

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 519.4

О СТРУКТУРЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРА ЭЛЕМЕНТОВ В ГРУППАХ АРТИНА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ

О. Ю. Платонова (г. Новомосковск), В. Н. Безверхний (г. Тула)

Аннотация

Описывается структура централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой.

Ключевые слова: группа Артина с древесной структурой, диаграмма, область.

O. Yu. Platonova (Novomoskovsk), V. N. Bezverkhniy (Tula)

Abstract

We described structure of an centralizer of elements in Artin groups with arboreal structure.

Keywords: Artin group with arboreal structure, diagram, area.

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = a_i a_j a_i \dots$ — слово длины m_{ij} , состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j , $i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, $m_{ij} \geq 2$ при $i \neq j$.

Каждой конечно порожденной группе Артина G соответствует конечный граф Γ^* , между вершинами которого и образующими группы можно установить соответствие такое, что если a_i и a_j являются вершинами ребра e , то ребру соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$ группы.

В графе Γ^* можно выделить максимальное дерево-граф Γ , $\Gamma \subset \Gamma^*$.

Будем говорить, что группа Артина G_Γ имеет древесную структуру, если между вершинами конечного дерева-графа Γ и образующими группы можно установить соответствие такое, что если a_i и a_j являются вершинами ребра e , то ребру соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$. То есть максимальное дерево-граф Γ соответствует группе, имеющей древесную структуру.

Тогда группа G_Γ отображается с помощью гомоморфизма ψ на группу G , т. е. $\psi : G_\Gamma \longrightarrow G$.

Пусть a_i и a_j вершины некоторого ребра e дерева-графа Γ . Группа, порожденная образующими a_i и a_j , имеет копредставление $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$. Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободной группе и равных единице в группе G_{ij} . Тогда копредставление группы G_{ij} запишем через $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$. Пусть группа G порождена более чем двумя образующими.

Тогда группа Артина с древесной структурой может быть задана представлением $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; R \rangle, R = \cup R_{ij}$. Рассмотрим свободную группу $F = \prod_{i=1}^n \langle a_i \rangle$, пусть $w \in F$, обозначим через $|w|$ длину, а через $\|w\|$ — слоговую длину слова w в группе F .

Пусть произвольное слово w не равно единице в свободной группе F и равно единице в G . Тогда на основании теоремы ван Кампена, слово w является граничной меткой связной односвязной диаграммы над R .

Введем следующие преобразования диаграммы (*):

1) Пусть области D_1, D_2 пересекаются по ребру $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, имеющей слоговую длину $\|\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)\| > 1$ и если $\|\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)\| = 1$ и $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $\varphi(\partial D_2) \in G_{ab}$, тогда, стирая это ребро, объединяем D_1 и D_2 в одну область D . Если метка полученной области D равна единице в свободной группе F , то удалив эту область, склеиваем ее границу.

2) Если две области D_1, D_2 , где $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $\varphi(\partial D_2) \in G_{ab}$, имеют общую вершину, то, разъединив эту вершину, они объединяются в одну область D и, если метка полученной области D равна единице в свободной группе F , то удалив эту область, склеиваем ее границу. Если же метка не равна единице, но сократима, то проводим сокращения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем внутренней точку v диаграммы специально особой точкой, если $d(v) \geq 3$ и все ребра, исходящие из нее, являются степенями одного образующего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Внутренняя точка диаграммы, не являющаяся специально особой и имеющая степень не менее 3, называется особой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Область D назовем деновской, если $i(D) < \frac{1}{2}d(D)$, где $i(D)$ — число внутренних ребер, $d(D)$ — число ребер в граничном цикле для D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Область с граничным контуром $e\gamma e^{-1}\delta$, склеенная по ребру e и с меткой из R назовем $S - i$ областью.

Рассмотрим произвольное слово $w \in G$, G — группа Артина с древесной структурой. Пусть произвольное слово w не равно единице в свободной группе F и равно единице в G . Тогда на основании теоремы ван Кампена, слово w является меткой связной односвязной диаграммы M над R . Рассмотрим граничную область D карты M . Обозначим через γ внешнюю границу диаграммы M . Если D является деновской областью, то $\|\partial D \cap \gamma\| > \|\partial D \setminus (\partial D \cap \gamma)\|$.

Удаление деновской области D диаграммы M , то есть удаление ее граничного пути, называется *деновским сокращением* диаграммы M или *R -сокращением*. Будем говорить, что M является *R -приведенной*, если она не содержит деновских областей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Слово $w \in G$, G — группа Артина с древесной структурой, называется *R -приведенным*, если w свободно приведено в F и не содержит подслово s , являющееся подсловом некоторого соотношения r , $r = s \cdot t$, где $\|s\| > \frac{1}{2}\|r\|$. Назовем w *циклически R -приведенным*, если все его циклические перестановки являются R -приведенными словами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. [4] Пусть связная односвязная R -диаграмма M с граничной меткой w , где w не равно единице в свободной группе F и равно единице в G , не содержит $S - i$ областей, тогда она и не содержит внутренней особой точки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. [4] Пусть связная односвязная R -диаграмма M с граничной меткой $w \in G$, не равной единице в свободной группе F и равной единице в G , не содержит $S - i$ областей, но содержит конечное число специально особых точек, тогда на внешнюю границу выходят как минимум три деновские области.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. [4] Связная односвязная R -диаграмма M не содержит $S - i$ области.

СЛЕДСТВИЕ 1. [4] Пусть связная односвязная диаграмма M с граничной меткой w , где слово w — циклически приведенное слово, не равное единице в свободной группе F , и равное единице в G , не содержит специально особых точек, то она не содержит и особых внутренних точек.

Из предложений 1,2 и следствия 1 следует, что диаграмма M является однослойной.

ТЕОРЕМА 1. [4] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема равенства слов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. [4] Пусть G — конечно порожденная группа Артина с древесной структурой. Слова v и w , слоговая длина каждого из которых равна единице в группе Артина G , сопряжены тогда и только тогда, когда существует ломанная, состоящая из ребер дерева-графа, которая соединяет вершины, соответствующие данным образующим группы, и каждому из ребер выделенного пути соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера.

ТЕОРЕМА 2. [4] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.

ЛЕММА 1. [3] Группа Артина G_{ij} при $m_{ij} = 2k + 1$ изоморфна группе $\langle x, y; x^{2k+1} = y^2 \rangle$, а при $m_{ij} = 2k$ — группе $\langle t, x; txt^{-1} = x^k \rangle$.

ЛЕММА 2. [3] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$ — группа Артина и слово $w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$ и равно единице в G_{ij} . Тогда при $m_{ij} = 2k + 1$ имеет вид

- а) $a_i^m a_j a_i \dots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо
 б) $a_i a_j a_i \dots a_i a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные;
 а при $m_{ij} = 2k, k > 1$
 а') $a_i^m a_j \dots a_i a_j a_i^{-m} a_j^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо
 б') $a_i a_j \dots a_i a_j^m a_i^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные, $m \in \{Z \setminus \{0\}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$ образует полосу в R -приведенной диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, где γ есть путь $A'B'$, δ — $A'A_1B_1B'$, $AB = \partial \Pi \cap \gamma$, $A_1B_1 = \partial \Pi \cap \delta$ (Рис.1), если

1. $\forall i, i = 1, \dots, n-1 : \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$ где e_i — ребро;
2. $\forall i, i = 1, \dots, n : \partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$ где γ_i — связный путь, причем $|\gamma_i| \geq 1$;
3. $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \setminus (\partial D_1 \cap \gamma)| + |\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \setminus (\partial D_n \cap \gamma)|$;
4. $\forall j, j = 2, \dots, n-1 : |\partial D_j \cap \gamma| + 2 = |\partial D_j \setminus (\partial D_j \cap \gamma)|$.

