

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

ОБ ОДНОМ АППРОКСИМАЦИОННОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

А. В. Розов (г. Иваново)

Аннотация

Мы обобщаем результат А. Л. Шмелькина, устанавливающий почти аппроксимируемость конечными p -группами полициклических групп.

Ключевые слова: полициклическая группа, аппроксимируемость конечными p -группами, почти аппроксимируемость конечными p -группами.

ON THE RESIDUAL PROPERTY OF POLYCYCLIC GROUPS

A. V. Rozov (Ivanovo)

Abstract

We generalize the result of A. L. Shmelkin which establishes the fact that polycyclic groups are virtually residually p -finite for any prime p .

Keywords: polycyclic group, residually a finite p -group, virtually residually a finite p -group.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$ -аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p -групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемостью. Напомним, что группа G называется почти $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Финитная аппроксимируемость полициклических групп была доказана К. Гиршем в работе [1]. Вопрос об $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости полициклических групп исследован только для некоторых частных случаев, например, для конечно порожденных нильпотентных групп (см. [2]) и для сверхразрешимых групп (см. [3]). В общем же случае аппроксимируемость конечными p -группами полициклических групп не исследована.

Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемостью. А. Л. Шмелькин доказал, что произвольная полициклическая группа является почти $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой для любого простого числа p . Доказательство этого факта было приведено в работе [4]. Мы обобщаем результат А. Л. Шмелькина следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть группа G содержит конечно порожденную нормальную подгруппу H такую, что фактор-группа G/H является полициклической. И пусть p — простое число. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G , содержащейся в H , из того, что группа H/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема следует, что группа S/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.*

При $H = 1$ данная теорема совпадает с результатом А. Л. Шмелькина. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A , а через A^n — степенную подгруппу группы A , где n — целое неотрицательное число. Если A — конечная p -группа, то ее подгруппа $A'A^p$ очевидно совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A . Очевидно, что фактор-группа $A/A'A^p$ является периодической абелевой группой. Поэтому если группа A конечно порождена, то ее фактор-группа $A/A'A^p$ конечна.

ЛЕММА 1. *Пусть A — конечная p -группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы A . Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Γ является p -группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [5, с. 562]).

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B , если A — нормальная подгруппа группы G , B — подгруппа группы G , $A \cap B = 1$ и $G = AB$. Очевидно, что $G/A \cong B$, и что если A — конечная группа, то $[G : B] = |A|$.

Некоторые достаточные условия аппроксимируемости конечными p -группами расщепляемых расширений будут доказаны ниже в леммах 2 и 3. Эти леммы принадлежат Д. Н. Азарову и не опубликованы. Мы приводим эти результаты с подробными доказательствами.

ЛЕММА 2. . Пусть G — расщепляемое расширение конечной p -группы A с помощью $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы B . И пусть взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого элемента x из G через $\hat{x}$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы G , действующий по правилу: $g\hat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента g группы G . И пусть

$$Aut_B(A) = \{\hat{x}|_A : x \in B\}$$

— множество ограничений на подгруппу A всех внутренних автоморфизмов группы G , производимых элементами из B . Это множество является подгруппой в группе всех автоморфизмов группы A . Так как $[B, A] \subseteq A'A^p$, то все автоморфизмы из $Aut_B(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Следовательно, в силу леммы 1 $Aut_B(A)$ — конечная p -группа.

Пусть

$$\theta : B \rightarrow Aut_B(A)$$

— гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу b из B ограничение на подгруппу A соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\hat{b}$ группы G . И пусть $H = Ker\theta$. Так как $Aut_B(A)$ — конечная p -группа, то H — нормальная подгруппа конечного p -индекса группы B . Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p . Из последних двух обстоятельств получаем, что H — подгруппа конечного p -индекса группы G . Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, поскольку содержится в группе B . Заметим еще, что подгруппа H нормальна в группе G , поскольку она поэлементно перестановочна с подгруппой A и нормальна в подгруппе B .

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы H с помощью конечной p -группы G/H . Отсюда следует (см., напр., [2, лемма 1.5]), что группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. . Пусть G — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы A с помощью $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы B . И пусть $[B, A] \subseteq A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости группы G достаточно для каждого ее неединичного элемента g указать нормальную подгруппу N группы G , не содержащую элемент g и такую, что фактор-группа G/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Если $g \notin A$, то в качестве N можно взять A , так как $G/A \cong B$ — $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа. Если же $g \in A$, то из $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости группы A следует существование в ней нормальной подгруппы M конечного p -индекса, не содержащей g . Пусть N — пересечение всех подгрупп M^x группы G , сопряженных с M ($x \in G$). Очевидно, что подгруппа

N нормальна в группе G и $g \notin N$. Кроме того, N имеет конечный p -индекс в группе A . Действительно, все подгруппы M^x нормальны в группе A и имеют в ней индексы, совпадающие с индексом $[A : M]$. Поэтому в силу теоремы М. Холла (см., напр., [6, с. 250]) число различных подгрупп M^x конечно. Отсюда и из теоремы Ремака [7, п. 4.3.9] следует, что N — подгруппа конечного p -индекса группы A .

