2 \left[\frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots \right] \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

§11

Имея в виду доказательство Дирихле, рассмотрим 2 следующие интеграла:

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx \quad \text{и} \quad q = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

Прежде всего убедимся, что они имеют конечные определенные значения. Преобразовав интеграл p подстановкой $x^2 = y$, найдем:

$$p = 2 \int_0^\infty \cos(x^2) dx = 2 \int_0^\infty \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Разложив полученный интеграл по схеме

$$p = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} + \dots + \int_{r\pi + \frac{\pi}{2}}^{r\pi + \frac{3\pi}{2}} \dots \right],$$

рассмотрим 2 соседние интеграла этой схемы:

$$J_r = \int_{r\pi + \frac{\pi}{2}}^{r\pi + \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy \quad \text{и} \quad J_{r+1} = \int_{r\pi + \frac{3\pi}{2}}^{r\pi + \frac{5\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Подстановкою $y = \pi + \xi$ второй из них преобразуется в следующий:

$$- \int_{r\pi + \frac{\pi}{2}}^{r\pi + \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{\pi + y}} dy,$$

откуда ясно, что $|J_r| > |J_{r+1}|$,¹⁷ и, кроме того, что J_r и J_{r+1} разных знаков. С другой стороны, находим:

$$|J_r| < \int_{r\pi + \frac{\pi}{2}}^{r\pi + \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} < \frac{\pi}{\sqrt{\pi r + \frac{\pi}{2}}},$$

откуда следует, что пред. $J_r = 0$.

Итак, полученное разложение для p представляет собою убывающий знакопеременный ряд, члены которого беспредельно убывают по мере удаления от начала ряда и, след[овательно], p имеет конечное определенное значение. Подобным же образом докажем сходимость интеграла q .

Обозначив чрез δ величину некоторого угла, положим $\Delta = p \cos \delta - q \sin \delta$, т[о] есть

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\cos \delta \cos x^2 - \sin \delta \sin x^2\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + x^2) dx.$$

Пусть теперь α – некоторая положительная постоянная величина. Заменяя в последнем интеграле x на αx , найдем

$$\frac{\Delta}{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + \alpha^2 x^2) dx. \quad (42)$$

Обозначив чрез β другую положительную постоянную величину, полученный интеграл разложим следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + \alpha^2 x^2) dx = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta + \alpha^2 x^2) dx.$$

Каждый отдельный интеграл

$$J_s = \int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta + \alpha^2 x^2) dx$$

преобразуем подстановкой $x = s\beta + \xi$; получим:

$$J_s = \int_0^\beta \cos(\delta + \alpha^2 s^2 \beta^2 + 2\alpha^2 s\beta x + \alpha^2 x^2) dx.$$

Постоянные α и β , которые до сих пор были совершенно произвольны, подчиним следующим 2-м условиям. Пусть m – некоторое целое положительное число; положим тогда $\alpha^2 \beta^2 = 2m\pi$, $2\alpha^2 \beta = 1$, откуда находим $\alpha = \frac{1}{\sqrt{8m\pi}}$ и $\beta = 4m\pi$. Интеграл J_s преобразуется теперь в следующий:

$$\begin{aligned} J_s &= \int_0^\beta \cos(\delta + sx + \alpha^2 x^2) dx = \int_0^\beta \cos\left(\delta + sx + \frac{x^2}{8m\pi}\right) dx = \\ &= \int_0^\beta \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \cos sx dx - \int_0^\beta \sin\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \sin sx dx. \end{aligned}$$

¹⁷Исправлено. В рукописи пропущены знаки абсолютной величины. – Прим. публ.

Формула(42) принимает теперь такой вид:

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \cos sx \, dx - \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \sin\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \sin sx \, dx.$$

Но так как $\sin(0 \cdot x) = 0$ и $\sin(sx) = -\sin(-sx)$, то вторая из полученных сумм, очевидно, равна 0 и, следовательно,

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right) \cos sx \, dx.$$

Отсюда на основании формулы (40) находим:

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + \dots + f(2(2m-1)\pi) + \frac{1}{2} f(4m\pi) \right\}, \quad (43)$$

если обозначим $\cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right)$ чрез $f(x)$.

Легко видеть, что $f(4m\pi + 2s\pi) = f(2s\pi)$ и, следовательно, $f(2s\pi)$ можно рассматривать как сумму

$$\frac{1}{2} f(2s\pi) + \frac{1}{2} f(4m\pi + 2s\pi).$$

Применяя это равенство к членам $f(2\pi), f(4\pi), \dots, f(2(m-1)\pi)$, вместо формулы (43) получим следующую:

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = \pi \sum_{s=0}^{4m-1} f(2s\pi) = \pi \sum_{s=0}^{4m-1} \cos\left(\delta + s^2 \cdot \frac{\pi}{2m}\right). \quad (36')$$

Положим теперь $4m = n$, и пусть $\sqrt{n}$ – арифметическое значение $\sqrt{n}$. Тогда найдем:

$$\Delta\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \cos\left(\delta + s^2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

где $\Delta = p \cos \delta - q \sin \delta$. Легко определить отсюда p и q . Полагая $n = 4$, находим:

$$\begin{aligned} 2(p \cos \delta - q \sin \delta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \delta + \cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\delta + \frac{4\pi}{2}\right) + \cos\left(\delta + \frac{9\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \delta + \cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \right] = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\cos \delta - \sin \delta] \end{aligned}$$

или

$$\left(p - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \cos \delta = \left(q - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \sin \delta,$$

откуда в силу произвольности угла δ находим: $p = q = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Формулу (36') можно на этом основании так переписать:

$$\sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos \delta - \sin \delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \cos\left(\delta + s^2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

или еще:

$$\cos \delta - \sin \delta = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\cos \delta \cos\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right) - \sin \delta \sin\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right) \right),$$

откуда, ввиду произвольности угла δ , находим:

$$\sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \cos\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \sin\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right).$$

Умножив второе равенство почленно на i и сложив с первым, находим:

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi i}{n}} = (1+i)\sqrt{n}, \quad \text{т.е.} \quad \varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n}. \quad (44)$$

§12

Чтобы распространить эту формулу на другие значения n , докажем следующие свойства функции $\varphi(h, n)$:

1) Если $h \equiv h' \pmod{p}$, то

$$\varphi(h, n) = \varphi(h', n), \quad \text{так как} \quad e^{s^2 \cdot \frac{2h\pi i}{n}} = e^{s^2 \cdot \frac{2h'\pi i}{n}}; \quad (45)$$

2) Если a — число, взаимно простое с n , то

$$\varphi(ha^2, n) = \varphi(h, n). \quad (46)$$

Действительно,

$$\varphi(ha^2, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{(as)^2 \frac{2\pi}{n}}.$$

Но когда s пробегает полную систему вычетов по модулю n , as также пробегает полную систему вычетов по модулю n .

3) Если m и n — взаимно простые числа, то

$$\varphi(hm, n)\varphi(hn, m) = \varphi(h, mn). \quad (47)$$

Действительно, перемножив почленно равенства

$$\varphi(hm, n) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{r^2 \frac{2hm\pi}{n}} \quad \text{и} \quad \varphi(hn, m) = \sum_{t=0}^{m-1} e^{t^2 \frac{2hn\pi}{m}},$$

найдем:

$$\begin{aligned} \varphi(hm, n)\varphi(hn, m) &= \sum e^{(r^2 \frac{m}{n} + t^2 \frac{n}{m}) \cdot 2h\pi i} = \sum e^{\frac{(rm)^2 + (tn)^2}{mn} \cdot 2h\pi i} = \\ &= \sum e^{\frac{(rm)^2 + 2rmtn + (nt)^2}{mn} \cdot 2h\pi i} = \sum e^{\frac{(rm+tn)^2}{mn} \cdot 2h\pi i}. \end{aligned}$$

Здесь соответственно значениям: $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $t = 0, 1, 2, \dots, m-1$ число $rm + t$ принимает mn значений, несравнимых между собою по модулю mn . В самом деле, допустив что

$$r_1m + t_1n \equiv r_2m + t_2n \pmod{mn} \quad \text{или} \quad (r_1 - r_2)m + (t_1 - t_2)n \equiv 0 \pmod{mn},$$

мы имели бы следующие сравнения:

$$(r_1 - r_2)m \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{и} \quad (t_1 - t_2)n \equiv 0 \pmod{m},$$

откуда следует, что:

$$r_1 \equiv r_2 \pmod{n} \quad \text{и} \quad t_1 \equiv t_2 \pmod{m}.$$

На основании этих соображений находим окончательно:

$$\varphi(hm, n)\varphi(hn, m) = \sum_{s=0}^{mn-1} e^{s^2 \frac{2h\pi i}{mn}} = \varphi(h, nm).$$

§13

Пусть n – нечетное число. Согласно (47) находим: $\varphi(4, n)\varphi(n, 4) = \varphi(1, 4n)$. Но $\varphi(4, n) = \varphi(1, n)$ согласно (46);

$$\varphi(4, n) = \sum_{s=0}^3 e^{s^2 \frac{2n\pi i}{4}} = 2(1 \pm e^{\frac{n\pi i}{2}}) = 2(1 \pm i),$$

где берется знак «+» или «−» смотря по тому, будет ли $n \equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod{4}$; наконец $\varphi(1, 4n) = 2(1 + i)\sqrt{n}$ согласно формуле (44). Имеем, следовательно:

$$\varphi(1, n) = \frac{(1 + i)\sqrt{n}}{1 \pm i} = \sqrt{n} \quad \text{или} \quad i\sqrt{n} \quad (48)$$

смотря по тому, будет ли $n \equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod{4}$. Для случая же $n \equiv 2 \pmod{4}$ можно повторить доказательство, приведенное при рассмотрении метода Гаусса. Итак, мы снова пришли к формулам ...¹⁸

§14

Обращаясь к рассмотрению доказательства Коши, рассмотрим такой определенный интеграл:

$$U = \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos bx \, dx,$$

где a^2 – некоторое комплексное число. Полагая его равным $\alpha + \beta i$, находим:

$$U = \int_0^\infty e^{-(\alpha + \beta i)x^2} \cos bx \, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} (\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2) \cos bx \, dx.$$

Но так как $|e^{-\alpha x^2} (\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2) \cos bx| \leq e^{-\alpha x^2}$, то, следовательно:

$$|U| < \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \, dx.$$

Последний же интеграл, как известно, при $\alpha > 0$ равен $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Итак,

$$|U| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

т[о] есть интеграл U – сходящийся, если только вещественная часть a^2 больше 0.

¹⁸Конец фразы в копии рукописи утрачен. – Прим. публ.

Для определения значения этого интеграла воспользуемся методом дифференциальных уравнений. Заметим, что интеграл

$$V = \int_0^\infty -xe^{-a^2x^2} \sin bx \, dx,$$

полученный из интеграла U дифференцированием по параметру b , равномерно сходящийся. Действительно,¹⁹

$$\left| \int_u^\infty -xe^{-a^2x^2} \sin bx \, dx \right| < \int_u^{+\infty} xe^{-a^2x^2} \, dx = -\frac{1}{2a^2} \left[e^{-a^2x^2} \right]_u^\infty = \frac{1}{2a^2} e^{-a^2u^2}$$

и, следовательно, при $u = \infty$ стремится к пределу 0 независимо от того, какое значение имеет параметр b . Это же показывает, что V есть интеграл равномерно сходящийся.

Итак, интеграл U – сходящийся при всяком b , а интеграл V – равномерно сходящийся при всяком b . В таком случае, как известно, справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{db} &= V = \int_0^\infty -xe^{-a^2x^2} \sin bx \, dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{x}{2a^2} \sin bx \, de^{-a^2x^2} = \left[\frac{x}{2a^2} \sin bx e^{-a^2x^2} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{b}{2a^2} e^{-a^2x^2} \cos bx \, dx. \end{aligned}$$

Но

$$\left[\frac{x}{2a^2} \sin bx e^{-a^2x^2} \right]_0^\infty = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial b} = -\frac{b}{2a^2} U.$$

Отсюда, разделяя переменные, находим

$$\frac{dU}{U} = -\frac{b \, db}{2a^2},$$

откуда

$$\lg U = -\frac{b^2}{4a^2} + \lg C \quad \text{или:} \quad U = C e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \quad (49)$$

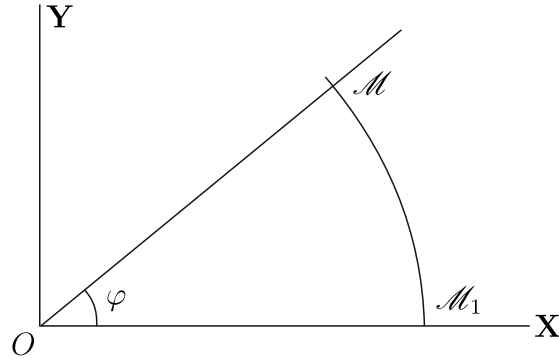
В этой формуле C – постоянная, не зависящая от b . Для определения ее положим в (49) $b = 0$; найдем:

$$C = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \, dx.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int e^{-z^2} \, dz$, взятый по контуру $ОММ_1$, состоящему из 2-х прямых $ОМ$ и $ОМ_1$, угол между которыми обозначим чрез φ , и дуги окружности $М_1М$ радиуса R .

Функция e^{-z^2} , которую можно представить в виде $e^{-\rho^2(\cos 2u + i \sin 2u)}$, если положить $z = \rho(\cos u + i \sin u)$, очевидно, не имеет полюсов на части плоскости, простирающейся в ∞ выделяемой прямыми $ОР$ и $ОР_1$ (включая и точки, лежащие на этих прямых), если только $\cos 2u > 0$. Чтобы это было постоянно, нужно, чтобы угол φ был острый, и, след[овательно], чтобы было: $\varphi < \frac{\pi}{4}$.

¹⁹В правой части следующего неравенства опущены знаки абсолютных величин, присутствующие в рукописи.
- Прим. публ.



Чертеж II.

Итак, при условии $\varphi < \frac{\pi}{4}$ внутри контура OMM_1 и на обводе его функция e^{-z^2} остается целой и след[овательно]:

$$\int_{OM} e^{-z^2} dz = \int_{OM_1} e^{-z^2} dz + \int_{M_1M} e^{-z^2} dz.$$

Первый интеграл второй части этого равенства, очевидно, равен

$$\int_0^R e^{-x^2} dx;$$

предельное значение его при $R = \infty$ есть [интеграл]²⁰

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad \text{равный} \quad \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

второй же можно преобразовать подстановкой $z = R(\cos u + i \sin u)$ к следующему интегралу:

$$T = \int_0^\varphi e^{-R^2 \cos 2u} (-R \sin u + i R \cos u) du.$$

По формуле Дарбу,

$$|T| \leq e^{-R^2 \cos 2\varphi} \cdot R \cdot \varphi$$

и так как $\varphi < \frac{\pi}{4}$, то: $\cos 2\varphi > 0$ и след[овательно] предел $T = 0$. Итак, предел $\int_{M_1M} e^{-z^2} dz$,

если точка M по направлению OM удаляется в ∞ , получается равным $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. Подстановкою

$z = pa$, где $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$, интеграл этот преобразуем в следующий: $\int_0^R e^{-a^2 p^2} \cdot a dp$ и, следовательно,

$$\text{предел}_{R=\infty} a \int_0^R e^{-a^2 p^2} dp = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{или:} \quad a \int_0^\infty e^{-a^2 p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и окончательно:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad \text{если} \quad a = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{и} \quad \varphi < \frac{\pi}{4},$$

²⁰В рукописи отсутствует, добавлено по смыслу. – Прим. публ.

а это и есть нужный нам интеграл C . Формула (49) примет теперь следующий вид:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \quad (50)$$

§15

Применим теперь формулу (41) к функции $e^{-a_1^2 x^2}$, где a_1^2 – некоторое комплексное число с положительной вещественной частью. Получим:

$$\begin{aligned} \pi \left\{ \frac{1}{2} + e^{-a_1^2 (2\pi)^2} + e^{-a_1^2 (4\pi)^2} + e^{-a_1^2 (6\pi)^2} + \dots \right\} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-a_1^2 x^2} dx + \int_0^\infty e^{-a_1^2 x^2} \cos x \, dx + \int_0^\infty e^{-a_1^2 x^2} \cos 2x \, dx + \dots \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (50), перепишем последнее равенство в таком виде:

$$\begin{aligned} \pi \left\{ \frac{1}{2} + e^{-(2\pi a_1)^2} + e^{-4(2\pi a_1)^2} + e^{-9(2\pi a_1)^2} + \dots \right\} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-4\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-9\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + \dots \end{aligned}$$

Положим $2\pi a_1 = a$ и $\frac{1}{2a_1} = b$; тогда будет:

$$\pi \left\{ \frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \dots \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \dots \right\}.$$

Но так как $2a\sqrt{\pi} = \sqrt{2a}\sqrt{2a\pi} = \dots$,²¹ то формула эта окончательно принимает такой вид:

$$a^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \dots \right\} = b^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \dots \right\} \quad (51)$$

где b связано с a таким равенством: $ab = \frac{2\pi a_1}{2a_1} = \pi$. Формула (51) справедлива в том случае, когда a^2 имеет положительную вещественную часть, так как формула (50) была установлена только для этого случая. Но $a = \frac{\alpha}{2\pi}$ и $a^2 = \frac{\alpha^2}{4\pi^2}$, откуда ясно, что α^2 имеет тот же аргумент что и a^2 ; следовательно, можем сказать теперь, что формула (51) справедлива в том случае, когда вещественная часть α^2 положительна.