В слове w есть $\bar{R}$ -сокращение, если в приведенной диаграмме M , граничной меткой которой является слово w , содержится полоса. При этом подслово $\varphi(AB)$ слова w , соответствующее пути γ заменяется словом $\varphi(AA_1B_1B)$ в приведенной диаграмме M .

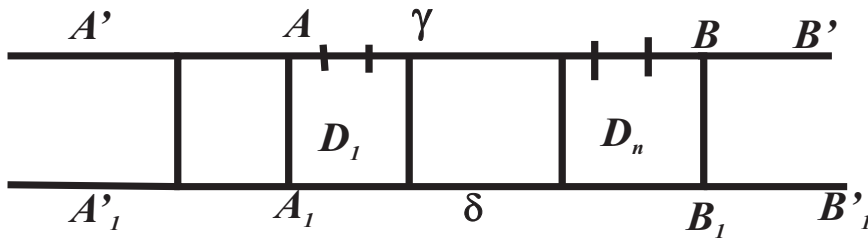


Рис.1 $\bar{R}$ -сокращение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Слово u называется циклически $\bar{R}$ -несократимым, если любая его циклическая перестановка u^* не содержит $\bar{R}$ -сокращения.

ЛЕММА 3. [3] Пусть M — связная односвязная $R, \bar{R}$ приведенная кольцевая диаграмма над группой G_{ij} , γ, δ — граничные циклы M и $\varphi(\gamma) = x^p$. Тогда $\varphi(\delta) = y^p$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}\}$

ТЕОРЕМА 3. [5] *Группа Артина с древесной структурой свободна от кручения.*

ЛЕММА 4. [6] *Существует алгоритм, строящий по любому циклически несократимому в свободной группе и не равному 1 в группе G слову w циклически $R, \bar{R}$ -несократимое слово w_0 , сопряженное с w в группе G . [6] Существует алгоритм, строящий по любому несократимому слову w сопряженное с ним или с его квадратом в группе Артина с древесной структурой слово w_0 , любая степень которого $R, \bar{R}$ -несократима.*

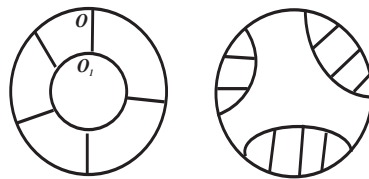


Рис.2 $\bar{R}$ Кольцевые диаграммы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Область D назовем областью первого типа, если $\|\partial D \cap \gamma\| = \|\partial D \cap \delta\|$, где $d(D) = \|\partial D \cap \gamma\| + \|\partial D \cap \delta\| + 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Область D назовем областью второго типа, $\|\partial D \cap \gamma\| + 2 = \|\partial D \cap \delta\|$, где $d(D) = \|\partial D \cap \gamma\| + \|\partial D \cap \delta\| + 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Область D назовем областью третьего типа, $\|\partial D \cap \gamma\| = \|\partial D \cap \delta\| + 2$, где $d(D) = \|\partial D \cap \gamma\| + \|\partial D \cap \delta\| + 2$.

Рассмотрим связную кольцевую приведенную R -диаграмму M сопряженности слов v и w . Пусть $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$, где γ — внешняя граница диаграммы M , а δ — внутренняя.

Предположим, что диаграмма состоит из областей первого типа и одной области второго (или третьего) типа. Тогда $\|v\| = \|w\| + 2$, или наоборот $\|w\| = \|v\| + 2$. В этом случае переход с помощью сопряжения от слова с большей слоговой длиной к слову с меньшей слоговой длиной назовем *кольцевым сокращением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Циклически R и $\bar{R}$ -несократимое слово w в группе Артина G назовем *тупиковым*, если к нему нельзя применить кольцевое сокращение.

ЛЕММА 5. [7] Пусть w, v — тупиковые слова из G и пусть w, v сопряжены в G . Тогда $\|w\| = \|v\|$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $\|u\| < \|v\|$ не сопряжено с v .

ЛЕММА 6. [7] Пусть G — конечно порожденная группа Артина с древесной структурой, с множеством образующих $A, |A| < \infty$. И пусть $w \in G$, w — R и $\overline{R}$ -несократимое слово не равное единице в G . Слово w равно некоторому слову $v \in G_j$, где G_j — параболическая подгруппа группы G с множеством образующих $A_j, |A_j| > 1, A_j \subset A$. Тогда w — слово на образующих A_j .

ЛЕММА 7. [7] Пусть G — конечно порожденная группа Артина с древесной структурой, с множеством образующих $A, |A| < \infty$. И пусть $w \in G$, $\|w\| > 1$, w — циклически R и $\overline{R}$ -несократимое, тупиковое слово не равное единице в G . Слово w сопряжено некоторому слову $v \in G_j$, то есть существует слово $z \in G$ такое, что $z^{-1}wz = v$, G_j — параболическая подгруппа группы G с множеством образующих $A_j, |A_j| > 1, A_j \subset A$. Тогда w, z — слова на образующих A_j , $C_G(w) = C_{G_j}(w)$ где $C_G(w)$ — централизатор элемента w в группе G , $C_{G_j}(w)$ — централизатор элемента w в параболической подгруппе G_j .

ТЕОРЕМА 4. [7] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности, т. е. существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $w, v \in G$ установить существуют ли натуральные числа m и n , и элемент z такие, что $z^{-1}w^mz = v^n$.

Каждому образующему группы Артина G соответствует вершина в связном дерево-графе. Зафиксируем вершину, соответствующую некоторому образующему a_i группы Артина G . Выделим в дерево-графе все возможные связные пути с началом в вершине a_i . Обозначим через $\tau(i, j)$ связный путь, соединяющий в графе вершину a_i с вершиной a_j . Тогда $\tau(i, j) = e_1e_2 \dots e_t$, где e_s — ребро в дерево-графе, $s = \overline{1, t}, t < \infty$.

Рассмотрим два пути $\tau(i, j)$ и $\tau(j, k)$, и определим для них операцию умножения следующим образом: пусть $\tau(i, j) = e_1e_2 \dots e_t$ и $\tau(j, k) = e_{t+1}e_{t+2} \dots e_r$, причем $\omega(e_t) = a_j = \alpha(e_{t+1})$, тогда $\tau(i, j) * \tau(j, k) = \tau(i, k)$, где $\tau(i, k)$ — связный путь, соединяющий вершины a_i, a_k , такой, что $\tau(i, k) = e_1e_2 \dots e_te_{t+1} \dots e_r$.

Определим для пути $\tau(i, j) = e_1e_2 \dots e_t$ обратный путь: $\tau^{-1}(i, j) = \tau(j, i) = e_t^{-1}e_{t-1}^{-1} \dots e_2^{-1}e_1^{-1}$.