Заметим, что группа G/N является расщепляемым расширением конечной p -группы A/N с помощью $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы $BN/N \cong B$, причем поскольку

$$[B, A] \subseteq A'A^p,$$

то

$$[BN/N, A/N] \subseteq (A/N)'(A/N)^p.$$

Отсюда по лемме 2 следует, что группа G/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть H — конечно порожденная нормальная подгруппа группы G , и фактор-группа G/H является полициклической. Тогда существует последовательность подгрупп

$$H = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

такая, что для каждого $i = 1, \dots, r$ подгруппа G_{i-1} нормальна в G_i , и фактор-группа G_i/G_{i-1} является циклической. Пусть p — простое число. Индукцией по r покажем, что в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G , содержащейся в H , из того, что группа H/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема следует, что группа S/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Если $r = 0$, то $G = H$, и в качестве искомой подгруппы S можно взять H .

Пусть теперь $r > 0$. По индуктивному предположению в группе G_{r-1} существует нормальная подгруппа F конечного индекса, содержащая H и такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G_{r-1} , содержащейся в H , из того, что H/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема следует, что F/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. В частности, это верно для любой нормальной подгруппы N группы G , содержащейся в H . Пусть Q — пересечение всех подгрупп группы G , сопряженных с F . Тогда очевидно, что Q — нормальная подгруппа группы G , содержащая H . Поскольку группа G_{r-1} является расширением конечно порожденной группы H с помощью полициклической группы, то она сама конечно порождена. Отсюда следует, что индекс подгруппы Q в группе G_{r-1} конечен. Кроме того, для любой нормальной подгруппы N группы G , содержащейся в H , фактор-группа Q/N содержится в F/N , и поэтому из $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости H/N следует $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемость Q/N .

Если G/G_{r-1} — конечная циклическая группа, то Q имеет конечный индекс в G , и мы можем в этом случае в качестве искомой подгруппы S взять Q .

Будем теперь предполагать, что G/G_{r-1} — бесконечная циклическая группа. Тогда G/Q представляет собой расширение конечной группы G_{r-1}/Q с помощью бесконечной циклической группы G/G_{r-1} . Хорошо известно и легко проверяется, что такое расширение является расщепляемым, и поэтому G/Q содержит бесконечную циклическую подгруппу T/Q конечного индекса. Тогда T — подгруппа конечного индекса группы G , и T представляет собой расщепляемое расширение группы Q с помощью бесконечной циклической группы $X = \langle x \rangle$.

Так как группа Q представляет собой расширение конечно порожденной группы H с помощью полициклической группы, то она сама конечно порождена. Поэтому ее фактор-группа $Q/Q'Q^p$ конечна. Обозначим через n порядок группы $\text{Aut}(Q/Q'Q^p)$. Тогда сопряжение элементом x^n на подгруппе Q действует тождественно по модулю $Q'Q^p$. Поэтому

$$[X^n, Q] \subseteq Q'Q^p. \quad (*)$$

Пусть $U = QX^n$. Так как индексы $[X : X^n]$ и $[G : T]$ конечны, то подгруппа U имеет конечный индекс в группе G . Кроме того, U — расщепляемое расширение группы Q с помощью X^n . Пусть теперь N — нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H и такая, что фактор-группа H/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Тогда Q/N также $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Следовательно, фактор-группа U/N представляет собой расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы Q/N с помощью бесконечной циклической группы $X^nN/N \cong X^n$, причем из $(*)$ следует, что

$$[X^nN/N, Q/N] \subseteq (Q/N)'(Q/N)^p.$$

Поэтому в силу леммы 3 группа U/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Пусть S — пересечение всех подгрупп группы G , сопряженных с U . Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G , содержащая H . Если теперь N — нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H и такая, что H/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то U/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. А поскольку $S/N \leq U/N$, то и S/N $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hirsh K. A. On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.
2. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
3. Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p -группами // Науч. труды ИвГУ. Математика. 1999. Вып. 2. С. 8—9.

4. Шмелькин А. Л. Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
5. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
6. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
7. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.

Ивановский государственный университет.

Поступило 7.09.2013