Положим в формуле (51) $a^2 = \alpha^2 - \frac{2\pi i}{n}$, причем α^2 означает положительное число, весьма малое. Из условия $a^2 b^2 = \pi^2$ следует, что b^2 должно отличаться от $\frac{\pi^2}{2\pi i/n}$, т[о] есть от $\frac{n\pi i}{2}$ на весьма малую величину. Положим $b^2 = \beta^2 + \frac{n\pi}{2}i$. Тогда условие $a^2 b^2 = \pi^2$ даст нам:

$$\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \cdot \frac{2\pi i}{n} + \alpha^2 \cdot \frac{n\pi i}{2} + \pi^2 = a^2 b^2$$

или:

$$\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \cdot \frac{2\pi i}{n} + \alpha^2 \cdot \frac{n\pi i}{2} = 0,$$

²¹Конец формулы вписан карандашом рукою Я.В. Успенского и потому плохо читается. Вероятно, это $\frac{a^{1/2}}{b^{1/2}} 2\pi$. – Прим. публ.

откуда после простых преобразований находим

$$\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = \left(1 + \frac{n}{2\pi i}\alpha^2 i\right)^{-1},$$

откуда следует, что $\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = -\frac{2\pi i/n}{a^2}$,²² след[овательно], и $\frac{2\beta}{n\alpha}$ ²³ стремится к пределу 1, когда α стремится к пределу 0. Можем написать потому:

$$\frac{2\beta}{n\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \text{или} \quad 2\beta = n\alpha(1 + \varepsilon), \quad \text{где} \quad \lim_{\alpha=0} \varepsilon = 0.$$

Обозначим $\frac{2\pi}{n}$ чрез ω ; тогда формулу (51) можно так переписать:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha^2 + \omega i} + e^{-4\alpha^2 + 4\omega i} + \dots e^{-(n-1)^2\alpha^2 + (n-1)^2\omega i} + \right. \\ \left. + e^{-n^2\alpha^2} + e^{-(n+1)^2\alpha^2 + \omega i} + e^{-(n+2)^2\alpha^2 + 4\omega i} + \dots + e^{-(2n-1)^2\alpha^2 + (n-1)^2\omega i} + \dots \right\} = \\ = b^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\beta^2 - \frac{n\pi}{2}i} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2 - \frac{n\pi}{2}i} + \dots \right\} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-n^2\alpha^2} + e^{-4n^2\alpha^2} + e^{-9n^2\alpha^2} + \dots \right. \\ + e^{\omega i} (e^{-\alpha^2} + e^{-(n+1)^2\alpha^2} + e^{-(2n+1)^2\alpha^2} + e^{-(3n+1)^2\alpha^2} + \dots) + \\ + e^{4\omega i} (e^{-4\alpha^2} + e^{-(n+2)^2\alpha^2} + e^{-(2n+2)^2\alpha^2} + e^{-(3n+2)^2\alpha^2} + \dots) + \\ + e^{9\omega i} (e^{-9\alpha^2} + e^{-(n+3)^2\alpha^2} + e^{-(2n+3)^2\alpha^2} + e^{-(3n+3)^2\alpha^2} + \dots) + \\ \dots \\ \dots \\ \left. + e^{(n-1)^2\omega i} \{ e^{-(n-1)^2\alpha^2} + e^{-(2n-1)^2\alpha^2} + e^{-(3n-1)^2\alpha^2} + e^{-(4n-1)^2\alpha^2} + \dots \} \right\} = \\ = b^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-4\beta^2} + e^{-16\beta^2} + e^{-36\beta^2} + \dots + e^{-\frac{n\pi i}{2}} (e^{-\beta^2} + e^{-9\beta^2} + e^{-25\beta^2} + \dots) \right\}. \end{aligned}$$

Умножим первую часть последнего равенства на $n\alpha$, а вторую – на равную ей величину $2\beta/(1+\varepsilon)$;²⁴ и заменяя $\frac{1}{2}$ на $1 - \frac{1}{2}$, находим:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{n\alpha}{2} + n\alpha (e^{-n^2\alpha^2} + e^{-4n^2\alpha^2} + e^{-9n^2\alpha^2} + \dots) \right. \\ + e^{\omega i} n\alpha (e^{-\alpha^2} + e^{-(n+1)^2\alpha^2} + e^{-(2n+1)^2\alpha^2} + e^{-(3n+1)^2\alpha^2} + \dots) + \\ + e^{4\omega i} n\alpha (e^{-4\alpha^2} + e^{-(n+2)^2\alpha^2} + e^{-(2n+2)^2\alpha^2} + e^{-(3n+2)^2\alpha^2} + \dots) + \\ \dots \end{aligned}$$

²²Исправлено. В рукописи в правой части равенства фигурирует число a . – Прим. публ.

²³Исправлено. В рукописи пропущено n в знаменателе. – Прим. публ.

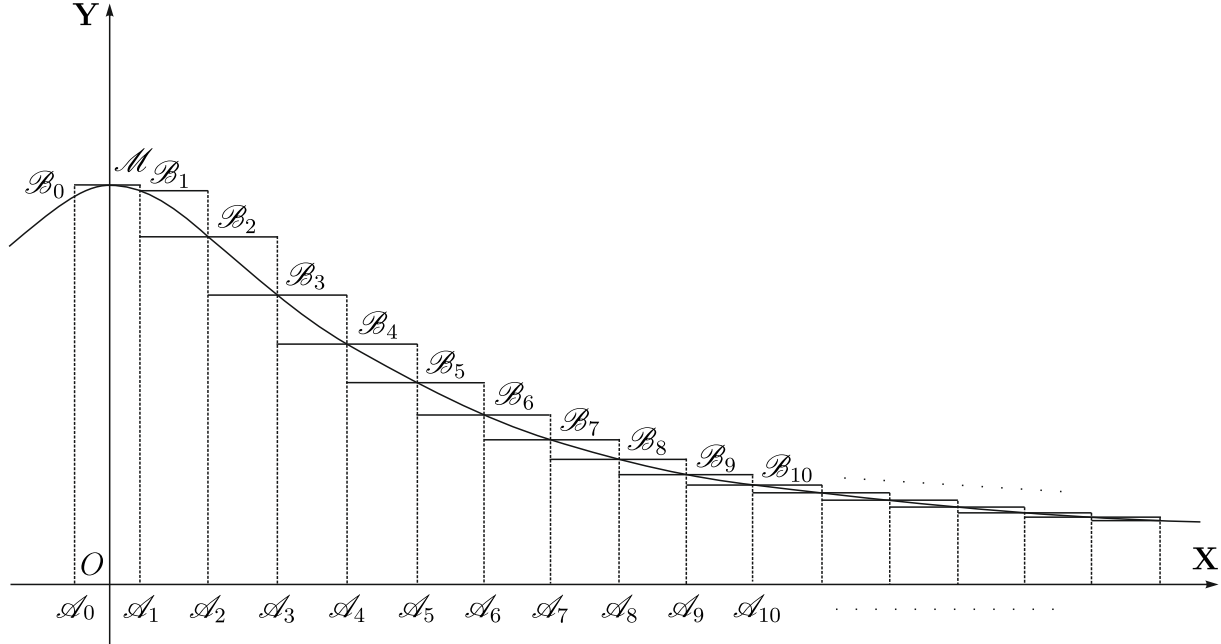
²⁴Исправлено. В рукописи: $2\beta(1+\varepsilon)$. Соответствующая поправка внесена в (52) и ряд последующих формул. – Прим. публ.

$$\begin{aligned}
& + e^{(n-1)^2 \omega i} n \alpha (e^{-(n-1)^2 \alpha^2} + e^{-(2n-1)^2 \alpha^2} + e^{-(3n-1)^2 \alpha^2} + e^{-(4n-1)^2 \alpha^2} + \dots) \Big\} = \\
& = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1 + \varepsilon} \left\{ -\frac{2\beta}{2} + 2\beta(1 + e^{-4\beta^2} + e^{-16\beta^2} + e^{-36\beta^2} + \dots) + \right. \\
& \quad \left. + e^{-\frac{n\pi i}{2}} (e^{-\beta^2} + e^{-9\beta^2} + e^{-25\beta^2} + \dots) \right\}. \quad (52)
\end{aligned}$$

Суммы, стоящие в скобках вида (52), заменим на основании следующих соображений. Рассмотрим сумму

$$\Delta x (e^{-(\tau \Delta x)^2} + e^{-(\Delta x + \tau \Delta x)^2} + e^{-(2\Delta x + \tau \Delta x)^2} + \dots) = S,$$

где $0 \leq \tau < 1$. Возьмем прямоугольную систему координат (черт. 3) и построим кривую, выражаемую уравнением $y = e^{-x^2}$. Так как $y' = -2xe^{-x^2}$ отрицательна для всех значений



Чертеж III.

x внутри промежутка $(0, \infty)$, то y — функция, убывающая в этом промежутке. Кроме того, легко убедиться: y имеет максимум при $x = 0$.

Проведем теперь ординаты, соответствующие абсциссам: $OA_0 = \Delta x + \tau \Delta x$, $OA_1 = \tau \Delta x$, $OA_2 = \Delta x + \tau \Delta x, \dots$, которые пересекут кривую в точках $B_0, B_1, B_2, \dots$. Построим прямоугольники на $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ с высотами соответственно: $OM = 1, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$. Сумма площадей этих прямоугольников, очевидно, равна $S + \Delta x$. Легко видеть, что она больше площади фигуры, ограниченной кривой линией $MB_1B_2B_3B_4 \dots$, ординатой OM и осью x -ов. Площадь же эта, как известно, равна:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Итак, $S + \Delta x > \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. Строя же прямоугольники на $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ с высотами соответственно: $A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$, легко убеждаемся, что $S - \Delta x < \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ и, следовательно,

имеем неравенства

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \Delta x < S < \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \Delta x,$$

откуда тотчас находим:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \lambda\Delta x,$$

где λ – положительная или отрицательная правильная дробь. Применяя это равенство к формуле (52), находим:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{n\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \lambda_1 \cdot n\alpha + e^{\omega i} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{\omega i} \lambda_2 \cdot n\alpha + e^{4\omega i} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{4\omega i} \lambda_3 \cdot n\alpha + \right. \\ \left. + \dots + e^{(n-1)^2\omega i} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{(n-1)^2\omega i} \lambda_n \cdot n\alpha \right\} = \\ = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon} \left\{ -\frac{2\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \mu_1 \cdot 2\beta + e^{-\frac{n\pi i}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{-\frac{n\pi i}{2}} \mu_2 \cdot 2\beta \right\}, \end{aligned}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2$ – положительные или отрицательные правильные дроби.

Напишем полученные равенства в следующем виде:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \{1 + e^{\omega i} + e^{4\omega i} + e^{9\omega i} + \dots + e^{(n-1)^2\omega i}\} + \\ + a^{\frac{1}{2}} \cdot n\alpha \left(-\frac{1}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{\omega i} + \lambda_3 e^{4\omega i} + \dots + \lambda_n e^{(n-1)^2\omega i} \right) = \\ = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{\pi} (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}) + 2\beta \left(-\frac{1}{2} + \mu_1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}} \mu_2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Полученная формула справедлива при всяких значениях α , не равных 0. Следовательно, она будет справедлива и в пределе при $\alpha = 0$. Переходя к пределу при $\alpha = 0$, заметим, что

$$\left| -\frac{1}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{\omega i} + \dots + \lambda_n e^{(n-1)^2\omega i} \right| < \frac{1}{2} + |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| < n+1;$$

далее

$$\left| -\frac{1}{2} + \mu_1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}} \mu_2 \right| < \frac{1}{2} + |\mu_1| + |\mu_2| < 3.$$

Наконец, a обращается в пределе в $a_1 = \sqrt{-\frac{2\pi i}{n}}$, b обращается в $\sqrt{\frac{n\pi i}{2}} = b_1$ и, след[овательно], формула наша принимает такой вид:

$$a_1^{\frac{1}{2}} \varphi(1, n) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = b_1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}),$$

или

$$\varphi(1, n) = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}});$$

но $a_1 b_1 = \pi$, откуда $\frac{b_1}{a_1} = \frac{\pi}{a_1^2}$ и, след[овательно],

$$\varphi(1, n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a_1} (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}).$$

Но

$$a_1^2 = -\frac{2\pi i}{n} \quad \text{и:} \quad a_1 = \sqrt{-\frac{2\pi i}{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} (1-i),$$

откуда

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\pi}{n}} (1-i)} = \frac{\sqrt{n}(1+i)}{2}$$

и, следовательно, окончательно:

$$\varphi(1, n) = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} (1+i) \left(1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\right).$$

Полагая в этой формуле $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$, снова придем к формулам (25).

§16

Обратимся ко второй части нашего исследования, т[о] есть на основании свойств суммы $\varphi(1, n)$, доказанных нами, выведем закон взаимности квадратичных вычетов.

Положим $n =$ простому нечетному числу p . Имеем:

$$\varphi(h, p) = \sum_{s=0}^{p-1} \varrho^{hs^2} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \varrho^{hs^2}, \quad (53)$$

в чем легко убедиться, принимая во внимание, что: $s^2 \equiv (p-s)^2 \pmod{p}$.

Обозначим чрез α любой квадратичный вычет модуля p и чрез β — любой квадратичный невычет его, взятые среди чисел $1, 2, \dots, p-1$. Формула (53) принимает тогда следующий вид

$$\varphi(h, p) = 1 + 2 \sum \varrho^{\alpha h} \quad (53').$$

Но

$$\sum (\varrho^h)^\alpha + (\varrho^h)^\beta + 1$$

как сумма всех корней уравнения $x^n = 1$ равна 0 и следовательно

$$\sum \varrho^{h\alpha} = -1 - \sum \varrho^{h\beta}.$$

Принимая во внимание это равенство, формулу (46') так перепишем:

$$\varphi(h, p) = \sum \varrho^{\alpha h} - \sum \varrho^{\beta h},$$

или, употребляя обозначение $\left(\frac{s}{p}\right)$:

$$\varphi(h, p) = \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) \varrho^{sh}.$$

Но

$$\left(\frac{hs}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{s}{p}\right) \quad \text{и следовательно} \quad \left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{hs}{p}\right),$$

и формула наша принимает такой вид:

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{hs}{p}\right) \varrho^{sh}.$$

Замечая, что hs пробегает полную систему вычетов по модулю p , если s пробегает ее, имеем, полагая $hs = t$:

$$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \sum_{t=1}^{p-1} \left(\frac{t}{p}\right) \varrho^t,$$

$\tau[o]$ есть

$$\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \varphi(1, n). \quad (54)$$

Формулу эту, выведенную нами в предположении, что $n = p$ – простому числу, можно распространить на случай какого угодно нечетного n . Положим сначала, что n – некоторая степень простого числа p : $n = p^{2k}q$,²⁵ где $q = p$ или 1. Имеем:

$$\varphi(h, p) = \sum_{s=0}^{p^{2k}-1} \varrho^{hs^2}.$$

Выделим отсюда члены, индексы s которых делятся на p^k . Найдем тогда:²⁶

$$\varphi(h, p) - (1 + \varrho^{hp^{2k}} + \varrho^{4hp^{2k}} + \dots + \varrho^{(p^kq-1)^2hp^{2k}}) = \sum \varrho^{hs_1^2},$$

где индекс s_1 принимает все значения, не делящиеся на p^k . Эти значения для s_1 можно соединить в группы, смотря по тому, какой остаток дает s_1 при делении на p^kq . Группа, соответствующая остатку λ ($\lambda < p^kq$), будет:

$$\lambda + p^kq, \lambda + 2p^kq, \dots, \lambda + (p^k - 1)p^kq.$$

Соответственно этому будет (γ под знаком $\sum$ – член $\varrho^{hp^{2k}s^2}$):²⁷

$$\varphi(h, p) - \sum_{s=0}^{p^kq-1} \gamma = \sum_{s=0}^{p^k-1} \sum_{s=0}^{p^k-1} \varrho^{h(\lambda+sp^kq)^2} = \sum \varrho^{h\lambda^2} \sum_{s=0}^{p^k-1} \varrho^{2h\lambda sp^kq} = \sum \varrho^{h\lambda^2} \frac{1 - \varrho^{2h\lambda n}}{1 - \varrho^{2h\lambda p^k}} = 0.$$

Итак,²⁸

$$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{p^kq-1} \varrho^{hp^{2k}s^2}.$$

Если $q = 1$, то

$$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{\sqrt{n}-1} \varrho^{hns^2} = \sqrt{n}.$$

В этом случае n , как легко видеть, будет формы $4m+1$ и следовательно, согласно формулам (25): $\varphi(1, n) = \sqrt{n}$; кроме того, употребляя символ Якоби, имеем: $\left(\frac{h}{n}\right) = 1$, и, следовательно, можем написать: $\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \varphi(1, n)$, $\tau[o]$ есть формула (54) распространяется и на этот случай.