Каждому ребру e_s в дерево-графе соответствует число m_{ij} симметрической матрицы Кокстера для данной группы. Если число m_{ij} нечетно, то образующие, соответствующие вершинам ребра e_s , сопряжены в группе Артина G_{ij} . Если m_{ij} четно, то образующие, соответствующие вершинам ребра e_s не сопряжены в G_{ij} . При этом каждый образующий сопряжен с самим собой частью определяющего соотношения, соответствующего данному ребру. Действительно, пусть $\alpha(e_s) = a_i, \omega(e_s) = a_j$, ребру e_s соответствует соотношение $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$. Тогда, если число m_{ij} нечетно, то образующий a_i переходит в образующий a_j при помощи сопряжения словом $z \in G_{ij}$ четной слоговой длины $\|z\| = m_{ij} - 1$, причем z имеет вид $z = a_j a_i \dots a_i$. Если же m_{ij} четно, то образующий a_i переходит в a_i при помощи сопряжения словом $z \in G_{ij}$ нечетной слоговой длины

$\|z\| = m_{ij} - 1$, причем z имеет вид $z = a_j a_i \dots a_j$. Каждому ребру e_s в дерево-графе, имеющему нечетное число m_{ij} , поставим в соответствие $\varphi(e_s) = z = a_j a_i \dots a_i, z \in G_{ij}, \|z\| = m_{ij} - 1$, а ребру с четным m_{ij} поставим в соответствие $\varphi(e_s) = z^q = (a_j a_i \dots a_j)^q, z \in G_{ij}, \|z\| = m_{ij} - 1, q \in Z$.

Обозначим E — множество ребер графа T , Z^* — множество слов из подгруппы вида G_{ij} , слоговая длина которых равна $m_{ij} - 1$.

Рассмотрим множество P связных подпутей вида $\tau(i, j)$ с началом в вершине a_i таких, что если $\tau(i, j) = e_1 e_2 \dots e_t, t \geq 2$, то ребрам $e_s, s = \overline{1, t-1}$ соответствуют нечетные числа матрицы Кокстера m_{ij} , а ребру e_t — четное. Если длина пути $\tau(i, j)$ равна единице, то есть $\tau(i, j) = e_1$, то путь $\tau(i, j)$ будет принадлежать множеству P лишь в том случае, если ребру e_1 соответствует четное число Кокстера m_{ij} . Таким образом, множеству P принадлежат минимальные пути $\tau(i, j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Ребро e_i дерево-графа назовем замыкающим ребром некоторого пути, если ему соответствует четное число Кокстера.

Разобьем каждый путь $\tau(i, j) = e_1 e_2 \dots e_t$ из множества P , длина которого больше единицы на два подпути следующим образом: $\tau(i, x)$ — подпуть, соединяющий вершины a_i и a_x , состоящий из ребер $\tau(i, x) = e_1 e_2 \dots e_{t-1}$, каждому из которых соответствует нечетное число Кокстера; $\tau(x, j)$ — подпуть, состоящий из одного замыкающего ребра e_t , которому соответствует четное число Кокстера.

Множеству P принадлежат все связные минимальные пути $\tau(i, j)$, исходящие из одной вершины, при этом последнее ребро каждого пути является замыкающим. Таким образом, все пути, принадлежащие множеству P , образуют дерево-граф $\tilde{T}$. Подвергнем граф $\tilde{T}$ следующему преобразованию: пусть e_s — замыкающее ребро некоторого пути дерева-графа $\tilde{T}$ такое, что $\alpha(e_s) = a_i, \omega(e_s) = a_j$. Положим $\omega(e_s) = a_i$, ребро e_s переобозначим e_{ij} , а путь, соответствующий ребру e_s , через $\tau(i, j, i)$. Применим данное преобразование ко всем замыкающим ребрам дерева-графа $\tilde{T}$. В результате получим новый связный граф T , в котором каждая «ветка» заканчивается «петлей».

Каждому пути $\tau(i, j)$ из множества P такому, что $|\tau(i, j)| > 1$ поставим в соответствие путь $\tau_{ij} = \tau(i, x) * \tau(x, j, x) * \tau(x, i)$. Если $|\tau(i, j)| = 1$, то $\tau_{ij} = \tau(i, j, i)$. Ясно, что каждый подпуть τ_{ij} также связан, при этом $\alpha(\tau_{ij}) = \omega(\tau_{ij}) = a_i$. Множество всех таких путей τ_{ij} обозначим через P_τ .

Определим умножение на множестве E ребер, следующим образом: пусть e_s и e_{s+1} ребра, принадлежащие графу T такие, что $\omega(e_s) = \alpha(e_{s+1})$, тогда можно рассматривать произведение ребер e_s и e_{s+1} как связный путь. Пусть $\tau(i, j) = e_1 e_2 \dots e_t$ — связный путь, где ребрам $e_1 e_2 \dots e_{t-1}$ соответствуют нечетные числа m_{ij} , а ребру e_t — четное m_{ij} , тогда $\varphi(\tau(i, j)) = \varphi(e_1 e_2 \dots e_t) = \varphi(e_1) \varphi(e_2) \dots \varphi(e_t) = z_1 z_2 \dots z_t^q$, где $\varphi(e_s) = z_s, s = \overline{1, t-1}, \varphi(e_t) = z_t^q, q \in Z$. При этом $\varphi(\tau(j, i)) = z_t^{-q} \dots z_1^{-1}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_{ij}) &= \varphi(\tau(i, x)\tau(x, j, x)\tau(x, i)) = \\ &= \varphi(e_1 e_2 \dots e_{t-1} e_{xj} e_{t-1}^{-1} \dots e_2^{-1} e_1^{-1}) = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_{xj}^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1},\end{aligned}$$

если $|\tau(i, j)| > 1$; и $\varphi(\tau_{ij}) = \varphi(\tau(i, j, i)) = \varphi(e_{ij}) = z_{ij}^q$, если $|\tau(i, j)| = 1$. Таким образом, каждому пути τ_{ij} из множества P_τ в группе Артина G будет соответствовать циклически сократимое слово вида $\tilde{z}_r = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_{xj}^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1}$, где каждые z_i принадлежат подгруппе вида G_{ij} , $z_{xj} \in G_{xj}$, $\|z_i\| = m_{ij} - 1$, $\|z_{xj}\| = m_{xj} - 1$, $q \in Z$, $i = \overline{1, t-1}$. Множество слов вида $\tilde{z}_r$ обозначим Z_r , $r < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Слоговой длиной слова $\tilde{z}_r \in Z_r$ назовем количество ребер соответствующего пути τ_{ij} , и обозначим через $\|\tilde{z}_r\|$.*

В соответствии с этим определением, если путь τ_{ij} состоит из t ребер, то слоговая длина $\|\tilde{z}_r\| = t$. С другой стороны каждому пути τ_{ij} соответствуют подслова из подгрупп вида G_{ij} . Таким образом, слоговая длина слова $\tilde{z}_r$ равна количеству его подслов из подгрупп G_{ij} . Например, если

$$\tilde{z}_r = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_{xj}^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1},$$

то $\|\tilde{z}_r\| = 2(t-1) + 1 = 2t-1$.