²⁵Исправлено. В рукописи: $n = p^{2k+1}q$. – Прим. публ.

²⁶В показателях степеней в левой части формулы добавлен множитель h , пропущенный в рукописи. – Прим. публ.

²⁷В двух последних суммах добавлен множитель $\varrho^{h\lambda^2}$, пропущенный в рукописи. Суммирование во внешних суммах проводится по числам $0 \leq \lambda < p^kq$, $\lambda \not\equiv 0 \pmod{p^k}$. – Прим. публ.

²⁸Исправлено. В рукописи слагаемое содержит лишний множитель в показателе: $\varrho^{hp^{2k}q \cdot s^2}$. – Прим. публ.

Положим $q = p$, тогда:

$$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{p^{k+1}-1} \varrho^{\frac{n}{p}hs^2}$$

Числа s разбиваем на следующие p^k групп:

$$0, 1, 2, 3, \dots, p-1; \quad p, p+1, p+2, \dots, 2p-1; \quad \dots, \quad p^{k+1}-p, p^{k+1}-p+1, \dots, p^{k+1}-1;$$

соответственно этому будет:

$$\varphi(h, n) = \sum_{\lambda=0}^{p^k-1} \sum_{s=0}^{p-1} \varrho^{\frac{n}{p}h(\lambda p^k+s)^2} = \sum_{\lambda=0}^{p^k-1} \sum_{s=0}^{p-1} \varrho^{\frac{n}{p}hs^2} = p^k \sum_{s=0}^{p-1} \varrho^{\frac{n}{p}hs^2}.$$

Но $\varrho^{\frac{n}{p}} = R$ – первообразный корень уравнения $x^p = 1$, и именно: $R = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Формула наша принимает вид:

$$\varphi(h, n) = p^k \sum_{s=0}^{p-1} R^{hs^2} = p^k \varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \sqrt{n},$$

или, употребляя символ Якоби и принимая во внимание, что

$$\left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{h}{p^{2k+1}}\right) = \left(\frac{h}{n}\right),$$

находим: $\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{p}\right) \sqrt{n}$. Итак, формула (54) справедлива, если n – простое нечетное число или любая степень такого числа.

Пусть, наконец, $n = a_1 a_2 \dots a_k$ = произведению нечетных взаимно простых множителей; положим

$$b_1 = a_2 a_3 \dots a_k,$$

$$b_2 = a_3 a_4 \dots a_k,$$

$$b_{k-1} = a_k,$$

так что $n = a_1 b_1$, $b_1 = a_2 b_2$, ..., $b_{k-1} = a_k$. На основании формулы (47) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(h, n) &= \varphi\left(h \frac{n}{b_1}, b_1\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_1}, a_1\right) \\ \varphi\left(h \frac{n}{b_1}, b_1\right) &= \varphi\left(h \frac{n}{b_1} \cdot \frac{b_1}{b_2}, b_2\right) \varphi\left(h \frac{n}{b_1} \cdot \frac{b_1}{a_2}, a_2\right) = \varphi\left(h \frac{n}{b_2}, b_2\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_2}, a_2\right) \\ \varphi\left(h \frac{n}{b_2}, b_2\right) &= \varphi\left(h \frac{n}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_3}, b_3\right) \varphi\left(h \frac{n}{b_2} \cdot \frac{b_2}{a_3}, a_3\right) \\ &\dots \\ \varphi\left(h \frac{n}{b_{k-2}}, b_{k-2}\right) &= \varphi\left(h \frac{n}{b_{k-2}} \cdot \frac{b_{k-2}}{b_{k-1}}, b_{k-1}\right) \varphi\left(h \frac{n}{b_{k-2}} \cdot \frac{b_{k-2}}{a_{k-1}}, a_{k-1}\right) \\ \varphi\left(h \frac{n}{b_{k-1}}, b_{k-1}\right) &= \varphi\left(h \frac{n}{a_k}, a_k\right). \end{aligned}$$

Перемножая почленно полученные равенства, находим окончательно:

$$\varphi(h, n) = \varphi\left(h \frac{n}{a_1}, a_1\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_2}, a_2\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_3}, a_3\right) \dots \varphi\left(h \frac{n}{a_k}, a_k\right). \quad (55)$$

Полагая же $h = 1$, находим:

$$\varphi(1, n) = \varphi\left(\frac{n}{a_1}, a_1\right) \varphi\left(\frac{n}{a_2}, a_2\right) \dots \varphi\left(\frac{n}{a_k}, a_k\right). \quad (56)$$

В равенстве (55) каждый множитель правой части можно так преобразовать:

$$\varphi\left(h \frac{n}{a_s}, a_s\right) = \left(\frac{h \cdot \frac{n}{a_s}}{a_s}\right) \varphi(1, a_s),$$

если только каждое a_s представляет простое число или степень его, или иначе:

$$\varphi\left(h \frac{n}{a_s}, a_s\right) = \left(\frac{h}{a_s}\right) \left(\frac{\frac{n}{a_s}}{a_s}\right) \varphi(1, a_s) = \left(\frac{h}{a_s}\right) \varphi\left(\frac{n}{a_s}, a_s\right)$$

и следовательно:

$$\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{a_1}\right) \left(\frac{h}{a_2}\right) \dots \left(\frac{h}{a_k}\right) \varphi\left(\frac{n}{a_1}, a_1\right) \dots \varphi\left(\frac{n}{a_k}, a_k\right),$$

т[о] есть

$$\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \varphi(1, n),$$

если пользоваться символом Якоби. Следовательно, формула (54) справедлива для всякого целого нечетного числа n . В соединении с формулами (25) эта формула дает средство найти $\varphi(h, n)$ для всякого целого нечетного n .

Положим теперь, что $n = p_1 p_2 p_3 \dots p_l q_1 q_2 q_3 \dots q_m$ = произведению взаимно простых чисел, и числа p суть формы $4\mu + 1$, а числа q суть формы $4\mu + 3$. Имеем по формуле (56):

$$\begin{aligned} \varphi(1, n) &= \left(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\right) \varphi(1, p_1) \left(\frac{\frac{n}{p_2}}{p_2}\right) \varphi(1, p_2) \dots \left(\frac{\frac{n}{p_l}}{p_l}\right) \varphi(1, p_l) \cdot \left(\frac{\frac{n}{q_1}}{q_1}\right) \varphi(1, q_1) \dots \left(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\right) \varphi(1, q_m) = \\ &= \left(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\right) \left(\frac{\frac{n}{p_2}}{p_2}\right) \dots \left(\frac{\frac{n}{p_l}}{p_l}\right) \left(\frac{\frac{n}{q_1}}{q_1}\right) \dots \left(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\right) i^m \sqrt{n}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\varphi(1, n) = i^{m^2} \sqrt{n}$, т[ак] как n будет формы $4\mu + 1$ или $4\mu + 3$ смотря по тому, будет ли m четное или нечетное. Следовательно,

$$\left(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\right) \left(\frac{\frac{n}{p_2}}{p_2}\right) \dots \left(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\right) = i^{m^2-m}. \quad (57)$$

Но $i^{m(m-1)} = +1$, если $m \equiv 0$ или $\equiv 1 \pmod{4}$, и $= -1$, если $m \equiv 2$ или $\equiv 3 \pmod{4}$ и, следовательно, $i^{m^2-m} = (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]}$, где r – остаток от деления m на 4. След[овательно],

$$\left(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\right) \dots \left(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\right) = (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]}. \quad (50')$$

Из этой теоремы как частный случай следует закон взаимности квадратичных вычетов. Именно, пусть $n = a_1 a_2$ = произведению нечетных взаимно простых чисел. Тогда формула (50') дает:

$$\left(\frac{\frac{n}{a_1}}{a_1}\right) \left(\frac{\frac{n}{a_2}}{a_2}\right) = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \left(\frac{a_1}{a_2}\right) = (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}.$$

« -1 » в этом случае может получиться только тогда если $m = 2$, т[о] есть оба числа a_1 и a_2 формы $4\mu + 3$. Следовательно, можем написать:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \left(\frac{a_1}{a_2}\right) = (-1)^{\frac{a_1-1}{2} \cdot \frac{a_2-1}{2}},$$

а это равенство при a_1 и a_2 простых и выражает закон взаимности квадратичных вычетов.

С помощью того же метода легко определить значения символов $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и $\left(\frac{2}{p}\right)$. Имеем:

$$\varphi(-1, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Но из формулы

$$\varphi(-1, p) = \sum e^{s^2 \cdot \frac{2\pi(-i)}{p}}$$

следует, что $\varphi(-1, p)$ найдем из выражения $\varphi(1, p)$, если заменим в нем i чрез $(-i)$, т[о] есть:

$$\varphi(-1, p) = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

и след[овательно]

$$\left(\frac{-1}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

откуда

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Положим теперь в формуле (47) $h = 1$, $m = 8$, $n = p$; найдем:

$$\varphi(8, p)\varphi(p, 8) = \varphi(1, 8p).$$

Но $\varphi(1, 8p) = (1 + i)\sqrt{8p}$,

$$\begin{aligned} \varphi(p, 8) &= \sum_{s=0}^7 e^{s^2 \cdot p^2 \frac{\pi i}{8}} = \sum_{s=0}^7 e^{ps^2 \cdot \frac{\pi i}{8}} = \\ &= 1 + e^{\frac{1}{4} p \pi i} + e^{p \pi i} + e^{\frac{2}{4} p \pi i} + e^{4 p \pi i} + e^{\frac{6}{4} p \pi i} + e^{9 p \pi i} + e^{\frac{12}{4} p \pi i} = 4e^{\frac{1}{4} p \pi i}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\varphi(p, 8) = \varphi(2, p) = \left(\frac{2}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

и след[овательно]

$$\left(\frac{2}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} \cdot 4e^{\frac{1}{4} p \pi i} = (1 + i)\sqrt{8p},$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{p}\right) &= \frac{(1 + i) \cdot 2\sqrt{2}}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} 4e^{\frac{1}{4} p \pi i}} = \frac{1 + i}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \cdot 4e^{\frac{1}{4} p \pi i}} = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{4} \pi i}}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{2} e^{\frac{1}{4} p \pi i}} = \frac{1}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} e^{\frac{p-1}{4} \pi i}} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}. \end{aligned}$$

3. Заключение

Ошибка является исключительно редким фактом в трудах И.М. Виноградова; тем не менее, данный фрагмент рукописи содержит ошибочную формулу для интеграла J_k и неверное утверждение о том, что функция $\sin(m\theta)/\sin\theta$ неотрицательна на промежутке $(0, \pi/2)$. Соответственно, основанное на них доказательство формулы для случая $\gamma = \infty$ становится некорректным. Последний недостаток может быть устранен, например, с помощью следующего рассуждения.

Рассмотрим интеграл

$$J_k = \int_{\pi k}^{\pi k_1 + r} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta,$$

где $0 \leq r < \pi$, а $k_1 > k$ – произвольное целое число. После очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned} J_k &= \left(\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} + \int_{\pi(k+1)}^{\pi(k+2)} + \dots + \int_{\pi k_1}^{\pi k_1 + r} \right) \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\pi k + \theta) d\theta + \int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\pi(k+1) + \theta) d\theta + \dots + \int_0^r \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\pi k_1 + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $f(\theta)$ непрерывна, из условия монотонности $|f(\theta)|$ следует и монотонность $f(\theta)$. Тогда, пользуясь второй теоремой о среднем (см., например, [18, п. 306]), для любого ν , $k \leq \nu \leq k_1$ и $a = r$, $a = \pi$ находим:

$$\int_0^a \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\pi\nu + \theta) d\theta = f(\pi\nu) \int_0^\xi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta + f(\pi\nu + a) \int_\xi^a \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta,$$

где $0 \leq \xi \leq a$. Интегралы по отрезкам $[0, \xi]$ и $[\xi, a]$ ограничены абсолютной постоянной. Действительно, пусть сперва $a = \pi$. Тогда в случае $0 \leq \xi \leq \pi/2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta &= \int_0^{m\xi} \frac{\sin x}{m \sin(x/m)} dx = \int_0^{m\xi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{m\xi} \varphi(x) \sin x dx, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{m \sin(x/m)} - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \left(\frac{x}{m} - \sin \frac{x}{m} \right) \frac{1}{x \sin(x/m)} = \frac{1}{x \sin(x/m)} \int_0^{x/m} (1 - \cos u) du = \\ &= \frac{2}{x \sin(x/m)} \int_0^{x/m} \sin^2 \frac{u}{2} du \leq \frac{2}{x \sin(x/m)} \int_0^{x/m} \left(\frac{u}{2} \right)^2 du = \frac{x/m}{\sin(x/m)} \frac{x}{6m^2} \leq \frac{\pi x}{12m^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left| \int_0^{m\xi} \varphi(x) \sin x dx \right| \leq \int_0^{m\xi} \frac{\pi x}{12m^2} dx = \frac{\pi \xi^2}{24} \leq \frac{\pi^3}{96}.$$

Пользуясь тем, что

$$0 \leq \int_0^{m\xi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx,$$

заключаем:

$$\left| \int_0^\xi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta \right| \leq \frac{\pi^3}{96} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = C = 2.17492\dots$$

Если $\pi/2 < \xi \leq \pi$, то $0 \leq \pi - \xi \leq \pi/2$, так что в силу доказанного имеем

$$\left| \int_0^\xi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta \right| = \left| - \int_0^{\pi-\xi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta \right| \leq C.$$

Наконец, при $0 < a = r < \pi$ полученные оценки дают:

$$\left| \int_\xi^a \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta \right| = \left| \left(\int_\xi^\pi - \int_a^\pi \right) \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta \right| \leq 2C.$$

Таким образом, для любых рассматриваемых ν и a имеем:

$$\left| \int_0^a \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \right| \leq 2C(|f(\pi\nu)| + |f(\pi\nu + a)|).$$

Следовательно,

$$J_k < 4C \sum_{\nu=k}^{k_1} |f(\pi\nu)| + 2C|f(\pi k_1 + r)| < \varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании k .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский Я.В., Соображения о возможно целесообразном преподавании математики в проектируемом институте инженеров земельных улучшений. Предисловие, публикация и комментарии А.А. Сергеева // Историко-математические исследования. 1999. № 4(39). С. 114–123.
2. Ермолаева Н., Успенский, Яков Викторович. В сб.: Русское зарубежье: Золотая книга эмиграции. Первая треть XX века. Энциклопедический биографический словарь. М., РОС-СПЭН, 1997.
3. Карацуба А.А., И.М. Виноградов и его метод тригонометрических сумм // Теория чисел и анализ, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова. Тр. МИАН, Т. 207, М., Наука, 1994. С. 3–20.
4. Карацуба А.А., Иван Матвеевич Виноградов (к девяностолетию со дня рождения) // УМН. 1981. Т. 36. № 6(222). С. 3–16.
5. Делоне Б.Н., Петербургская школа теории чисел. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1947.
6. Карацуба А.А., Краткий очерк научной, научно-организационной и педагогической деятельности. В кн.: Иван Матвеевич Виноградов. Материалы к библиографии ученых СССР. Серия математики, вып. 14. М., Наука, 1978. С. 7–16.
7. Виноградов И.М., Sur la distribution des residus et des non-residus des puissances // Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1918. Т. 1. С. 94–98.
8. Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.
9. Berndt B.C., Evans, R.J., The determination of Gauss sums // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 5. № 2. P. 107–129.

10. Berndt B.C., Evans, R.J., Williams K.S., Gauss and Jacobi Sums. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
11. Gauss K.F., Summatio quarumdam serierum singularium // Commentat. Soc. Regiae Sci. Gott. Recent. 1811. Vol. 1.
12. Гаусс К.Ф., Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959.
13. Dirichlet L., Üeber eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen // Abh. K. Preuss. Akad. Wiss. 1835. S. 391–407.
14. Cauchy A., Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1840. Vol. 10. P. 560–572.
15. Gauss K.F., Werke. Bd. 2. Göttingen, 1863. S. 11–45.
16. Dirichlet G.L., Werke. Bd. 1. Berlin, 1889. S. 239–256.
17. Cauchy A., Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. I^{re} Série. T. V. Paris, 1885. P. 152–166.
18. Финтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. 6-е изд. М., Наука, 1966.

REFERENCES

1. Uspensky J.V., 1999, The ideas concerning the possibly expedient teaching mathematics at the future Institute of Land Improvement Engineers. The publication of A.A. Sergeev (with preface and comments), *Historical and mathematical researches*, no. № 4(39), pp. 114–123 (in Russian).
2. Ermolaeva N., 1997, “Uspensky, Yakov Victorovich”, in: Russian abroad: Golden book of emigration. The first third of the XX century. Encyclopedic Biographical Dictionary. Moscow, ROSSPEN (in Russian).
3. Karatsuba A.A., 1995, “I.M. Vinogradov and his method of trigonometric sums”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 1–33.
4. Karatsuba A.A., 1981, “Ivan Matveevich Vinogradov (on his ninetieth birthday)”, *Russian Math. Surveys*, vol. 36, no. 6, pp. 1–17.
5. Delone B.N., 1947, “Peterboug’s school of number theory”, Moscow-Leningrad, Publ. Akad. Nauk SSSR (in Russian).
6. Karatsuba A.A., 1978, “A brief sketch of scientific, organizing and pedagogical activity”, in: Ivan Matveevich Vinogradov. Materials for the bibliography of scientists of the USSR. Ser. Math., no. 14. N., Nauka, pp. 7–16 (in Russian).
7. Vinogradov I.M., 1918, “Sur la distribution des residus et des non-residus des puissances”, *J. Phys.-Math. Soc. Perm. Univ.*, vol. 1, pp. 94–98.
8. Chandrasekharan K., 1968, “Introduction to Analytic Number Theory”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
9. Berndt B.C., Evans, R.J., 1981, “The determination of Gauss sums”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 5, no. 2, pp. 107–129.

10. Berndt B.C., Evans, R.J., Williams K.S., 1998, “Gauss and Jacobi Sums”, John Wiley & Sons, Inc.
11. Gauss K.F., 1811, “Summatio quarumdam serierum singularium”, *Commentat. Soc. Regiae Sci. Gott. Recent.*, vol. 1.
12. Gauss K.F., 1959, “Works in Number Theory”, Moscow, Publ. Akad. Nauk SSSR (in Russian).
13. Dirichlet L., 1835, “Üeber eine neue Anwendung bestimmter Integrate auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen”, *Abh. K. Preuss. Akad. Wiss.*, s. 391–407.
14. Cauchy A., 1840, “Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 10, pp. 560–572.
15. Gauss K.F., 1863, Werke. Bd. 2. Göttingen, s. 11–45.
16. Dirichlet G.L., 1889, Werke. Bd. 1. Berlin, s. 239–256.
17. Cauchy A., 1885, Œuvres complètes d’Augustin Cauchy. I^{re} Série. T. V. Paris, p. 152–166.
18. Fikhtengoltz G.M., 1966, Differential and integral calculus course, vol. II. 6th ed., Moscow, Nauka.

Получено 19.09.2021 г.

Принято в печать 6.12.2021 г.

К 36471

И. Виноградов

СУММЫ ГАУССА

и
приложение ихъ къ доказательству
закона взаимности квадратичныхъ
вычетовъ

БИБЛИОТЕКА
ОБЩЕСТВА ВЪЗРАЖЕНІЯ
НАУКИ И ПРОГРЕССА
АКАДЕМІИ НАУКЪ ССОР

1914

Введение

Прежде всего приступим к наивысшему изъяснению Каноническим образом предложенной из теории двучленного уравнения $x^n = 1$

Пусть n — любое целое положительное число и пусть $k_1 = 1, k_2, k_3, \dots, k_{\varphi(n)}$ числа меньшие n и с которыми взаимно просты. Обозначим $\epsilon^{\frac{2\pi i}{n}}$ через ρ .

Тогда числа $1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}$ представляют собой все решения уравнения $x^n = 1$ и числа $\rho, \rho^{k_1}, \rho^{k_2}, \dots, \rho^{k_{\varphi(n)}}$ все различные первообразные корни этого уравнения. Пусть k — любое из чисел $k_1, k_2, \dots, k_{\varphi(n)}$ и положим $\rho^k = \kappa$. Тогда все решения уравнения $x^n = 1$ и все различные его первообразные корни соответственно так представляются: $1, \kappa, \kappa^2, \dots, \kappa^{n-1}$ и $\kappa, \kappa^{k_2}, \kappa^{k_3}, \dots, \kappa^{k_{\varphi(n)}}$

Суммы $\varphi(k, n) = 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa^{(n-1)k}$ полное определение которой дано впервые Гауссом введением сумм Гаусса.

Изъяснения нами будут разложены в следующем порядке. Сначала мы покажем как определить величины $\varphi(k, n)$ для случая $k=1$; затем мы покажем как определяется $\varphi(k, n)$ при любом $k = k_1, k_2, \dots, k_{\varphi(n)}$.

При этом, если ввести изъяснение 2-м путем, то для сумм $\varphi(k, n)$ можно получить 2 выражения отвлеченно формально одно от другого. Из сравнений этих выражений и получается закон взаимности квадратичных вычетов.

до разложения функции $f(x)$ в ряд Лорана.

Первый рассмотренный метод, который использовался ранее для определения суммы $\varphi(k, n)$.

Пусть m — целое число удовлетворяющее условию $m \geq 0$. Положим тогда:

$$(m, n) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-m+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)} \quad (1)$$

привели случаи, когда x — корень какого-нибудь из уравнений: $x^k = 1$ для

$k = 1, 2, 3, \dots$ мы не рассматривали за исключением только одного случая, когда

x — первообразный корень уравнения $x^{m+1} = 1$.

Этот ^{именно} случай нам понадобится впоследствии. При таких условиях

функция (m, n) для $n = 1, 2, 3, \dots, m$ вполне определяется формулой (1). Для зна-

чений же n превышающих m

функция $(m, n) = 0$ если не имеет места вышеупомянутый исклю-

чительный случай и обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в этом

случае. Однако для сокращения дальнейших рассуждений будем полагать

$(m, n) = 0$ при $m \geq 0$ и в случае когда x — первообразный корень урав-

нения $x^{m+1} = 1$. По той же причине будем полагать всегда:

$(m, 0) = 1$ и $(m, n) = 0$ если $n < 0$. Тогда

для любого значения $n = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ легко доказываются следующие 2 ра-

венства: $(m, n) = (m-1, n) + x^{m-n} (m-1, n-1) \quad (2)$

и $(m, n) = (m, m-n) \dots \dots \dots (3)$

и $(m, n) = x^m (m-1, n) + (m-1, n-1) \quad (4)$

$(1-x^m)^{(m-1, n)} = (1-x^{m-1})^{(m-2, n-1)}$

Рассмотрим ряд:

(4) $f(x, m) = \sum (-1)^m(m, n)$, где суммирование распространяется на все целые значения n . Примем для этой формулы (2) нахождение: $f(x, m) = \sum (-1)^m(m-1, n) + \sum (-1)^{m+1}x^{m-1}(m-1, n)$. Заметим, что во всех суммах вида $\sum \psi(n)/(m, n)$ где суммирование распространяется на n на все целые значения, очевидно можно всегда вместо n подставить $\pm n + k$, где k — любое целое число и считать, что суммирование опять распространяется на все целые значения n .

На этом основании находим:

$$\begin{aligned} f(x, m) &= \sum (-1)^m(m-1, n) + \sum (-1)^{m+1}x^{m-1}(m-1, n) = \\ &= \sum (-1)^m(1-x^{m-1})(m-1, n). \text{ Далее легко-} \\ &\text{видеть что: } (1-x^{m-1})(m-1, n) = (1-x^{m-1})(m-2, n) \\ &\text{и следо.: } f(x, m) = \sum (-1)^m(1-x^{m-1})(m-2, n) = \\ &= (1-x^{m-1}) \sum (-1)^m(m-2, n); \text{ то есть:} \end{aligned}$$

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})f(x, m-2)$$

Положим теперь что m — четное число находим последовательно: $f(x, 0) = (-1)^0(0, 0) = 1$

$$\text{далее } f(x, 2) = (1-x)f(x, 0)$$

$$f(x, 4) = (1-x^3)f(x, 2)$$

$$f(x, m) = (1-x^{m-1})f(x, m-2)$$

Перемножив все эти равенства находим:

$$(5) f(x, m) = \sum (-1)^m(m, n) = (1-x)(1-x^3)(1-x^5) \dots (1-x^{m-1})$$

Рассмотрим еще такой ряд:

(6) $F(x, m) = \sum x^{\frac{n^2}{2}}(m, n)$ где суммирование опять распространяется на все целые значения n . Равенство это на основании формулы (3) так можно переписать:

$F(x, m) = \sum x^{\frac{m}{2}} (m, m-m)$. Заменив в этой сумме m на $-m+m$ и переписав ее в обратном порядке имеем

$$F(x, m) = \sum x^{\frac{m-m}{2}} (m, m) \text{ или еще заменив } m \text{ на } m-1: F(x, m) = \sum x^{\frac{m+1-m}{2}} (m, m-1) \text{ откуда}$$

$$x^{\frac{m+1}{2}} F(x, m) = \sum x^{m+1-\frac{m}{2}} (m, m-1) \dots (7)$$

Складывая равенства (6) и (7) найдем $F(x, m)(1+x^{\frac{m+1}{2}}) = \sum x^{\frac{m}{2}} [(m, m) + x^{m+1-m} (m, m-1)]$

Откуда применяя во вкляные формулы (2) найдем окончательно

$$F(x, m)(1+x^{\frac{m+1}{2}}) = \sum x^{\frac{m}{2}} (m+1, m) = F(x, m+1).$$

Но: $F(x, 0) = 1$ дайте

$$F(x, 1) = (1+x^{\frac{1}{2}}) F(x, 0)$$

$$F(x, 2) = (1+x) F(x, 1)$$

$$F(x, m) = (1+x^{\frac{m}{2}}) F(x, m-1)$$

Перемножив эти равенства найдем

$$F(x, m) = (1+x^{\frac{1}{2}})(1+x) \dots (1+x^{\frac{m}{2}}) \dots (8)$$

Пусть теперь n — четное нечетное число. Заменив в формуле (5)

m на $n-1$ и x — первообразный корень уравнения $x^n = 1$. Найдем тогда

$$\sum (-1)^m (n-1, m) = (1-\kappa)(1-\kappa^3) \dots (1-\kappa^{n-2})$$

применяя знаки $\sum$ достаточно распро-

страним на значения $m=0, 2, \dots, n-1$.

$$\text{Но } (-1)^m (n-1, m) = (-1)^m \frac{(1-\kappa^{n-1})(1-\kappa^{n-3}) \dots (1-\kappa^{n-2m-1})}{(1-\kappa)(1-\kappa^3) \dots (1-\kappa^m)} = \kappa^{-1-3-\dots-m} =$$

$$= \kappa^{-\frac{m(m+1)}{2}} \text{ и следовательно}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \kappa^{-\frac{m(m+1)}{2}} = (1-\kappa)(1-\kappa^3) \dots (1-\kappa^{n-2})$$

Эта формула справедлива если понимать под κ какой угодно первообразный корень уравнения $x^n = 1$. Легко

видеть, что κ^{-2} будет также первообразным корнем уравнения $x^n = 1$, т. как $-2 =$ число взаимно простое с n . Заменяя в последнем равенстве κ на κ^{-2} найдем:

$$(9) \sum_{m=0}^{n-1} \kappa^{m(m+1)} = (1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-6})(1 - \kappa^{-10}) \dots (1 - \kappa^{-2(n-1)})$$

Если же в правой части этого равенства на $\kappa^{\frac{1}{2}(n-1)^2} = \kappa^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ найдем в левой части $\sum_{m=0}^{n-1} \kappa^{m^2+m-mn+\frac{(n-1)^2}{2}} =$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \kappa^{\frac{(n-1-m)^2}{2}} = \sum_{m=0}^{n-1} \kappa^{\frac{(n-1-m)^2}{2}} + \sum_{m=0}^{n-1} \kappa^{\frac{(n-1-m+n)^2}{2}} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \kappa^{t^2} + \sum_{t=\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \kappa^{t^2} = \sum_{t=0}^{n-1} \kappa^{t^2} = \varphi(h, n).$$

Равенство (9) теперь так переписываем:

$$(10) : \varphi(h, n) = (\kappa - \kappa^{-1})(\kappa^3 - \kappa^{-3})(\kappa^5 - \kappa^{-5}) \dots (\kappa^{n-2} - \kappa^{-(n-2)}).$$

$$\text{Имеем далее: } \kappa - \kappa^{-1} = -(\kappa^{n-1} - \kappa^{-(n-1)})$$

$$\kappa^3 - \kappa^{-3} = -(\kappa^{n-3} - \kappa^{-(n-3)})$$

$$\kappa^{n-2} - \kappa^{-(n-2)} = -(\kappa^2 - \kappa^{-2})$$

$$(11) \text{ и слѣд.: } \varphi(h, n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\kappa^2 - \kappa^{-2})(\kappa^4 - \kappa^{-4}) \dots (\kappa^{n-1} - \kappa^{-(n-1)})$$

Перемножая (10) и (11) найдем:

$$[\varphi(h, n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\kappa^2 - \kappa^{-2})(\kappa^4 - \kappa^{-4}) \dots (\kappa^{n-1} - \kappa^{-(n-1)})$$

$$\text{или: } [\varphi(h, n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \kappa^{1+2+3+\dots+n-1} (1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-2(n-1)})$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-2(n-1)}). \text{ Но:}$$

$\kappa^{-2}, \kappa^{-4}, \dots, \kappa^{-2(n-1)}$ очевидно представляют все корни такого уравнения: $\frac{x^{n-1}-1}{x-1} = 0$

$$\text{и слѣд.: } \frac{x^{n-1}-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - \kappa^{-2})(x - \kappa^{-4}) \dots (x - \kappa^{-2(n-1)})$$

при $x=1$ находим отсюда:

$$n = (1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-2(n-1)}) \text{ и слѣд.:}$$

$$\text{окончательно: } [\varphi(h, n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n. \text{ Ит. ест.}$$

если n формы $4m+1$ то $\varphi(h, n) = \pm \sqrt{n}$

если же n формы $4m+3$ то: $\varphi(h, n) = \pm i\sqrt{n}$

Знаки которыхъ нужно брать въ этихъ последнихъ формулахъ мы опредѣлимъ слѣдующимъ образомъ:

пока лишь для случая, когда $k=1$,
т. е. для случая $k=p$. Имеем тогда:
$$p^s - p^{-s} = e^{\frac{2\pi}{n}s} - e^{-\frac{2\pi}{n}s} = i \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{n} \cdot s$$
и формула (10) дает нам:

$$\varphi(1, n) = 2^{\frac{n-1}{2}} i^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{n} \dots \sin (n-2) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Если примем n формы $4m+1$ то
числа $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}, (\frac{n+1}{2} + 1) \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-2) \cdot \frac{2\pi}{n}$ будут
больше π , соответственно числу $\frac{n-1}{4}$
синусов будут отрицательны.
Кроме того $i^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{4}}$ и сибд. Знак
всего произведения определится знаком
выражения: $(-1)^{\frac{n-1}{4}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{4}} = 1$ т. е. будет +

Если же n формы $4m+3$ то
числа $\frac{n+3}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}, (\frac{n+3}{2} + 1) \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-2) \cdot \frac{2\pi}{n}$
будут больше π соответственно
числу $\frac{n-3}{4}$ синусов будут отрица-
тельны и кроме того $i^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{4}} i$
Сибд. в этом случае все произве-
дение равно положительному числу умно-
женному на i . $(-1)^{\frac{n-1}{4}} \cdot (-1)^{\frac{n-3}{4}} = i$ т. е. на i
Итак окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(1, n) &= +\sqrt{n}, \text{ если } n \text{ формы } 4m+1 \\ \text{и } \varphi(1, n) &= +i\sqrt{n}, \text{ если } n \text{ формы } 4m+3. \end{aligned} \right\} (19)$$

Пусть n — четное число $\equiv 2 \pmod{4}$
В таком случае сумму $\varphi(k, n)$ так
разложим: $\varphi(k, n) = \sum_{\substack{\bar{t}=0 \\ \bar{t} \neq \frac{n}{2}}}^{\frac{n}{2}-1} n^{\bar{t}} + \sum_{\substack{\bar{t}=\frac{n}{2} \\ \bar{t} \neq \frac{n}{2}}}^{\frac{n}{2}-1} n^{\bar{t}}$
Во второй из полученных сумм пере-
менную суммирования заменим по фор-
муле $\bar{t} = \frac{n}{2} + t$ тогда она примет вид:
 $\sum_{\substack{\bar{t}=\frac{n}{2} \\ \bar{t} \neq \frac{n}{2}}}^{\frac{n}{2}-1} n^{\frac{n}{2} + t} = n^{\frac{n}{2}} \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}-1} n^t$. Но можно видеть что:
 $\sum_{t=1}^{\frac{n}{2}-1} n^t \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$ и следовательно

оказывается, вторая сумма принимает вид: $\sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^{\frac{n}{2}+t^2} = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t$ т. как $\kappa^{\frac{n}{2}} = -1$
 (13) И так имеем: $\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t - \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t = 0$

Рассмотрим наконец случай $n \equiv 0 \pmod{4}$. В формулу (8) положим $m = \frac{n}{2} - 1$ и $x = -\kappa^{-1}$ (не трудно убедиться, что $x = \kappa^{-2}$ — первообразный корень уравнения $x^{\frac{n}{2}} = 1$). Тогда такая преобразование формулы (8) примет вид: $\sum (-1)^m \kappa^{-m} (m, m) = (1 - \kappa^{-1}) / (1 + \kappa^{-1}) / (1 - \kappa^{-3}) \dots (1 - \kappa^{-\frac{n}{2}+1})$ при этом знак $\sum$ достаточно распространить на значения $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$.