ЛЕММА 8. *Пусть $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n \in Z_r$, $\|\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 \dots \tilde{z}_n\| > \|\tilde{z}_i\|$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2$.

Случай 1. $\|\tilde{z}_1\| = 1$, $\|\tilde{z}_2\| = 1$. Тогда слову $\tilde{z}_1$ соответствует путь τ_{ij} , а слову $\tilde{z}_2$ — путь τ_{ik} , причем каждый из путей состоит из одного замыкающего ребра, $\alpha(\tau_{ij}) = \alpha(\tau_{ik}) = a_i$. Тогда слово $\tilde{z}_1$ имеет вид $\tilde{z}_1 = (a_j a_i \dots a_j)^{q_1}$, а слово $\tilde{z}_2 = (a_k a_i \dots a_k)^{q_2}$, $q_1, q_2 \in Z$.

Рассмотрим произведение

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 = (a_j a_i \dots a_j)^{q_1-1} a_j a_i \dots a_j a_k a_i \dots a_k (a_k a_i \dots a_k)^{q_2-1}.$$

Слова $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ являются R -несократимыми. Предположим, что сокращение возможно на стыке слов. Тогда в представлении группы должно быть соотношение, содержащее образующие a_j и a_k , что невозможно, так как в этом случае в дерево-графе выделится петля. По этой же причине к слову $\tilde{z}_1 \tilde{z}_2$ не применимо $\overline{R}$ -сокращение.

Случай 2. $\|\tilde{z}_1\| > 1$, $\|\tilde{z}_2\| > 1$. Тогда слову $\tilde{z}_1$ соответствует путь τ_{ij} , а слову $\tilde{z}_2$ — путь τ_{ik} . Если пути τ_{ij} , τ_{ik} не имеют общих точек кроме вершины a_i , то проводим рассуждения, аналогичные случаю 1, то есть произведение $\tilde{z}_1 \tilde{z}_2$ является $R, \overline{R}$ -несократимым. При этом $\|\tilde{z}_1 \tilde{z}_2\| = \|\tilde{z}_1\| + \|\tilde{z}_2\|$.

Предположим теперь, что пути τ_{ij} и τ_{ik} имеют общий подпуть $\tau(i, b) = e_1 \dots e_l$, $|\tau(i, b)| < \frac{1}{2} \min\{|\tau_{ij}|, |\tau_{ik}|\}$. Пусть

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= e_1 e_2 \dots e_l e_{l+1} \dots e_{t-1} e_{xj} e_{t-1}^{-1} \dots e_{l+1}^{-1} e_l^{-1} \dots e_2^{-1} e_1^{-1}, \\ \tau_{ik} &= e_1 e_2 \dots e_l \bar{e}_{l+1} \dots \bar{e}_{s-1} \bar{e}_{yk} \bar{e}_{s-1}^{-1} \dots \bar{e}_{l+1}^{-1} e_l^{-1} \dots e_2^{-1} e_1^{-1}.\end{aligned}$$

Тогда произведение $\tau_{ij}\tau_{ik}$ после сокращения будет иметь вид:

$$\tau_{ij}\tau_{ik} = e_1 e_2 \dots e_l e_{l+1} \dots e_{t-1} e_{xj} e_{t-1}^{-1} \dots e_{l+1}^{-1} \bar{e}_{l+1} \dots \bar{e}_{s-1} \bar{e}_{yk} \bar{e}_{s-1}^{-1} \dots \bar{e}_{l+1}^{-1} e_l^{-1} \dots e_2^{-1} e_1^{-1}$$

Полученный путь является связным и несократимым.

Теперь рассмотрим произведение слов $\tilde{z}_1 \tilde{z}_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= z_1 z_2 \dots z_l z_{l+1} \dots z_{t-1} z_{xj}^{q_1} z_{t-1}^{-1} \dots z_{l+1}^{-1} z_l^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1}, \\ \tilde{z}_2 &= z_1 z_2 \dots z_l \bar{z}_{l+1} \dots \bar{z}_{s-1} \bar{z}_{yk}^{q_2} \bar{z}_{s-1}^{-1} \dots \bar{z}_{l+1}^{-1} z_l^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1}, \\ \tilde{z}_1 \tilde{z}_2 &= z_1 z_2 \dots z_l z_{l+1} \dots z_{t-1} z_{xj}^{q_1} z_{t-1}^{-1} \dots z_{l+1}^{-1} \bar{z}_{l+1} \dots \bar{z}_{s-1} \bar{z}_{yk}^{q_2} \bar{z}_{s-1}^{-1} \dots \bar{z}_{l+1}^{-1} z_l^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1} \end{aligned}$$

Слова $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ являются $R, \bar{R}$ -несократимыми, так как состоят из подслов, принадлежащих подгруппам вида G_{ij} , длины которых меньше половины определяющих соотношений. После проведения свободных сокращений в слове $\tilde{z}_1 \tilde{z}_2$ $R, \bar{R}$ -сокращения могут быть только на стыке слов, но вследствие рассуждений, аналогичных случаю 1, можно заключить, что полученное слово $R, \bar{R}$ -несократимо.

Таким образом, $\|\tilde{z}_1 \tilde{z}_2\| > \|\tilde{z}_i\|, i = 1, 2$.

Далее по индукции можно показать, что $\|\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 \dots \tilde{z}_n\| > \|\tilde{z}_i\|, i = \overline{1, n}, n \geq 2$.

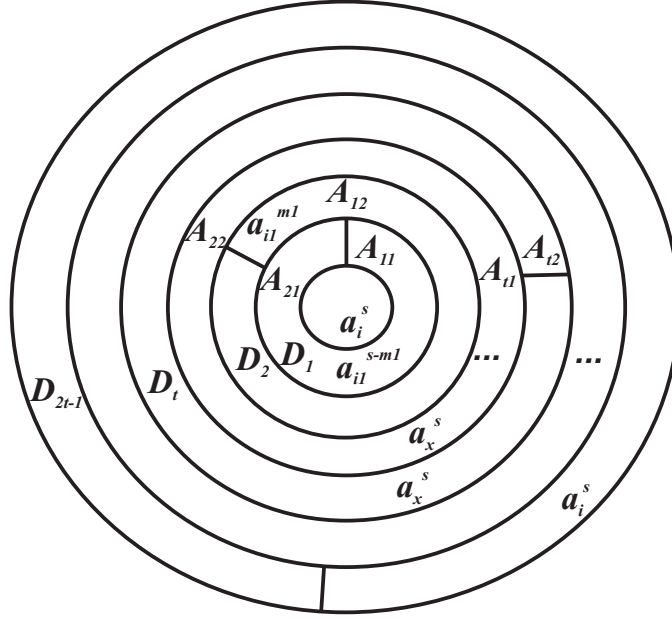
ТЕОРЕМА 5. Пусть G — конечно порожденная группа Артина с древесной структурой; слово $w \in G$ такое, что $\|w\| = 1$, то есть $w = a_i^s, i = \overline{1, n}$. Тогда централизатор элемента w есть подгруппа вида $C(w) = \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_l, a_i \rangle$, где $\tilde{z}_r$ слова вида:

$$\tilde{z}_r = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_{0r}^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1} \quad (1)$$

где $z_k \in G_{ij}$, подслово z_{0r}^q соответствует замыкающему ребру и $\|z_k\| = m_{ij} - 1, \|z_{0r}\| = m_{sl} - 1, q \in Z, k = \overline{1, t-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество P_τ состоит из путей $\tau_{ij} = \tau(i, x) * \tau(x, j, x) * \tau(x, i), \alpha(\tau_{ij}) = \omega(\tau_{ij}) = a_i$. Так как путь $\tau(i, x)$ состоит из ребер, каждому из которых соответствует нечетное число Кокстера, то образующий a_i сопряжен с образующим a_x . Пути $\tau(x, j, x)$ соответствует замыкающее ребро, значит образующий a_x переходит в себя. Путь $\tau(x, i) = \tau^{-1}(i, x)$, следовательно, образующий a_x переходит в образующий a_i . Таким образом, слово, соответствующее пути τ_{ij} , переводит образующий a_i в себя. Рассмотрим диаграмму M сопряженности a_i^s и a_i^s , состоящую из $S - i$ областей, $|M| = 2t - 1, \varphi(\delta) = \varphi(\gamma) = a_i^s$, где δ, γ — внутренняя и внешняя границы соответственно. Обозначим $\delta = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2t-1}$ — внутренние границы областей $D_1, D_2, \dots, D_{2t-1}$ соответственно, а $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2t-1}$ — внешние контуры этих областей. Каждой $S - i$ области диаграммы M соответствует ребро дерево-графа группы G .

1. Рассмотрим путь $\tau(i, x) = \tau(i, i_1) * \tau(i_1, i_2) * \dots * \tau(i_{t-2}, x)$, где каждому $\tau(i_k, i_{k+1}), k = \overline{1, t-2}$ соответствует ребро дерево-графа с нечетным числом Кокстера.

Рис.3 Диаграмма сопряженности a_i^s и a_i^s .

Путь $\tau(i, i_1)$ содержит ребро e_1 с нечетным m_{ii_1} , которому соответствует $S - i$ область D_1 диаграммы M (рис.3), $\varphi(\delta_1) = a_i^s$, $\varphi(\gamma_1) = a_{i_1}^s$ (лемма 3). Рассмотрим определяющее соотношение для m_{ii_1} : $a_i^s a_{i_1} a_i \dots a_{i_1} a_i = a_{i_1} a_i \dots a_i a_{i_1}^s$, $z_1 = a_{i_1} a_i \dots a_i$, тогда $z_1^{-1} a_i^s z_1 = a_{i_1}^s$, $z_1^{-1} a_i^s z_1 = a_{i_1}^{m_1} a_{i_1}^s a_{i_1}^{-m_1}$, $a_{i_1}^{-m_1} z_1^{-1} a_i^s z_1 a_{i_1}^{m_1} = a_{i_1}^s$. Таким образом, образующий a_i переходит в образующий a_{i_1} при помощи сопряжения словом $z_1' = z_1 a_{i_1}^{m_1}$. Слово $z_1 a_{i_1}^{m_1}$ соответствует пути $A_{11} A_{12} \cup A_{12} A_{21}$ в диаграмме M , где $m_1 \in \mathbb{Z}$.

Проводим аналогичные рассуждения для путей $\tau(i_1, i_2), \dots, \tau(i_{t-2}, x)$, получаем $a_{i_1} \sim a_{i_2}, a_{i_2} \sim a_{i_3}, \dots, a_{i_{t-2}} \sim a_x$, при этом любые два образующие $a_{i_{k-1}}$ и a_{i_k} сопряжены словом $z_k' = z_k a_{i_k}^{m_k}$, являющимся меткой пути $A_{(k-1)1} A_{(k-1)2} \cup A_{(k-1)2} A_{k1}$.

Таким образом, пути $\tau(i, x)$, переводящим образующий a_i в a_x , соответствует подслово вида $z_1 a_{i_1}^{m_1} z_2 a_{i_2}^{m_2} \dots z_{t-1} a_x^{m_x}$, где $m_i \in \mathbb{Z}, m_x \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, t-2}$.

2. Путь $\tau(x, j, x)$ содержит ребро с четным числом Кокстера $m_{i_t x}$, которому соответствует $S - i$ область D_t диаграммы M , $\varphi(\delta_t) = \varphi(\gamma_t) = a_x^s$. Рассмотрим определяющее соотношение для $m_{i_t x}$: $\underbrace{a_{i_t} a_x \dots a_{i_t}}_{z_0} a_x = a_x \underbrace{a_{i_t} a_x \dots a_{i_t}}_{z_0}$, тогда

$z_0^q = a_x^{-s} z_0^q a_x^s$, где $q = 1$. Значит образующий a_x переходит в себя при помощи сопряжения словом z_0^q , которому соответствует путь $A_{t1} A_{t2}$ в диаграмме M .

3. Путь $\tau(x, i) = \tau^{-1}(i, x)$, следовательно, проводя аналогичные рассуждения как и на 1 шаге, образующий a_x сопряжен с a_i словом

$$a_x^{-m'_x} z_{t-1}^{-1} a_{t-2}^{-m'_{t-2}} \dots a_{i_2}^{-m'_{i_2}} z_2^{-1} a_{i_1}^{-m'_{i_1}} z_1^{-1}, \quad m'_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, t-1}.$$

Таким образом, слова a_i^s и a_i^s сопряжены словом

$$z' = z_1 a_{i_1}^{m_1} z_2 a_{i_2}^{m_2} \dots z_{t-1} a_x^{m_x} z_0^q a_x^{-m'_x} z_{t-1}^{-1} \dots a_{i_2}^{-m'_2} z_2^{-1} a_{i_1}^{-m'_1} z_1^{-1}, \quad (2)$$

являющимся меткой пути $\varphi(z') = \varphi(A_{11}A_{12} \cup A_{12}A_{21} \cup \dots \cup A_{(t-1)2}A_{t1} \cup \dots \cup A_{(2t-1)1}A_{(2t-1)2})$, где $m_i \in Z, m_x \in Z, m'_i \in Z, m'_x \in Z, i = \overline{1, t-1}$ в диаграмме M .