(m, m) будет равно теперь такому выражению: $\frac{(1 - \kappa^{-n+2})(1 - \kappa^{-n+4}) \dots (1 - \kappa^{-n+2m})}{(1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-2m})} = \frac{(1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-2m})}{(1 - \kappa^{-2})(1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-2m})} = (-1)^m \kappa^{2(1+2+3+\dots+m)} = (-1)^m \kappa^{m(m+1)}$, следовательно

сумма стоящая в правой части равенства (8') преобразуется в:

$$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^m \kappa^{-m} (-1)^m \kappa^{m(m+1)} = \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^{m^2}$$

С другой стороны находим: $\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t$. Вторую из полученных сумм подстановкой: $t = \frac{n}{2} + t$ приведем к следующей: $\sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^{\frac{n}{2}+t^2}$. Заметим, что $\frac{n}{2} + t^2 \equiv 0 \pmod{n}$

найдем для второй суммы такое выражение: $\sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t$ и следовательно: $\varphi(h, n) = 2 \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} \kappa^t$.

На этом основании формула (8') окончательно преобразуется в следующую: $\varphi(h, n) = 2(1 - \kappa^{-1}) / (1 + \kappa^{-1}) / (1 - \kappa^{-3}) \dots (1 - \kappa^{-\frac{n}{2}+1})$. дайте находим:

$$1 + \kappa^{-2} = -\kappa^{\frac{n}{2}} - 2(1 - \kappa^{-\frac{n}{2}} + 2)$$

$$1 + \kappa^{-4} = -\kappa^{\frac{n}{2}} - 4(1 - \kappa^{-\frac{n}{2}} + 4)$$

$$1 + \kappa^{-6} + 2 = -\kappa^{\frac{n}{2}}(1 - \kappa^{-2}) \text{ и сленд.}$$

$$\varphi(h, n) = 2(-1)^{\frac{n}{4}} - 1 \kappa^{\frac{n}{2}} (1 + 2 + \dots + (\frac{n}{4} - 1)) (1 - \kappa^{-2}) (1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-n+2}) =$$

$$= 2(-1)^{\frac{n}{4}} - 1 \kappa^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{4} (1 - \kappa^{-2}) (1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-n+2}) \dots (1 - \kappa^{-n+2})$$

$$\text{даже находим: } 1 - \kappa^{-2} = -\kappa^{\frac{n}{2}} (1 - \kappa^{-n+2})$$

$$1 - \kappa^{-4} = -\kappa^{\frac{n}{2}} (1 - \kappa^{-n+4})$$

$$1 - \kappa^{-\frac{n}{2}} + 1 = -\kappa^{\frac{n}{2}} + (1 - \kappa^{-\frac{n}{2}} - 1)$$

Принимая во внимание эти равенства

формулу (13) так переписываем:

$$\varphi(h, n) = 2(-1)^{\frac{n}{4}} \kappa^{-\frac{n}{2}} (1 - \kappa^{-\frac{n}{2}} - 1) (1 - \kappa^{-\frac{n}{2}} - 2) \dots (1 - \kappa^{-n+2}) (15)$$

Перемножая равенства (13), (15) и

$$2 = (1 - \kappa^{\frac{n}{2}}) \text{ имеем: } 2[\varphi(h, n)]^2 =$$

$$= 4(-1)^{\frac{n}{4}} - 1 + \frac{n}{4} \kappa^{-\frac{n}{2}} (1 - \kappa^{-2}) (1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-n+2})$$

$$\text{или: } [\varphi(h, n)]^2 = 2\kappa^{\frac{n}{4}} (1 - \kappa^{-2}) (1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-n+2})$$

$$\text{Заметьте, что: } \kappa^{\frac{n}{8}} = \cos \frac{2\pi h}{n} \cdot \frac{n}{8} + i \sin \frac{2\pi h}{n} \cdot \frac{n}{8} =$$

$$= \cos \frac{\pi h}{4} + i \sin \frac{\pi h}{4} = \pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \text{ причем в зависимости}$$

берется знак + или - смотря по тому

будет ли h формы $4m+1$, или формы $4m+3$.

$$\text{Кроме того } (1 - \kappa^{-2}) (1 - \kappa^{-4}) \dots (1 - \kappa^{-n+2}) = n$$

поэтому окончательно находим

$$\varphi(h, n) = \pm (1 \pm i) \sqrt{n} \dots \dots \dots (16)$$

Остается определить знак стоя-

щей перед выражением $(1 \pm i) \sqrt{n}$. Име-

мы отклоняясь пока лишь для случая $h=1$.

Положим $R = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ и замечая что

$R^n = -1$ мы формулу (8'') так преобразу-

ем для случая $h=1$:

$$\varphi(h, n) = 2(1 + R^{n-2})(1 + R^{-4})(1 + R^{n-6}) \dots (1 + R^{n-4})(1 + R^2)$$

$$\text{или } \varphi(h, n) = 2(1 + R^2)(1 + R^{-4})(1 + R^6) \dots (1 + R^{n-4})(1 + R^{-2})$$

$$\text{даже находим: } 1 + R^2 = R(R^{-1} + R^1) = 2R \cos \frac{\pi}{n}$$

$$1 + R^{-4} = 2R^{-2} \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$1 + R^6 = 2R^3 \cos \frac{3\pi}{n}$$

$$1 + R^{n-2} = 2R^{\frac{n-2}{2}} \cos \frac{(n-2)\pi}{n}$$

и слѣд. $\varphi(1, n) = 2^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdots \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$

Все косинусы входящие въ это произведение положительны и кроме того: $\rho^{\frac{n}{2}} = (1+i)^n$ и

слѣд. $\varphi(1, n) =$ положительному числу умноженному на $(1+i)^n$ есть:

(17) $\varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n}$. Собирая формулы (12) (13) (17) имеем окончательно:

(18) $\begin{cases} \varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n} & \text{если } n \text{ формы } 4m \\ \varphi(1, n) = \sqrt{n} & \text{если } n \text{ формы } 4m+1 \\ \varphi(1, n) = 0 & \text{если } n \text{ формы } 4m+2 \\ \varphi(1, n) = i\sqrt{n} & \text{если } n \text{ формы } 4m+3. \end{cases}$

Собирая формулы (18)

Методъ Гаусса, которыми мы получили формулы (18) — методъ алгебраический такъ какъ выполняется всего алгебраическими преобразованиями. Сейчас мы рассмотримъ другія доказательства тѣхъ же формулъ, основанные на довольно высокихъ предположеніяхъ математическаго анализа. Одно изъ нихъ дано Дирихле, другое Коши. При разсмотрѣніи этихъ доказательствъ намъ придется познакомиться съ некоторыми предположеніями изъ теории рядовъ Фурье. Выводимъ эти предположенія такъ же какъ.

Пусть x — нѣкоторое положительное число и пусть функция $f(x)$ конечная непрерывная убывающая въ промежуткѣ $(0, x)$, удовлетворяющая условию $f'(x) \geq 0$. Положимъ $S_p = \sum_{n=1}^p f(n)$ и

и рассмотрим предельное S_p . Подстановка $px = x$ находим: $S_p = \int_0^p \frac{\sin x}{x} f\left(\frac{x}{p}\right) dx$

Пусть теперь $px = q\pi + \rho$, где $0 \leq \rho < \pi$.

Тогда интеграл S_p можно разбить

на сумму по следующему правилу:

$$S_p = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots + \int_{(q-1)\pi}^{q\pi} + \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} f\left(\frac{x}{p}\right) dx$$

n -ый интеграл этого ряда т.е. $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} f\left(\frac{x}{p}\right) dx$ подстановкой

$x = (n-1)\pi + \xi$ преобразуется к интегралу:

$$(-1)^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{(n-1)\pi + \xi} f\left(\frac{(n-1)\pi + \xi}{p}\right) d\xi$$

подынтегральная функция которого очевидно монотонно ≥ 0 и убывает. Поэтому члены

нашего ряда можно представить

$$\text{в виде: } (-1)^{n-1} U_n \text{ где } U_n > 0. \text{ Можно}$$

написать на этом основании:

$$S_p = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{q-1} U_q + R_q \quad (19)$$

$$\text{где полагается: } R_q = \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} f\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

$n+1$ -ый член нашего ряда имеет вид:

$$(-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{n\pi + \xi} f\left(\frac{n\pi + \xi}{p}\right) d\xi. \text{ Сравнивая}$$

это выражение с выражением

для n -го члена и принимая во

внимание что $f(0)$ функция убывающая, легко найдем что $U_{n+1} < U_n$

т.е. члены U_n монотонно убывают. Поэтому члены ряда (19)

убывают по абсолютному значению от

начала ряда. На основании общей теории

мажорантных рядов можно

написать поэтому:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots - U_{2k} < S_p < U_1 + U_2 + \dots + U_{2k+1}$$

$$\text{и сльд: } S_p - R_q = U_1 - U_2 + \dots - U_{2k} + \epsilon U_{2k+1}$$

$$\text{где } 0 < \epsilon < 1. \text{ т.е.}$$

$$S_p = \int_0^p \frac{2k\pi \sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon_k \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \\ + \int_{9\pi}^{9\pi+p} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx. \text{ Применив к } k\pi$$

последним двумя интегралами теорему о среднем значении, преобразуем их предварительно подстановками:

$x = 2k\pi + \xi$ и $x = 9\pi + \xi$ найдем:

$$S_p = \int_0^{2k\pi} \frac{2k\pi \sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon_k \frac{\sin 2\pi}{2k+\delta} F\left(\frac{2k\pi+\delta}{p}\right) + \\ + (-1) \frac{9\pi \sin \delta}{9\pi+\delta} F\left(\frac{9\pi-\delta}{p}\right) \text{ где } 0 < \delta < \pi.$$

Оставив k постоянным будем приближать p , а ε_k и δ к пределу ∞ . Найдем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = F(0) \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon_k \cdot \frac{\sin 2\pi}{2k+\delta} F(0)$$

прочтем будет очевидно (предельное $\varepsilon_k \leq 1$ в силу условия: $0 < \varepsilon < 1$).

Величину теперь произвольное до сих пор брали к до безконечности найдем:

$$(20) \text{ предель } S_p = F(0) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ представляет собой конечное определенное число. Действительно разлагая этот интеграл по сходимости: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \dots$ легко убедиться, что ряд выражающий этот интеграл знакопеременный; члены его убывают безпрерывно по мере удаления от начала ряда. Следовательно интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходящийся, т. е. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = K$ — постоенное число.

$$(21) \text{ и след. предель } S_p = K F(0)$$

Не определяя пока постоянной K обобщим формулу (21)

на необходимые случаи выбора $R(\theta)$

Пусть $R(\theta)$ принимает в интервале $(0, \delta)$ отрицательные значения.

В силу непрерывности функции $R(\theta)$ можно найти такое число A что $A + R(\theta)$ в промежутке $(0, \delta)$ будет

принимать только положительные значения. Но тогда по формуле (21):

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin p\theta}{\theta} [A + R(\theta)] d\theta = K[A + R(0)]$$

откуда пред. $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin p\theta}{\theta} R(\theta) d\theta = K R(0)$ т. е. ет. формула (21) справедлива и в этом случае.

Если $R(\theta)$ возрастающая функция во интервале $(0, \delta)$, то $-R(\theta)$ — убывающая функция в том же интервале и из последней функции можно было

применить формулу (21). Найдем:

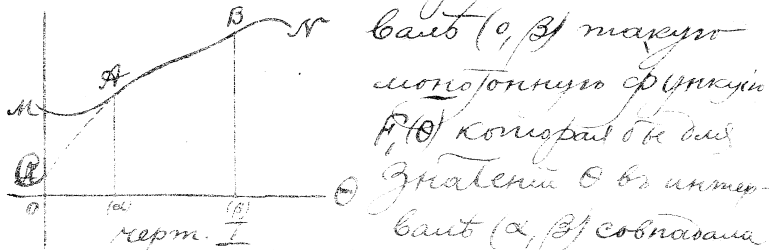
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin p\theta}{\theta} [-R(\theta)] d\theta = K[-R(0)] \text{ откуда}$$

опять получается формула (21).

Найдем теперь $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} R(\theta) d\theta$

покажем, что $R(\theta)$ монотонна во интервале (α, β) . Пусть для определенности $\beta > \alpha$

Всегда можно выбрать во интер-



валу (α, β) такую монотонную функцию $R_1(\theta)$ которая бы для

значений θ во интервале (α, β) совпадала

с функцией $R(\theta)$ [На керт. I кривая $m\theta$ изображает функцию $R(\theta)$ и CB — графическое изображение функции $R_1(\theta)$] Найдем

$$\text{тогда: } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} R_1(\theta) d\theta =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} R(\theta) d\theta - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} R(\theta) d\theta =$$

$= KR(0) - KR(0) = 0$ а следовательно и:

$$(22) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} R(\theta) d\theta = 0$$

Положим теперь, что функция $R(\theta)$ не монотонна в интервале $(0, \delta)$. Пусть все максимумы и минимумы ее соответствуют значениям $\theta = m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$. Интеграл $\int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} R(\theta) d\theta$ разложим по частям:

$$\int_0^{\delta} = \int_0^{m_1} + \int_{m_1}^{m_2} + \dots + \int_{m_{k-1}}^{m_k} + \int_{m_k}^{\delta}.$$

Так как в каждом из этих интервалов $(0, m_1), (m_1, m_2), \dots, (m_k, \delta)$ функция $R(\theta)$ монотонна то можно применить к первому из этих интегралов формулу (21), а к каждому из остальных — формулу (22), после чего придем снова к формуле (21).

Положим наконец, что $R(\theta)$ заключает в себя много паразитных. Отделив вещественную часть $R(\theta)$ от мнимой найдем: $R(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta)$. Полученные функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ также конечны и непрерывны и к ним же след. можно применить формулу (21). Найдем: $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = K\varphi(0)$ и $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} \psi(\theta) d\theta = K\psi(0)$.

Принимая во внимание эти равенства найдем: $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} R(\theta) d\theta = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta + i \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin pr\theta}{\theta} \psi(\theta) d\theta = K\varphi(0) + i \cdot K\psi(0) = KR(0)$. Итак формула (21) справедлива и в этом случае.

Для определения постоянной

воспользуемся формулой (21). Так

как $K = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ не зависит от

вида функции $R(\theta)$ ни от γ и ρ то

для определения его в формуле (21)

можно положить: $R(\theta) = \frac{e}{\sin \theta}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$,

и $\rho = 2n+1$. Найдем тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = K \text{ и } R(0) = 1.$$

Применяя сюда известную формулу:

$$\cos 2\theta + \cos 4\theta + \dots + \cos 2n\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin \theta} - \frac{1}{2} \dots (23)$$

$$\text{найдем: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta + 2\cos 6\theta + \dots + 2\cos 2n\theta] d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

$$\text{и следовательно: } K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \text{ формула (21)}$$

теперь примем следующий вид:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \rho \theta}{\theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0) \dots (25)$$

Обратимся теперь к разложению

$$\text{такого предела: } \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

примем полагая, что $m = \gamma \theta$ и

$$\text{переходя к пределу } R(\theta) = \frac{e}{\sin \theta} f(\theta)$$

до $f(\theta)$ конечная непрерывная функция

$R(\theta)$ будет также конечной непре-

рывной функцией для всякого θ

лежащего в интервале $(0, \infty)$ за ис-

ключения $\theta = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ для кото-

рых $R(\theta) = \infty$. Если $\gamma < 0$ то непосред-

ственно след. можем применить к

$R(\theta)$ формулу (25) найдем тогда:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \gamma \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0) \dots (26)$$

Если $\gamma = \pi$ то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \pi \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ предст-

авляет собой сумму интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \pi \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \text{ и } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \pi \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta. \text{ Второй}$$

из этих интегралов подстанав-

кого $\theta = \pi - \alpha$, преобразуется в следующую:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} [f(\theta) + f(\pi - \theta)] d\theta$$

функция стоящая в скобках вида []
 = конечная непрерывная функция в
 промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$. Поэтому мы можем
 применить к ней формулу (25)
 Найдем тогда

$$\text{пред. } \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} [f(\theta) + f(\pi - \theta)] d\theta = \frac{\pi}{2} [f(0) + f(\pi)]$$

(24) т.е. если пред. $\int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} [f(0) + f(\pi)]$

Разсмотрим теперь случай,

когда $f = \text{некоторое}$ кратное π положительное

(число, положительное $f = k\pi$. Умножив,

$$\int_0^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \text{ разделим по частям}$$

$$= \int_0^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \dots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

Подставляя в каждом члене

ранее этого рода: $(k-1)\pi + \theta$, выведем

или равенство получим след. равенство:

$$\int_0^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} [f(\theta) + f(\pi - \theta) + \dots + f((k-1)\pi + \theta)] d\theta$$

П. как функция стоящая в скобках
 вида [] конечна и непрерывна то к

последнему интегралу мы можем
 применить формулу (24) Найдем

$$\text{тогда: пред. } \int_0^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta =$$

$$(28) = \pi \left[\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f((k-1)\pi) \right] + \frac{1}{2} f(k\pi)$$

Положим теперь $f = k\pi + p$

где $0 < p < \pi$. Умножив,

$$\int_0^{k\pi+p} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta +$$

$$+ \int_{k\pi}^{k\pi+p} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_0^p \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(k\pi + \theta) d\theta$$

Применив к первому из правых

членов интегралов формулу (28)

и ко второй формуле (26) найдем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left[\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(k\pi) \right] \dots (29)$$

Для нашей цели важно еще рассмотреть тот случай, когда f стремится к пределу ∞ . Пусть при этом $f(\theta)$ такова, что $|f(\theta)|$ представляет монотонно убывающую функцию, такую что ряд:
 $|f(0)| + |f(\pi)| + |f(2\pi)| + \dots$ сходится ... (30)

Как легко видеть в этом случае интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ есть интеграл Абеля. Эти свойства, рассмотрим $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$ для $0 \leq \pi < \frac{\pi}{2}$. Интеграл J можно разложить по следующей схеме:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \dots + \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

или, с помощью очевидных преобразований, можно показать, что равно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \dots + \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \dots$$

где $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ по модулю ≥ 0 и $|f(\theta)|$ убывающая монотонная функция. Тогда без труда $|J| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} |f(\theta)| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} |f(\theta)| d\theta + \dots + \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} |f(\theta)| d\theta$

Замечая теперь интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta$ его значение из формулы (24) имеет

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$|J_k| < \frac{\pi}{2} (|f(\frac{\pi}{2})| + |f(\frac{3\pi}{2})| + \dots + |f(\frac{(k-1)\pi}{2})|) = \frac{\pi}{2} \epsilon_k$$

на основании сходимости ряда (30)

заключается, что E_k а значит со-
ответственно $|J_k|$ при достаточно большом k
и при всяком $K, K > K$ будет сколь
угодно мало и след. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t \theta}{t} f(\theta) d\theta$
= интеграл сходящийся. На этом же
основании заключаем, что формулы
(28) или (29) остаются справедливыми
и в предельном случае: при $k = \infty$
если только $f(\theta)$ удовлетворяет
указанным выше условиям. Можно
написать по Фурье:

$$(31) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t \theta}{t} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2} f(0) + f(t) + f(2t) + f(3t) + \dots$$

Положим теперь $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$
и рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots$$

Можно все слагаемые представить
члены этого ряда объединить под
одним знаком. Найдем тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) [1 + 2 \cos x \cos t + 2 \cos 2x \cos 2t + \dots] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \dots \right] dt \end{aligned}$$

Примем во внимание формулу

$$(32) \text{ Найдем отсюда: } \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots = \\ = \frac{1}{\pi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt + \right. \\ \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t+x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) dt \right)$$

$$\text{Интеграл } U_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt$$

преобразуем подстановкою: $\frac{1}{2}(t-x) = w$

т.е. $t = x + 2w$; получим тогда:

$$U_n = \int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(x+2w) dw =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin \omega} f(x-2\omega) d\omega + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin \omega} f(x+2\omega) d\omega$$

Отсюда для случая $x \neq 0$ находим по формулам (26) и (29) предел первого интеграла (при $n \rightarrow \infty$) равным $\frac{\pi}{2} f(x)$, а второго $\pi \left\{ \frac{1}{2} f(x) + f(2\pi+x) + f(4\pi+x) + \dots + f[2(n-1)\pi+x] \right\}$ и след.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left\{ f(x) + f(2\pi+x) + f(4\pi+x) + \dots + f[2(n-1)\pi+x] \right\}$

Если же $x=0$, то для первого интеграла равен 0, а для второго по формуле (28) получаем предел $\pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + \dots + \frac{1}{2} f(2n\pi) \right\}$ и след.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + \dots + \frac{1}{2} f(2n\pi) \right\}$

аналогично находим обозначая $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{\sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) dt$ через U_n

Для $x \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \pi \left\{ f(2\pi-x) + f(4\pi-x) + \dots + f(2n\pi-x) \right\}$ и если $x=0$ то: $\pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + \dots + f[2(n-1)\pi] + \frac{1}{2} f(2n\pi) \right\}$

формула (32) обращается теперь в следующую:

$$\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots = f(x) + f(2\pi-x) + f(2\pi+x) + f(4\pi-x) + f(4\pi+x) + \dots + f[2(n-1)\pi-x] + f(2n\pi-x)$$

$$= \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + \dots = 2 \left[\frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + \dots + f[2(n-1)\pi] + \frac{1}{2} f(2n\pi) \right] \text{ если } x=0$$

Заменив при $\cos nt = \cos(-n)t$ по свойству

формулу приведем к виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots + f[2(n-1)\pi] + \frac{1}{2} f(2n\pi) \right\} \dots (33)$$

Таким образом $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$, где $f(t)$ означать функцию удовлетворяющую условиям указанным при выводе формулы (31). Рассмотрим ряд $\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$. Можно все интегралы представить в виде

Этого ряда объединим под одним знаком. Найдем тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(t) [1 + 2\cos x \cos t + 2\cos 2x \cos 2t + \dots] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(t) \left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \dots \right] dt \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (23) найдем отсюда: $\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) dt \right\}$$

Интеграл $U_n = \int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt$

преобразуем подстановкой: $\frac{1}{2}(t-x) = w$,

откуда $t = x + 2w$. Получим тогда:

$$\begin{aligned} U_n &= \int_{-\frac{x}{2}}^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})w}{\sin w} f(x+2w) dw = \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})w}{\sin w} f(x-2w) dw + \int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})w}{\sin w} f(x+2w) dw \end{aligned}$$

Если x лежит в промежутке $(0, \pi)$ и $x \neq 0$ то к первому из полученных интегралов можно применить формулу (26), а ко второму формулу (31). Предельно

первого интеграла при $n \rightarrow \infty$ будет:

$\frac{1}{2}\pi f(x)$ а второго: $\pi \left\{ \frac{1}{2}f(x) + f(2\pi+x) + \dots \right\}$

и следовательно $U_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \pi \left\{ \frac{1}{2}f(x) + f(2\pi+x) + \dots \right\}$

Если же $x=0$ то первый интеграл $= 0$ и след:

$$U_\infty = \pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots \right\}$$

Аналогично найдем: $V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin \frac{1}{2}(t+x)} f(t) dt =$

$$= \pi \left\{ f(2\pi-x) + f(4\pi-x) + \dots \right\} \text{ если } x \neq 0 \text{ и}$$

$$V_\infty = \pi \left\{ \frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots \right\} \text{ если } x=0$$

и след: $\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots =$

$$= f(x) + f(2\pi-x) + f(2\pi+x) + \dots \text{ если } x \neq 0 \text{ и}$$

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \dots =$$

$$(34) = 2 \left[\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots \right] \text{ если } x=0$$

Итак в виду доказанности Ди-
рихле рассмотрим 2 следующие ин-
теграла $p = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx$ и $q = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$.
Предварительно укажем, что они имеют
конечные определенные значения. Преобра-
зовав интеграл p подстановкой $x^2 = y$
найдем: $p = 2 \int_0^{+\infty} \cos(y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$
Разложив подинтегральный интеграл по частям:
 $p = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} + \dots + \int_{\pi+\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{3\pi}{2}} + \dots \right]$ рассмот-
рив 2 свободные интеграла этой суммы:
 $I_n = \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$ и $J_n = \int_{n\pi+\frac{3\pi}{2}}^{n\pi+\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$
Подстановкою $y = \pi + \varepsilon$ второй из них
преобразуется в следующий: $-\int_{\pi+\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{\pi+y}} dy$
откуда ясно, что: $I_n > J_{n+1}$ и кроме того
что I_n и J_{n+1} разных знаков. С другой
стороны находим $|I_n| < \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}}$
откуда следует, что: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Итак полученное разложение p
представляет собой убывающий знако-
переменный ряд, члены которого без пре-
дельно убывают по мере удаления от
начала ряда и след. имеет конечное
определенное значение. Подобным же обра-
зом докажем сходимость интеграла q .

Обозначив через δ величину, которую
учла, положим $\Delta = p \cos \delta - q \sin \delta$ т. е. δ
 $\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos \delta \cos(x^2) - \sin \delta \sin(x^2)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + x^2) dx$

Пусть теперь α - некоторая положи-
тельная постоянная величина. Запи-
сав в подинтегральном интеграле Δ на δ
найдем $\frac{\Delta}{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + \alpha^2 x^2) dx \dots \dots (35)$

Обозначив через β другую положи-

теперь постоянную величину под
несемный интеграл ради делаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\beta + \alpha x^2) dx = \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \int_{\beta-\beta}^{\beta+\beta} \cos(\beta + \alpha x^2) dx$$

Каждый отдельный интеграл

$$J_{\beta} = \int_{\beta-\beta}^{\beta+\beta} \cos(\beta + \alpha x^2) dx \text{ преобразуем}$$

подстановкой: $x = \beta + \xi$, получим:

$$J_{\beta} = \int_{-\beta}^{\beta} \cos(\beta + \alpha \beta^2 + 2\alpha \beta \xi + \alpha \xi^2) d\xi$$

Постоянные α и β , которые до сих пор
были совершенно произвольны под-
чиним следующим условиям:

Пусть m — некоторое целое положи-
тельное число, положим тогда:

$$\alpha \beta^2 = 2m\pi, \quad 2\alpha \beta = 1, \text{ откуда находим}$$

$$\alpha = \frac{1}{4m\pi} \text{ и } \beta = 4m\pi. \text{ Интеграл } J_{\beta} \text{ преоб-}$$

разуется теперь в следующем: $J_{\beta} =$

$$= \int_0^{\beta} \cos(\beta + \alpha x^2) dx = \int_0^{\beta} \cos(\beta + \alpha x^2 + \frac{\alpha x^2}{8m\pi}) dx =$$

$$= \int_0^{\beta} \cos(\beta + \frac{\alpha x^2}{8m\pi}) \cos \alpha x^2 dx - \int_0^{\beta} \sin(\beta + \frac{\alpha x^2}{8m\pi}) \sin \alpha x^2 dx$$

формула (35) применима теперь

$$\text{такой вид: } \Delta \sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos(\beta + \frac{\alpha x^2}{8m\pi}) \cos \alpha x^2 dx +$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \sin(\beta + \frac{\alpha x^2}{8m\pi}) \sin \alpha x^2 dx. \text{ Но так как}$$

как $\sin 0 \cdot x = 0$ и $\sin(\alpha x) = \sin(-\alpha x)$ то вторая

из полученных сумм очевидно равна 0

$$\text{и слѣд. } \Delta \sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos(\beta + \frac{\alpha x^2}{8m\pi}) \cos \alpha x^2 dx. \text{ Откуда}$$

на основании формулы (33) находим:

$$(36) \quad \Delta \sqrt{8m\pi} = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(2\pi) + \dots + f(2(m-1)\pi) + \frac{1}{2} f(4m\pi) \right\}$$

если обозначим $\cos(\beta + \frac{\alpha x^2}{8m\pi})$ через $f(x)$

легко видеть что $f(4m\pi + 2\pi) = f(2\pi)$

и следовательно: $f(2\pi)$ можно раз-

считывать как сумму: $\frac{1}{2} f(2\pi) +$

$+\frac{1}{2} f(4m\pi + 2\pi)$. Таким образом это равен-

ство кр. равенство $f(2\pi), f(4\pi), \dots, f(2(m-1)\pi)$

вместо формулы (36) получим следующее: $\Delta \sqrt{8m\pi} = \pi \sum_{s=0}^{4m-1} f(2s\pi) = \pi \sum_{s=0}^{4m-1} \cos(\sqrt{s} \frac{2\pi}{2m})$ (36')

Положим теперь $4m=n$ и пусть $\sqrt{n}$ — арифметическое значение $\sqrt{n}$. Тогда найдем: $\Delta \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{2}} \sum_{s=0}^{n-1} \cos(\sqrt{s} \frac{2\pi}{n})$; где $\Delta = p \cos \rho - q \sin \rho$. Легко определить отсюда p и q . Полагая $n=4$ находим:

$$2(p \cos \rho - q \sin \rho) = \sqrt{\frac{4}{2}} [\cos \sqrt{0} + \cos(\sqrt{1} \frac{2\pi}{4}) + \cos(\sqrt{4} \frac{2\pi}{4}) + \cos(\sqrt{9} \frac{2\pi}{4})] = 2\sqrt{\frac{4}{2}} [\cos \rho + \cos(\rho + \frac{\pi}{2})] = 2\sqrt{\frac{4}{2}} [\cos \rho - \sin \rho]$$

или $(p - \sqrt{\frac{n}{2}}) \cos \rho = (q - \sqrt{\frac{n}{2}}) \sin \rho$, откуда в силу произвольности угла ρ находим: $p = q = \sqrt{\frac{n}{2}}$. Формулу (36') можно на

этом основании так переписать: $\sqrt{n} \sqrt{\frac{n}{2}} (\cos \rho - \sin \rho) = \sqrt{\frac{n}{2}} \sum_{s=0}^{n-1} \cos(\sqrt{s} \frac{2\pi}{n})$ или еще: $\cos \rho - \sin \rho = \sum_{s=0}^{n-1} \cos \sqrt{s} \frac{2\pi}{n} - \sin \rho \sum_{s=0}^{n-1} \sin \sqrt{s} \frac{2\pi}{n}$,

откуда ввиду произвольности угла ρ находим: $\sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \cos \sqrt{s} \frac{2\pi}{n}$ и $\sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \sin \sqrt{s} \frac{2\pi}{n}$. Умно-

жив второе равенство почленно на i и сложив с первым, находим: $\sum_{s=0}^{n-1} e^{\sqrt{s} \frac{2\pi i}{n}} = (1+i)\sqrt{n}$ т. е. $\varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n}$ (37)

Чтобы распространить эту формулу на другие значения n докажем следующие свойства функции $\varphi(h, n)$.

1) Если $h \equiv h' \pmod{n}$ то $\varphi(h, n) = \varphi(h', n)$, так как (38)

$$\text{как } e^{\sqrt{s} \frac{2\pi i h}{n}} = e^{\sqrt{s} \frac{2\pi i h'}{n}}$$

2) Если a — число взаимно простое с n (39) то: $\varphi(ha^2, n) = \varphi(h, n)$. Действительно $\varphi(ha^2, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{\sqrt{s} \frac{2\pi i ha^2}{n}}$. Но когда s пробегает полную систему вычетов по модулю n , as также пробегает полную систему вычетов по модулю n .

(40) 3) Если m и n взаимно простые числа то: $\varphi(hm, n)/\varphi(hn, m) = \varphi(h, mn)$. Действительно,

перемножив по числу равенств

$$\varphi(hm, n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i h m t}{n}} \text{ и } \varphi(hn, m) = \sum_{t=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i h n t}{m}}$$

$$\begin{aligned} \text{найдем: } \varphi(hm, n)/\varphi(hn, m) &= \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i h m t}{n}} \cdot \frac{1}{\sum_{t=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i h n t}{m}}} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{(h m)^2 + (h n)^2}{mn} \cdot 2\pi i t} = \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{(h m)^2 + 2 h m t n + (h n)^2}{mn} \cdot 2\pi i t} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{(h m + t n)^2}{mn} \cdot 2\pi i t} \end{aligned}$$

Здесь соответствующим значениям:

$t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $t = 0, 1, 2, \dots, m-1$ число

$hm + nt$ принимает mn значений не повторяющихся между собой по модулю mn .