Проведем следующие преобразования, сделаем вставки члена $z_{t-1}^{-1}z_{t-1}$ в (2), получим:

$z' = z_1 a_{i_1}^{m_1} z_2 a_{i_2}^{m_2} \dots z_{t-1} a_x^{m_x} \overline{z_{t-1}^{-1}z_{t-1}} z_0^q \overline{z_{t-1}^{-1}z_{t-1}} a_x^{-m'_x} z_{t-1}^{-1} \dots a_{i_2}^{-m'_2} z_2^{-1} a_{i_1}^{-m'_1} z_1^{-1}$. Учитывая, что $z_{t-1} a_x^{m_x} z_{t-1}^{-1} = a_{t-2}^{m_x}$ и $z_{t-1} a_x^{-m'_x} z_{t-1}^{-1} = a_{t-2}^{-m'_x}$, получим

$$z' = z_1 a_{i_1}^{m_1} z_2 a_{i_2}^{m_2} \dots z_{t-2} a_{t-2}^{m_{t-2}+m_x} z_{t-1} z_0^q z_{t-1}^{-1} a_{t-2}^{-m'_{t-2}-m'_x} z_{t-2}^{-1} \dots a_{i_2}^{-m'_2} z_2^{-1} a_{i_1}^{-m'_1} z_1^{-1}.$$

Вставляя последовательно члены вида $z_i^{-1}z_i$, $i = \overline{t-2, 1}$, получим в итоге $z' = a_i^{m_1+m_2+\dots+m_{t-2}+m_x} z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_0^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1} a_i^{-(m'_1+m'_2+\dots+m'_{t-2}+m'_x)}$. Тогда, учитывая $a_i^s z' = z' a_i^s$, имеем

$$\begin{aligned} a_i^{s+\sum m_i} z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_0^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1} a_i^{-\sum m'_i} &= \\ &= a_i^{\sum m_i} z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_0^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1} a_i^{-\sum m'_i+s}. \end{aligned}$$

Так как централизатору принадлежит a_i , то принадлежит и

$$\tilde{z}_r = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_0^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1}$$

Заметим, что диаграмма M сопряженности слов a_i^s и a_i^s примет вид такой, что, если e_i и e_{i+1} — два последовательных ребра, соответствующие $S-i$ областям D_i и D_{i+1} , то $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1}), i = \overline{1, t-1}$.

Покажем теперь, что произвольное слово, принадлежащее централизатору слова единичной слоговой длины представимо в виде (1).

Пусть $w = a_i^s, z \in C(w)$, то есть выполнено равенство $z a_i^s z^{-1} = a_i^s$.

Поставим в соответствие слову z путь $p = e_1 e_2 \dots e_t$, где $e_1, e_2, \dots, e_t$ — ребра дерево-графа. Заметим, каждому ребру e_k , у которого $\alpha(e_k) = a_h, \omega(e_k) = a_f$, имеющему нечетное число m_{hf} , соответствует слово вида $z_k = a_f a_h \dots a_h$. При этом $\alpha(p) = \alpha(e_1) = \omega(p) = \omega(e_t) = a_i$. Среди ребер $e_1, e_2, \dots, e_t$ есть хотя бы одно ребро e_k с четным числом Кокстера (так как в противном случае выделится петля в дерево-графе), которому соответствует слово вида $z_k^q, q \in Z$.

Если длина пути $p = 1$, то, очевидно, что слово z имеет требуемый вид. Пусть $|p| = t$ и пусть e_i — ребро, которому соответствует четное число Кокстера. Тогда преобразуем путь p следующим образом:

$$p = e_1 e_2 \dots e_i (e_{i-1}^{-1} \dots e_1^{-1} e_1 e_2 \dots e_{i-1}) e_{i+1} \dots e_t,$$

где $e_{i-1}^{-1} \dots e_1^{-1}$ — кратчайший путь до вершины, соответствующей образующему a_i , не содержащий взаимно обратных ребер. В результате данных преобразований получим путь p_0 , который будет иметь вид:

$$p_0 = (e_1 e_2 \dots e_i e_{i-1}^{-1} \dots e_1^{-1}) e_1 \dots e_{i-1} e_{i+1} \dots e_t.$$

При этом $\varphi(e_1 e_2 \dots e_i e_{i-1}^{-1} \dots e_1^{-1}) = \tilde{z}_1$, где $\tilde{z}_1$ имеет требуемый вид. Рассмотрим путь $p_1 = e_1 e_2 \dots e_{i-1} e_{i+1} \dots e_t$, при этом $|p_1| < |p|$. Таким образом, из индуктивного предположения о том, что $\varphi(p_1)$ имеет требуемый вид, следует, что слово $\varphi(p) = z$ представимо в виде (1).

Обозначим через $C_w(w)$ централизатор элемента w , полученный из $C(w)$ вычеркиванием порождающих слова w .

ЛЕММА 9. Пусть G — конечно порожденная группа Артина с древесной структурой; слово $w \in G$ такое, что $\|w\| = 1, w = a^s, C(w)$ — централизатор элемента w . Тогда группа $C_w(w)$ является свободным произведением циклических групп и $C(w) = \langle a \rangle \times C_w(w)$, где $C_w(w) = \prod_{r=1}^l * \langle \tilde{z}_r \rangle$, где $\tilde{z}_r = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_{0r}^q z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1}, z_k \in G_{ij}, \|z_k\| = m_{ij} - 1, q \in Z, k = \overline{1, t}$.

Доказательство леммы следует непосредственно из теоремы 5.

Заметим, что $q \in Z$, так как группы Артина с древесной структурой свободны от кручения, поэтому подслово z_{0r} , соответствующее замыкающему ребру может иметь любую степень $q \in Z$.

ТЕОРЕМА 6. [2] (Теорема о сопряженности для свободных произведений с объединенной подгруппой.) Пусть $P = \langle G * H; A = B, \varphi \rangle$ — свободное произведение с объединенной подгруппой. Предположим, что $u = c_1 \dots c_n$ — циклически приведенный элемент из P , где $n \geq 2$. Тогда каждое циклически приведенное сопряженное элемента может быть получено циклической перестановкой элемента $c_1 \dots c_n$ и последующим сопряжением элементом из объединяемой части A .

Группу G можно представить как древесное произведение групп вида G_{ij} с циклическим объединением.

Группе G соответствует конечный дерево-граф Γ_n , вершинами которого являются двупорожденные группы Артина. Группы Артина $G_{sp} = \langle a_p, a_s; \widehat{R_{sp}} \rangle$ и $G_{sk} = \langle a_k, a'_s; \widehat{R_{sk}} \rangle$ объединены по циклическим подгруппам $U_{sp} = \langle a_s \rangle, U_{sp} < G_{sp}$, и $U_{sk} = \langle a'_s \rangle, U_{sk} < G_{sk}$, если вершины, которым соответствуют данные подгруппы, соединены ребром в древесном графе.

Тогда представление группы G как древесное произведение групп вида G_{ij} с циклическим объединением имеет вид: $G = \langle \prod_{i=1}^n G_{ij} | U_{ij} = U_{js} \rangle$, где $U_{ij} = \langle a_j \rangle, U_{js} = \langle a_j \rangle$. Поэтому каждый элемент $w \in G$ может быть представлен в виде произведения слогов, где каждый слог принадлежит некоторой подгруппе G_{ij} .

ТЕОРЕМА 7. Пусть G — конечно порожденная группа Артина с древесной структурой; слово w — циклически несократимое в свободной группе и не равное 1 в $G, \|w\| > 1$. Тогда централизатор элемента w есть либо бесконечная циклическая подгруппа, либо свободная абелева группа ранга 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть слово w — циклически несократимое в свободной группе и не равное 1 в G , $\|w\| > 1$ и пусть w не является степенью никакого элемента из G .

Рассмотрим случай, когда $G = G_{ab}$, где $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab \rangle^{m_{ab}} = \langle ba \rangle^{m_{ba}} \rangle$, $m_{ab} = m_{ba}$. Согласно лемме 1, при $m_{ab} = 2k + 1$ группа G_{ab} изоморфна группе $\langle x, y; x^{2k+1} = y^2 \rangle$. Представим w в нормальной форме $w = c_1 c_2 \dots c_n$, где $c_i \in \langle x; x^{2k+1} \rangle$ или $c_i \in \langle y; y^2 \rangle$, тогда из теоремы 6 следует $w = h^{-1} w^* h$, где h — элемент из объединяемой подгруппы, w^* — циклическая перестановка $c_1 c_2 \dots c_n$. Тогда единственно возможно $w = u^k$, так как достаточно рассмотреть этот случай в фактор-группе $G_{ab}/C(G_{ab})$. Что противоречит нашим предположениям.

При $m_{ab} = 2k$ группа G_{ab} изоморфна группе $\langle t, x; tx^k t^{-1} = x^k \rangle$, доказательство проводим аналогично.

В этом случае централизатор элемента w имеет вид $C(w) = \langle w, h \rangle$, т. е. будет свободной абелевой группой ранга 2.

Пусть слово w является циклически несократимым и имеет в G слоговую длину $\|w\| > 1$. Предположим, что слово w является R и $\overline{R}$ -несократимым. Из теоремы 6 следует, что либо w сопряжено с w некоторым элементом h из объединяемой подгруппы, где h есть степень образующего; либо слово $w = w_{\text{л}} w_{\text{п}}$ сопряжено с некоторой циклической перестановкой $w^* = w_{\text{п}} w_{\text{л}}$ элементом из объединяемой подгруппы.

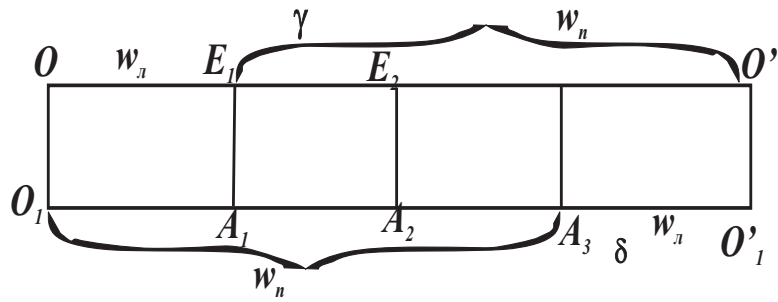
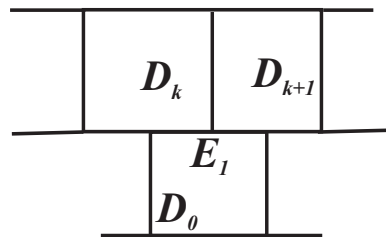
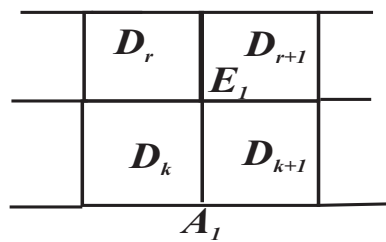
Рассмотрим второй случай. Слова $w_{\text{л}} w_{\text{п}}$ и $w_{\text{п}} w_{\text{л}}$ циклически несократимы, и по условию R и $\overline{R}$ -несократимы. Рассмотрим кольцевую связную приведенную R -диаграмму M сопряженности слов $w_{\text{л}} w_{\text{п}}$ и $w_{\text{п}} w_{\text{л}}$ с граничными циклами γ, δ вида рис.2а. И пусть $\varphi(\gamma) = w_{\text{л}} w_{\text{п}}$, $\varphi(\delta) = w_{\text{п}} w_{\text{л}}$, причем путь γ начинается в точке O , а путь δ — в точке O_1 . Пусть начальная вершина O совпадает с $\alpha(w_{\text{л}} w_{\text{п}})$. В диаграмме M вершина O имеет степень $d(O) > 2$, более того $d(O) \leq 4$. Пусть $D_1, D_2, \dots, D_n$ — области, образующие данную диаграмму, и пусть D_1, D_n содержат вершину O , $\partial D_1 \cap \partial D_n = e$.

Разрежем диаграмму M по ребру $e = OO_1$. Получим связную односвязную, однослойную, приведенную R -диаграмму M^* (рис.4), где $\varphi(\gamma) = \varphi(OO') = w = w_{\text{л}} w_{\text{п}}$, $\varphi(\delta) = \varphi(O_1 O'_1) = w^* = w_{\text{п}} w_{\text{л}}$, $\varphi(OE_1) = \varphi(A_3 O'_1) = w_{\text{л}}$, $\varphi(E_1 O') = \varphi(O_1 A_3) = w_{\text{п}}$, $e = OO_1 = O' O'_1$.

Вершина E_1 имеет степень $d(E_1) > 2$. Допустим противное, тогда, подклеивая к диаграмме M^* диаграмму M^* , тождественную данной, с циклическим сдвигом на $w_{\text{п}}$ влево, будет иметь место следующая поддиаграмма M'' (рис. 5).

В этом случае поддиаграмма M'' содержит внутреннюю точку степени больше или равной 3, что невозможно.

1 случай. Пусть диаграмма M^* содержит только области первого типа. Будем читать слова, записанные на границе диаграммы M^* слева направо. Тогда для всех областей диаграммы $M^* = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ имеем $|\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)| = \dots = |\varphi(\partial D_{n-1} \cap \partial D_n)|$, и $\forall i, i = \overline{1, n}, \varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\partial D_i \cap \delta)^{-1}$ откуда следует $\varphi(O_1 A_1) = w_{\text{л}}$ и $\varphi(E_1 A_1) = \varphi(OO_1)^{-1} = h^{-1}$. Допустим, что

Рис.4 Диаграмма M^* Рис.5 Поддиаграмма M'' Рис.6 Поддиаграмма M'''

это не так. Рассмотрим $E_1A_1 = \partial D_k \cap \partial D_{k+1}$. Предположим, что $\varphi(E_1A_1)$ и $\varphi(O'O'_1)$ принадлежат различным циклическим подгруппам. Тогда, вновь подклеивая к диаграмме M^* диаграмму $M^{*'}$, тождественную данной, с циклическим сдвигом на w_π влево, мы получим поддиаграмму M''' , и данной поддиаграмме M''' будет соответствовать петля в дерево-графе группы G (рис. 6), что невозможно. Таким образом, из сравнения областей D_k и D_r следует, что $\varphi(E_1A_1) = \varphi(O'O'_1)^{-1} = h$.

Тогда $hw_\pi h^{-1} = w_\pi$, и либо $w = (w_\pi)^k$, т. е. $w_\pi = (w_\pi)^{k-1}$, либо $w_\pi = (w_\pi)^m T$, где $\|T\| < \|w_\pi\|$. Случай $w = (w_\pi)^k$ противоречит нашим предположениям.

Пусть $w_\pi = (w_\pi)^m T$, где $\|T\| < \|w_\pi\|$, рассмотрим фрагмент диаграммы M^* (рис. 7). Имеем $\varphi(BK) = \varphi(A_3O'_1) = w_\pi$, $\varphi(KO') = \varphi(CA_3) = T$, $\varphi(BC) = h$, $\varphi(O'O'_1) = h$. Так как данная диаграмма содержит области только первого типа, то $\varphi(BE_3) = T$. Таким образом, проводя аналогичные рассуждения, мы получим, что либо $w_\pi = T^k$, либо $w_\pi = T^m \cdot T_1$, где $\|T_1\| < \|T\|$.