В самом деле, допустим, что:

$$t_1 m + t_2 n \equiv t_3 m + t_4 n \pmod{mn} \text{ или}$$

$$(t_1 - t_3)m + (t_2 - t_4)n \equiv 0 \pmod{mn} \text{ мы имеем отсюда следующие сравнения: } (t_1 - t_3)m \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\text{и } (t_2 - t_4)n \equiv 0 \pmod{m}$$

Отсюда следует, что: $t_1 \equiv t_3 \pmod{n}$ и $t_2 \equiv t_4 \pmod{m}$

На основании этих соображений

равенство находим окончательно:

$$\varphi(hm, n)/\varphi(hn, m) = \sum_{t=0}^{mn-1} e^{\frac{2\pi i h t^2}{mn}} = \varphi(h, mn)$$

Пусть n — нечетное число. Согласно

(40) найдем $\varphi(h, n)/\varphi(h, n) = \varphi(1, 4n)$. Но:

$$\varphi(h, n) = \varphi(1, n) \text{ согласно (39);}$$

$$\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i h t^2}{n}} = 2(1 + e^{\frac{2\pi i h}{n}}) = 2(1 \pm i) \text{ где берется}$$

знак $+$ или $-$ смотря по тому будет ли:

$n \equiv 1$, или $\equiv 3 \pmod{4}$; наконец:

$$\varphi(1, 4n) = 2(1 \pm i)\sqrt{n} \text{ согласно формуле (34)}$$

$$(41) \text{ итак следует: } \varphi(1, n) = \frac{(1 \pm i)\sqrt{n}}{1 \pm i} =$$

$$= \sqrt{n} \text{ или } i\sqrt{n} \text{ смотря по тому будет ли}$$

$n \equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod{4}$

Для случая же $n \equiv 2 \pmod{4}$ можно повторить доказательство приведенное при разложении метода Гаусса. Итак мы снова пришли к формуле

14 Доказательство. Обозначим
используемый интеграл

Обращаясь к рассмотренному доказа-
тельству Коши рассмотрим такой
обобщенный интеграл: $U = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos bx dx$
где α^2 — некоторое комплексное число. Полагая
его равным $\alpha + \beta i$ найдем:

$$U = \int_0^\infty e^{-(\alpha + \beta i)x^2} \cos bx dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} (\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2) \cos bx dx$$

Но так как $|e^{-\alpha x^2} (\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2) \cos bx| \leq e^{-\alpha x^2}$
то следовательно: $|U| \leq \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$.

Подобный же интеграл как известно
при $\alpha > 0$ равен $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. И так $|U| < \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$
т. е. интеграл U — сходящийся, если
только действительная часть α^2 больше 0.

Для определения значения этого ин-
теграла воспользуемся методом диф-
ференциальных уравнений. Заметим
что интеграл $V = \int_0^\infty x e^{-\alpha^2 x^2} \sin bx dx$
полученный из интеграла U дифферен-
цированием по параметру b равномерно
сходящийся. Действительно: $|\int_0^\infty x e^{-\alpha^2 x^2} \sin bx dx| <$
 $< |\int_0^\infty x e^{-\alpha^2 x^2} dx| = -\frac{1}{2\alpha^2} [e^{-\alpha^2 x^2}]_0^\infty = \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha^2 u^2}$
и следовательно при $u = \infty$ стремится
к пределу 0 независимо от того какое
значение имеет параметр b . Это
еще показывает что V есть инте-
грал равномерно сходящийся.

Итак интеграл U сходящийся при
всяком b , а интеграл V равномерно
сходящийся при всяком b . В таком
случае как известно справедливо
равенство: $\frac{dU}{db} = V = \int_0^\infty x e^{-\alpha^2 x^2} \sin bx dx =$
 ~~$= \int_0^\infty \frac{b}{2\alpha^2} e^{-\alpha^2 x^2} \cos bx dx$~~

$$= \int_0^{\infty} \frac{x}{2a^2} \sin bx \cdot d e^{-ax^2} = \left[\frac{x}{2a^2} \sin bx e^{-ax^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{b}{2a^2} e^{-ax^2} \cos bx dx. \text{ Но } \left[\frac{x}{2a^2} \sin bx e^{-ax^2} \right]_0^{\infty} = 0$$

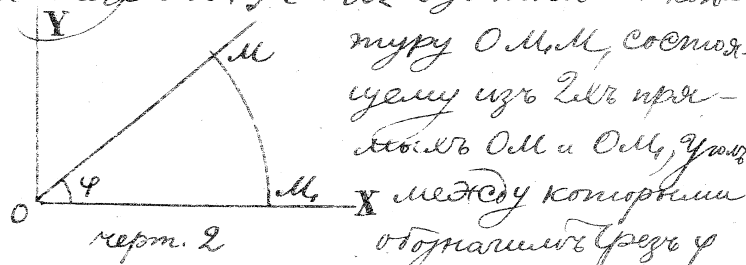
и следовательно: $\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{b}{2a^2} u$.

Отсюда разделив переменные находим:
 $\frac{du}{u} = -\frac{b db}{2a^2}$; откуда:

$$(42) \lg u = -\frac{b^2}{4a^2} + \lg C \text{ или: } u = C e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

В этой формуле C — постоянная, независимая от b . Для определения ее положим в (42) $b=0$, найдем:

$C = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$. Разсмотрим теперь интеграл: $\int e^{-z^2} dz$ взятый по кон-



туру $O M M'$, состоящую из двух прямых $O M$ и $O M'$, угла между которыми обозначим через φ и дуги окружности $M M'$ радиуса R .

Функция e^{-z^2} , которую можно представить в виде: $e^{-R^2(\cos^2 \varphi + i \sin 2\varphi)}$,

если положить $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ очевидно не имеет полюсов на части плоскости, простирающейся в ∞ вдоль действительной прямой $O P$ и $O P'$ (включая и точки, лежащие на этих прямых), если только $\cos 2\varphi > 0$. Это бы было постоянно, если бы угол φ был острым, и след. чтобы было: $\varphi < \frac{\pi}{4}$.

Итак при условии $\varphi < \frac{\pi}{4}$ внутри контура $O M M'$ и на обводе его функции e^{-z^2} остается целой и простой.

$$\int_{O M M'} e^{-z^2} dz = \int_{O M} e^{-z^2} dz + \int_{M M'} e^{-z^2} dz + \int_{M' O} e^{-z^2} dz.$$

Первый интеграл второй части

Этого равенства очевидно равно
 $\int_0^R e^{-x^2} dx$, предельное значение по при
 $R \rightarrow \infty$ есть $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ равный $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
 второй же можно преобразованием
 подстановкой: $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ к
 контурному интегралу: $T = \int \gamma e^{-R^2 \cos^2 \varphi} (-R i \sin \varphi) d\varphi$
 По формуле Дарбу: $|T| \leq e^{-R^2 \cos^2 \varphi} R \cdot \varphi$
 и так как $\varphi < \frac{\pi}{2}$ то $\cos^2 \varphi > 0$ и следовательно
 предельно $T = 0$. Итак предельно $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$
 если точка M по направлению OM
 удаляется в ∞ получается равным
 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Подстановкою $z = \rho a$, где $a =$
 $= \cos \varphi + i \sin \varphi$ интеграл можно пре-
 образовать в следующий: $\int_0^R e^{-a^2 \rho^2} a d\rho$
 и следовательно предельно: $a \int_0^\infty e^{-a^2 \rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
 или: $a \int_0^\infty e^{-a^2 \rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ и окончательно:
 $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ если $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$ и
 $\varphi < \frac{\pi}{2}$, а это и есть нужный нам
 интеграл: С. формула (43) примет
 теперь следующий вид:
 $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \quad (45)$

Применим теперь формулу (34)
 к функции $e^{-a^2 x^2}$, где a^2 — некоторое комп-
 лексное число с положительным веществен-
 ной частью. Получим:

$$\pi \left\{ \frac{1}{2} + e^{-a^2 (ix)^2} + e^{-a^2 (2ix)^2} + e^{-a^2 (3ix)^2} + \dots \right\} = \\
 = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx + \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos x dx + \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos 2x dx + \dots$$

Применив во внимание формулу (45)
 перепишем последнее равенство в
 таком виде:

$$\pi \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{4} \pi a^2} + e^{-\frac{1}{4} \pi a^2} + e^{-\frac{1}{4} \pi a^2} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-4\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-9\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + \dots$$

Положим: $2ka_1 = \alpha$ и $\frac{1}{2a_1} = \beta$; тогда будем

$$\pi \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + e^{-9\alpha^2} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\beta^2} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2} + \dots \right\}$$

$$\text{Но так как: } 2ab\pi = \sqrt{2a_1} \sqrt{2a_2\pi} = \frac{\pi}{2},$$

то формула эта окончательно принимает такой вид:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + e^{-9\alpha^2} + \dots \right\} = \\ (44) \quad & = \beta^2 \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\beta^2} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2} + \dots \right\} \quad \text{где } \beta \end{aligned}$$

связано с α таким равенством:

$$\alpha\beta = \frac{\pi a_1}{2a_2} = \pi. \text{ Формула (44) справедлива}$$

в том случае, когда α^2 имеет поло-

жительную вещественную часть, так

как формула (43) справедлива тогда, когда установлена

для этого случая. Но $\alpha = \frac{\alpha}{\pi}$ и $\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{\pi^2}$

откуда ясно, что α^2 имеет тот

же аргумент, что и α ; следовательно

можно сказать теперь, что формула

(44) справедлива в том случае, когда

вещественная часть α^2 положительна.

Положим в формуле (44)

$$\alpha^2 = \alpha^2 - \frac{\pi i}{n} \text{ при чем } \alpha^2 \text{ означает}$$

положительное число, весьма малое

Из условия $\alpha\beta = \pi$ следует, что

β^2 должно отличаться от $\frac{\pi}{\alpha^2}$ ^{только от $\frac{\pi i}{n\alpha^2}$}

весьма малую величину. Положим

$$\beta^2 = \beta^2 + \frac{\pi i}{n}. \text{ Тогда условие } \alpha\beta = \pi$$

даст нам: $\alpha\beta^2 - \beta^2 \frac{\pi i}{n} + \alpha^2 \frac{\pi i}{n} + \alpha^2 = \alpha\beta$

$$\text{или: } \alpha\beta^2 - \beta^2 \frac{\pi i}{n} + \alpha^2 \frac{\pi i}{n} = 0, \text{ откуда}$$

после простых преобразований найдем

$$\frac{\alpha\beta^2}{\pi\alpha^2} = \left(1 + \frac{\pi}{\alpha^2}\right)^{-1} \text{ откуда следует}$$

что $\frac{\alpha\beta^2}{\pi\alpha^2} = \alpha$ слоб. и $\frac{\alpha\beta^2}{2} \rightarrow \alpha$ стремител.

к преобли 1, когда α стремиться к преобли 0. Мы будем считать по-прежнему, $\frac{2\beta}{n\alpha} = 1 + \varepsilon$, или $2\beta = n\alpha(1 + \varepsilon)$, где $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varepsilon = 0$. Обозначим $\frac{\pi}{n}$ через ω , тогда формулу (44) можно так переписать:

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha^2 + i\omega} + e^{-4\alpha^2 + 4i\omega} + \dots + e^{-(n-1)\alpha^2 + (n-1)i\omega} \right. \\ & \quad \left. + e^{-n\alpha^2} + e^{-(n+1)\alpha^2 + i\omega} + e^{-(n+2)\alpha^2 + 2i\omega} + \dots + e^{-(2n-1)\alpha^2 + (n-1)i\omega} \right. \\ & \quad \left. + \dots \right\} \\ &= \beta^2 \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\beta^2 - \frac{n\pi i}{2}} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2 - \frac{n\pi i}{2}} + \dots \right\} \\ \text{или: } & \alpha \left\{ \frac{1}{2} + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + e^{-9\alpha^2} + \dots + \right. \\ & \quad + e^{i\omega} (e^{-\alpha^2} + e^{-(n+1)\alpha^2} + e^{-(2n+1)\alpha^2} + e^{-(3n+1)\alpha^2} + \dots) + \\ & \quad + e^{4i\omega} (e^{-4\alpha^2} + e^{-(n+2)\alpha^2} + e^{-(2n+2)\alpha^2} + e^{-(3n+2)\alpha^2} + \dots) + \\ & \quad + e^{9i\omega} (e^{-9\alpha^2} + e^{-(n+3)\alpha^2} + e^{-(2n+3)\alpha^2} + e^{-(3n+3)\alpha^2} + \dots) + \\ & \quad + \dots \left. \right\} = \\ &= \beta^2 \left\{ \frac{1}{2} + e^{-4\beta^2} + e^{-16\beta^2} + e^{-36\beta^2} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + e^{-\frac{n\pi i}{2}} (e^{-\beta^2} + e^{-9\beta^2} + e^{-25\beta^2} + \dots) \right\}. \end{aligned}$$

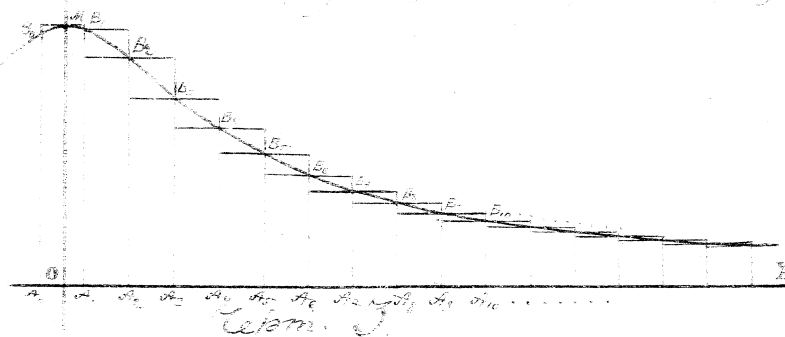
Умножив первую часть последнего равенства на $n\alpha$, а вторую на равную ей величину $2\beta(1+\varepsilon)$ и зная, что ε на $1 - \frac{1}{2}$ находит,

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ \frac{n\alpha}{2} + n\alpha(1 + e^{-n\alpha^2} + e^{-4n\alpha^2} + e^{-9n\alpha^2} + \dots) + \right. \\ & \quad + e^{i\omega} n\alpha (e^{-\alpha^2} + e^{-(n+1)\alpha^2} + e^{-(2n+1)\alpha^2} + e^{-(3n+1)\alpha^2} + \dots) + \\ & \quad + e^{4i\omega} n\alpha (e^{-4\alpha^2} + e^{-(n+2)\alpha^2} + e^{-(2n+2)\alpha^2} + e^{-(3n+2)\alpha^2} + \dots) + \\ & \quad + \dots \left. \right\} + \\ & \quad + e^{(n-1)i\omega} n\alpha (e^{-(n-1)\alpha^2} + e^{-(2n-1)\alpha^2} + e^{-(3n-1)\alpha^2} + e^{-(4n-1)\alpha^2} + \dots) \left. \right\} = \\ &= \beta^2(1+\varepsilon) \left\{ -\frac{2\beta}{\varepsilon} + 2\beta(1 + e^{-4\beta^2} + e^{-16\beta^2} + e^{-36\beta^2} + \dots) + \right. \\ & \quad \left. + e^{-\frac{n\pi i}{2}} (e^{-\beta^2} + e^{-9\beta^2} + e^{-25\beta^2} + \dots) \right\}. \end{aligned}$$

Суммы, стоящие в скобках в (7) заменим на основании следующего соображения:

Рассмотрим сумму: $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\tau_k x)} = e^{-\tau_0 x} + e^{-(\tau_0 x + \tau_1 x)} + e^{-(\tau_0 x + \tau_1 x + \tau_2 x)} + \dots = S$ $\tau_0, \tau_1, \tau_2 < 1$

Возьмем прямоугольную систему координат (черт. 3) и построим кривую



соответствующего уравнению $y = e^{-x^2}$

Так как $y' = -2xe^{-x^2}$ отрицательна для всех значений x внутри промежутка $(0, \infty)$, то $y = f(x)$ убывает в этом промежутке, кроме того легко убедиться, что y имеет максимум при $x=0$.

Проведем теперь прямые, соответствующие абсциссам $OA_0 = -\tau_0 x$, $OA_1 = -\tau_0 x - \tau_1 x$, $OA_2 = -\tau_0 x - \tau_1 x - \tau_2 x$, ... , которые пересекают кривую в точках $B_0, B_1, B_2, \dots$

Построим прямоугольники на $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$. Их высоты соответственно $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$. Сумма площадей этих прямоугольников будет равна $S + \Delta S$. Легко видеть, что эта сумма площадей ограничена кривой линией.

$A_0B_0, B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$, ограничена OM и осью OX . Площадь OMC это квадрат, равна: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Итак $S + \Delta x > \frac{1}{2}V\pi$. Строя прямоугольники

$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ с высотами

соответственно: $A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4, \dots$

легко убедиться, что: $S - \Delta x < \frac{1}{2}V\pi$

и следовательно имеем неравенства:

$\frac{1}{2}V\pi - \Delta x < S < \frac{1}{2}V\pi + \Delta x$, откуда мож-

но заключить: $S = \frac{1}{2}V\pi + \lambda \Delta x$, где

λ — положительная, или отрицательная правильная дробь. (Примечание)

Внесем это равенство в формулу (45)

получим:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{1}{2}V\pi + \lambda_1 \pi\alpha + \right. \\ \left. + e^{i\omega_1} \frac{1}{2}V\pi + e^{i\omega_1} \lambda_2 \pi\alpha + \right. \\ \left. + e^{i\omega_2} \frac{1}{2}V\pi + e^{i\omega_2} \lambda_3 \pi\alpha + \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. + e^{i(n-1)\omega_{n-1}} \frac{1}{2}V\pi + e^{i(n-1)\omega_{n-1}} \lambda_n \pi\alpha \right) = \\ = (1 + e^{\frac{\pi\alpha}{2}}) \left(-\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{1}{2}V\pi + M_1 \right) + e^{-\frac{\pi\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}V\pi + e^{-\frac{\pi\alpha}{2}} M_2 \right) \end{aligned}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, M_1, M_2$ — положительные или отрицательные правильные дроби.

Внесем полученное равенство в предыдущую формулу.

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}V\pi (1 + e^{i\omega_1} + e^{i\omega_2} + \dots + e^{i(n-1)\omega_{n-1}}) + \\ + \alpha \frac{1}{2} \cdot \pi\alpha \left(-\frac{1}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{i\omega_1} + \lambda_3 e^{i\omega_2} + \dots + \lambda_n e^{i(n-1)\omega_{n-1}} \right) = \\ = (1 + e^{\frac{\pi\alpha}{2}}) \left(\frac{1}{2}V\pi (1 + e^{-\frac{\pi\alpha}{2}}) + 2\beta \left(-\frac{1}{2} + M_1 + e^{-\frac{\pi\alpha}{2}} M_2 \right) \right) \end{aligned}$$

Сравним левую и правую части. Полученная формула

справедлива при всяком α — положительном.

Равенство с левыми частями.

она будет справедлива и в предельном

при $\alpha = 0$. Переходя к пределу при

$\alpha = 0$ получим следующее соотношение:

$$\left| -\frac{1}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{i\omega_1} + \dots + \lambda_n e^{i(n-1)\omega_{n-1}} \right| < \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) < \frac{n}{2}$$

также: $\left| -\frac{1}{2} + M_1 + e^{-\frac{\pi\alpha}{2}} M_2 \right| < \frac{1}{2} (M_1 + M_2) < 3$

наконец a обращается в $\sqrt{-\frac{2\pi i}{n}}$; b обращается в $\sqrt{\frac{n\pi i}{2}} = b_1$,
и след. формула наша принимает
такой вид:

$$\begin{aligned} a_1^2 \varphi(1, n) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{n} &= b_1^2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{n} (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}), \text{ или} \\ \varphi(1, n) &= \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}); \text{ Но } a_1 b_1 = \pi, \text{ откуда} \\ \frac{b_1}{a_1} &= \frac{\pi}{a_1^2} \text{ и след. } \varphi(1, n) = \frac{\pi^2}{a_1^2} (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}) \text{ Но:} \\ a_1^2 &= -\frac{2\pi i}{n} \text{ и } a_1 = \sqrt{-\frac{2\pi i}{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{n}} (1-i), \text{ откуда } \frac{\sqrt{n}}{a_1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\pi}{n}} (1-i)} = \frac{\sqrt{n} (1+i)}{2} \\ &\text{и следовательно окончательно:} \end{aligned}$$

$$\varphi(1, n) = \frac{\pi^2}{2} (1+i) (1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}). \text{ Подставляя}$$

в эту формулу $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$
снова приходим к формулам (18)

Обратимся ко второй части нашего исследования, т. е. к на основании свойства функции $\varphi(1, n)$, доказанного нами введем закон взаимности квадратичных вычетов.

Пусть n — простое нечетное число p . Имеем:

$$\varphi(n, p) = \sum_{s=0}^{p-1} p^{ks} = 1 + 2 \sum_{s=0}^{p-1} p^{ks} \dots \dots \dots (46)$$

В целях легко убедиться, принимая во внимание то, что $s^2 \equiv (p-s)^2 \pmod{p}$

Обратимся к перебору любой квадратичный вычет по модулю p и переберем любой квадратичный невычет его, взяв все средние числа $1, 2, \dots, p-1$. Формула (46) принимает тогда следующий вид:

$$\varphi(n, p) = 1 + 2 \sum_{s=0}^{p-1} p^{ks} \dots \dots \dots (46')$$

Но $\sum (p^{ks}) + \sum (p^{ks}) + 1$ как сумма всех корней уравнения $x^k = 1$ равна 0 и следовательно $\sum p^{ks} = -1 - \sum p^{ks}$

Принимая во внимание это равенство формулу (46') так переписываем:

$$\varphi(n, p) = \sum p^{ks} - \sum p^{ks} \text{ или умножив на } \left(\frac{s}{p}\right): \varphi(n, p) = \sum_{s=0}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) p^{ks}$$

Но $\left(\frac{ks}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right) \left(\frac{s}{p}\right)$ и следовательно:

$$\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right) \left(\frac{ks}{p}\right) \text{ и формула наша принимает такой вид: } \varphi(n, p) = \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{s=0}^{p-1} \left(\frac{ks}{p}\right) p^{ks}$$

Заменив ks на t получим по модулю p если s пробегает все возможные значения

$$ks \equiv t: \varphi(n, p) = \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{t=0}^{p-1} \left(\frac{t}{p}\right) p^t \text{ т. е. } \varphi(n, p) = \left(\frac{k}{p}\right) \varphi(1, p) \dots \dots \dots (47)$$

если $n = p$ — простое нечетное число

формулу эту выведенную нами
в предположении что $n=p$ — простое
число, можно распространить на
случай любого угодно нечетного n .
Положим сначала что $n =$
 $=$ произвольная степень простого числа
 p : $n = p^{2k+1}q$, где $q=p$ или 1 .

Имеем: $\sum_{s=0}^{2k} p^{hs^2}$

$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{2k} p^{hs^2}$. Выбрав отсюда члены
индексов, которые делятся на p^k ,
найдем тогда: $\varphi(h, n) - (1 + p^{hp^k} + p^{4hp^k} + \dots + p^{4khp^k}) p^{2k} =$
 $= \sum_{s=0}^{2k} p^{hs^2}$ для индексов s , принимающих
все значения не делящиеся на p^k .
Эти значения для s , можно соеди-
нить в группы, смотря по тому
какой остаток дает s , при делении
на $p^k q$. Группа соответствующая
остатку λ [$\lambda < p^k q$] будет:

$$1 + p^k q, \lambda + 2p^k q, \dots, \lambda + (p^k - 1)p^k q.$$

Соответственно этому будет:

$$\text{Или иначе: } \sum_{s=0}^{p^k q-1} p^{hs^2} = \sum_{\lambda=0}^{p^k q-1} \sum_{s=0}^{p^k-1} p^{h(\lambda + sp^k)^2} =$$

$$= \sum_{s=0}^{p^k-1} \sum_{\lambda=0}^{p^k q-1} p^{h\lambda^2 + 2h\lambda sp^k + h s^2 p^{2k}} = \sum_{s=0}^{p^k-1} p^{h s^2 p^{2k}} \sum_{\lambda=0}^{p^k q-1} p^{h\lambda^2 + 2h\lambda sp^k} = 0$$

$$\text{Итак } \varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{p^k q-1} p^{h s^2} = \sum_{s=0}^{p^k q-1} p^{h s^2} = \sqrt{n}$$

Если $q=1$, то $\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{p^k-1} p^{h s^2} = \sqrt{n}$
в этом случае n , как легко видеть
будет формула $4n+1$ и следовательно по
согласно формулы (18) $\varphi(1, n) = \sqrt{n}$; Кроме
того употребив символ Якоби
имеем: $\left(\frac{h}{n}\right) = 1$ и следовательно мо-
жем написать: $\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \varphi(1, n)$ т. е. сего
формула (18) распространяется и
на этот случай.

положим $q=p$, тогда:

$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{p^{k-1}} \rho^{\frac{n}{p^s}} h s^2$. Числа s разбиваем на следующие p^k групп:

$0, 1, 2, 3, \dots, p-1, p, p+1, p+2, \dots, 2p-1, \dots, p^{k-1}, p^{k-1}+1, \dots, p^{k-1}+p-1, \dots, p^{k-1}+p^2-1$

Соответственно этому будем иметь:

$$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{p^{k-1}} \sum_{s=0}^{p-1} \rho^{\frac{n}{p^s}} h (\lambda p^{k+s})^2 = \sum_{s=0}^{p^{k-1}} \sum_{s=0}^{p-1} \rho^{\frac{n}{p^s}} h s^2 p^{2k} = p^{2k} \sum_{s=0}^{p-1} \rho^{\frac{n}{p^s}} h s^2$$

Но $\rho^{\frac{n}{p^k}} = R$ — первообразный корень уравнения:

$$\lambda p = 1 \text{ и именно: } R = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Формула наша принимает вид:

$$\varphi(h, n) = p^{2k} \sum_{s=0}^{p-1} R^{h s^2} = p^{2k} \varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) \sqrt{p}$$

или употребив символы Якоби и приняв во внимание что:

$$\left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{h}{p^{2k+1}}\right) = \left(\frac{h}{n}\right) \text{ находим: } \varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \sqrt{n}$$

Итак формула (48) справедлива

если n — простое четное число, или любая степень такого числа.

Пусть теперь $n = a_1 a_2 \dots a_k$ — произведение различных взаимно простых множителей, положим:

$$b_1 = a_2 a_3 \dots a_k$$

$$b_2 = a_3 a_4 \dots a_k$$

$$b_{k-1} = a_k$$

так что $n = a_1 b_1, b_1 = a_2 b_2, \dots, b_{k-1} = a_k$.

На основании формулы (40) имеем:

$$\varphi(h, n) = \varphi\left(h \frac{n}{b_1}, b_1\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_1}, a_1\right)$$

$$\varphi\left(h \frac{n}{b_1}, b_1\right) = \varphi\left(h \frac{n}{b_1} \cdot \frac{b_1}{b_2}, b_2\right) \varphi\left(h \frac{n}{b_1} \cdot \frac{b_1}{a_2}, a_2\right) =$$

$$= \varphi\left(h \frac{n}{b_2}, b_2\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_2}, a_2\right)$$

$$\varphi\left(h \frac{n}{b_2}, b_2\right) = \varphi\left(h \frac{n}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_3}, b_3\right) \varphi\left(h \frac{n}{b_2} \cdot \frac{b_2}{a_3}, a_3\right) =$$

$$\varphi\left(h \frac{n}{b_{k-1}}, b_{k-1}\right) = \varphi\left(h \frac{n}{b_{k-1}}, a_{k-1}\right)$$

$$\varphi\left(h \frac{n}{b_{k-1}}, b_{k-1}\right) = \varphi\left(h \frac{n}{a_k}, a_k\right).$$

Перемножив почленно полу-

тогда равенства находим только:

$$(48) \quad \varphi(h, n) = \varphi\left(h \frac{n}{a_1}, a_1\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_2}, a_2\right) \varphi\left(h \frac{n}{a_3}, a_3\right) \dots \varphi\left(h \frac{n}{a_k}, a_k\right)$$

Положая все $n=1$ найдем:

$$(49) \quad \varphi(1, n) = \varphi\left(\frac{n}{a_1}, a_1\right) \varphi\left(\frac{n}{a_2}, a_2\right) \dots \varphi\left(\frac{n}{a_k}, a_k\right)$$

В равенство (48) каждый множитель ^{правый делитель} можно так преобразовать:

$$\varphi\left(h \frac{n}{a_i}, a_i\right) = \left(\frac{h \cdot \frac{n}{a_i}}{a_i}\right) \varphi(1, a_i); \text{ если только}$$

каждое a_i представляет простое

число или степень его или иначе:

$$\varphi\left(h \frac{n}{a_i}, a_i\right) = \left(\frac{h}{a_i}\right) \left(\frac{\frac{n}{a_i}}{a_i}\right) \varphi(1, a_i) = \left(\frac{h}{a_i}\right) \varphi\left(\frac{n}{a_i}, a_i\right)$$

$$\text{и следовательно: } \varphi(h, n) = \left(\frac{h}{a_1}\right) \left(\frac{n}{a_1}\right) \cdot \left(\frac{h}{a_2}\right) \left(\frac{n}{a_2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{n}{a_1}, a_1\right) \cdot \varphi\left(\frac{n}{a_2}, a_2\right)$$

$$\text{т. е. } \varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \varphi(1, n) = \text{если пользоваться}$$

символом Якоби. Следовательно

формула (47) справедлива для

любого ^{нечетного} целого n . В сод-

ержании от формулы (18) эта формула

получается путем замены найдем

$\varphi(h, n)$ для всякого целого нечетного n .

Положим теперь:

$$N = p_1 p_2 p_3 \dots p_r \quad q_1 q_2 q_3 \dots q_m = \text{произведение}$$

разных простых чисел и числа p

суть формулы $4m+1$, а числа q суть

формулы $4m+3$. Имеем по формуле (49)

$$\varphi(1, N) = \left(\frac{N}{p_1}\right) \varphi(1, p_1) \left(\frac{N}{p_2}\right) \varphi(1, p_2) \dots \left(\frac{N}{p_r}\right) \varphi(1, p_r) =$$

$$\left(\frac{N}{p_1}\right) \left(\frac{N}{p_2}\right) \dots \left(\frac{N}{p_r}\right) \varphi(1, q_1) \dots \varphi(1, q_m) =$$

$$= \left(\frac{N}{p_1}\right) \left(\frac{N}{p_2}\right) \dots \left(\frac{N}{p_r}\right) \left(\frac{N}{q_1}\right) \dots \left(\frac{N}{q_m}\right) i^m \sqrt{N}$$

По формуле: $\varphi(1, n) = i^m \sqrt{n}$

таким образом формулы $4m+1$ или

$4m+3$ смотря по тому будет ли

нечетное, или четное

субдодательно:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p}{p_2}\right)\dots\left(\frac{p}{p_m}\right) = (-1)^{m-m} \dots \dots \dots (50)$$

Но $(-1)^{m(m-1)} = +1$ если $m \equiv 0$ или $1 \pmod{4}$

$= -1$ если $m \equiv 2$ или $3 \pmod{4}$

и субдодательно $(-1)^{m-m} = (-1)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}$ где

r — остаток от деления m на 4

$$\text{субдод. } \left(\frac{p}{p_1}\right)\dots\left(\frac{p}{p_m}\right) = (-1)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \dots \dots \dots (50')$$

Из этой теоремы как следует из известной ситуации субдод. закон взаимности квадратичных вычетов именно тогда, когда произведение нечетных квадратов делится на p .

$$\left(\frac{p}{a_1}\right)\left(\frac{p}{a_2}\right) = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} = -1$$

Этот субдод. может получиться только тогда, если $m=2$, т.е.

оба числа a_1 и a_2 имеют $\chi \pmod{4} = 3$.

Субдодательно можно написать:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = (-1)^{\frac{a_2-1}{2} \cdot \frac{a_1-1}{2}}, \text{ а это равно}$$

единице при a_1 и a_2 простых и

выражаемых законами взаимности квадратичных вычетов.

Получить этот же результат

легко можно другим методом.

Вспомогательные функции: $\chi(-1, p)$ и $\chi\left(\frac{2}{p}\right)$. Имеем:

$$\chi(-1, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right) \sqrt{p}$$

$$\text{по формуле: } \chi(-1, p) = \sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{p}}$$

Субдодательно $\chi(-1, p)$ найдем

как $\chi(-1, p)$ если χ — характер в $\mathbb{Z}_p$

через (-1) т.е.

$$\chi(-1, p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{p} \text{ и следовательно}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{p}$$

$$\text{откуда } \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

Подставим теперь в формулу (40) $k=1$, $m=8$, $n=p$, найдем:

$$\varphi(8, p) \varphi(p, 8) = \varphi(1, 8p)$$

$$\text{но } \varphi(1, 8p) = (1+i) \sqrt{8p}$$

$$\varphi(p, 8) = \sum_{r=0}^7 e^{i \cdot \frac{p^2 r^2}{8}} = \sum_{r=0}^7 e^{p^2 \cdot \frac{\pi r^2}{8}} =$$

$$= 1 + e^{\frac{\pi p^2}{8}} + e^{2\pi p^2} + e^{3\pi p^2} + e^{4\pi p^2} + e^{5\pi p^2} + e^{6\pi p^2} + e^{7\pi p^2} =$$

$$= 4e^{\frac{\pi p^2}{8}}$$

$$\text{таким образом: } \varphi(8, p) = \varphi(p, 8) = \left(\frac{2}{p}\right) i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \sqrt{p}$$

$$\text{и след. } \left(\frac{2}{p}\right) i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \sqrt{p} \cdot 4e^{\frac{\pi p^2}{8}} = (1+i) \sqrt{8p}$$

$$\text{таким образом: } \left(\frac{2}{p}\right) = \frac{(1+i) \sqrt{8p}}{i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \cdot 4e^{\frac{\pi p^2}{8}}} =$$

$$= \frac{1+i}{i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \sqrt{8} \cdot e^{\frac{\pi p^2}{8}}} = \frac{e^{-\frac{\pi p^2}{8}}}{i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \sqrt{2} e^{\frac{\pi p^2}{8}}} =$$

$$= \frac{1}{i \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \sqrt{2}} = \left(\frac{2}{p}\right)$$