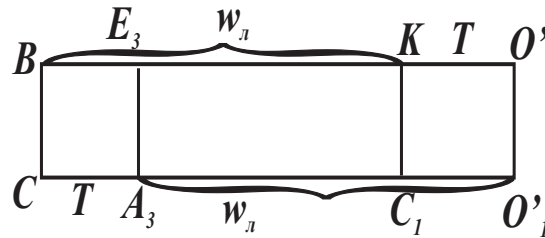


Рис. 7 Фрагмент диаграммы M^*

Если $w_\pi = T^k$, то это противоречит нашим предположениям, так как мы получаем $w = T^s$. А в случае $w_\pi = T^m \cdot T_1$, где $\|T_1\| < \|T\|$, мы проводим аналогичные рассуждения как и на предыдущем шаге. И вновь получим, что либо $T = T_1^{k_1}$, откуда $w_\pi = T_1^{k'_1}$ и $w = T_1^{s'}$, либо $T = T_1^{m_1} \cdot T_2$, $\|T_2\| < \|T_1\|$. Рассуждая аналогичным образом, через конечное число шагов мы придем к $w = T_x^l$, где T_x есть подслово слова w , либо образующий. В любом случае это противоречит нашим предположениям.

Таким образом, централизатор элемента w будет порождаться w и элементом из объединения h , т. е. является свободной абелевой группой ранга 2.

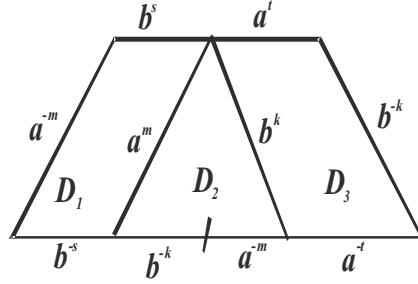
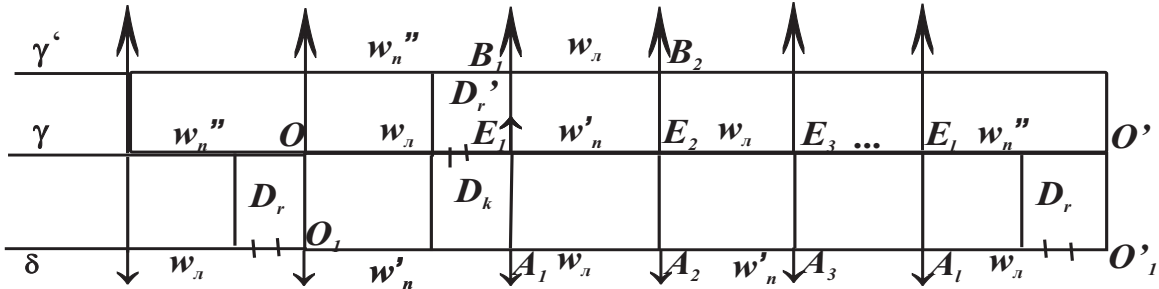
Отметим, что, так как элемент из объединения h является степенью образующего, и, учитывая, что диаграмма M^* состоит только из областей первого типа, и метки ребер всех смежных областей $\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})$, $i = \overline{1, n}$ содержат эту же степень, то показатель степени может принимать различные целые значения.

2 случай. Пусть диаграмма M^* содержит области первого, второго и третьего типа. Диаграмма должна содержать одинаковое количество областей второго и третьего типа, причем области второго должны чередоваться с областями третьего типа, так как в противном случае в диаграмме M^* выделится полоса.

Рассмотрим случай, если диаграмма M^* содержит область $D_1 \subset M^*$ вто-

рого или третьего типа, и $d(D_1) = 4$. Данная ситуация невозможна, так как в противном случае не выполняется равенство $h^{-1}w_{\text{л}}w_{\text{п}}h = w_{\text{п}}w_{\text{л}}$. Действительно, пусть $D_1 \subset M^*$ — область третьего типа с $d(D_1) = 4, \varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = w_1, w_{\text{л}} = w_1w_2, \varphi(\partial D_1 \cap \partial D_n) = h, \varphi(\partial D_2 \cap \delta) = w'_1, w_{\text{п}} = w'_1w'_2$. Тогда, так как слова $\varphi(\partial D_1)$ и $\varphi(\partial D_2)$ принадлежат разным подгруппам вида G_{ab} , то данное равенство невозможно.

Единственно возможна ситуация, когда диаграмма M^* содержит поддиаграмму вида (рис. 8). В этом случае мы однозначно определяем метки ребер $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_n)$ и $\varphi(\partial D_3 \cap \partial D_4)$, и продолжаем наши рассуждения.

Рис.8 Фрагмент диаграммы M^* Рис.9 Диаграмма M^{**}

Рассмотрим диаграмму $M^* = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Вновь будем читать слова, записанные на границе диаграммы M^* слева направо. Имеем $\varphi(\gamma) = \varphi(OO') = w = w_{\text{л}}w_{\text{п}}$, $\varphi(\delta) = \varphi(O_1O'_1) = w^* = w_{\text{п}}w_{\text{л}}$, $\varphi(OE_1) = \varphi(A_3O'_1) = w_{\text{л}}$, $\varphi(E_1O') = \varphi(O_1A_3) = w_{\text{п}}$, $e = OO_1 = O'O'_1, \varphi(OO_1) = h = a^m, \varphi(O'O'_1) = h^{-1} = a^{-m}$. Покажем, что $\varphi(E_1A_1) = h$.

Отметим, что показатель m образующего h в отличие от первого случая определяется единственным образом, так как диаграмма содержит области второго и третьего типов.

Подклеим к диаграмме M^* диаграмму $M^{*'}$, тождественную данной, с циклическим сдвигом на $w_{\text{п}}$ влево, в итоге мы получим диаграмму M^{**} (рис.9).

Так как $\varphi(OE_1) = \varphi(A_3O'_1) = w_{\text{л}}$ тогда метки $\varphi(E_1A_1)$ и $\varphi(OO_1)^{-1}$ принадлежат одной циклической подгруппе.

Заметим, что в диаграмме M^{**} каждой области D_i соответствует обратная ей область D'_i . Допустим, что это условие не выполняется, тогда возможны следующие случаи.

а) Пусть диаграмма M^{**} содержит область третьего типа D_k . Метки $\varphi(E_1A_1)$ и $\varphi(B_1E_1)$ содержатся в одной подгруппе.

Пусть D'_r является областью первого типа.

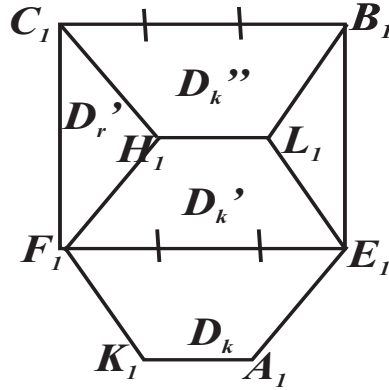


Рис.10 Поддиаграмма M_1

Тогда имеет место поддиаграмма M_1 (рис.10), где область D'_r ограничена контуром $F_1C_1B_1E_1$, а область D_k — $F_1E_1A_1K_1$. Получаем, что $\varphi(D'_k \cap \gamma) = \varphi(D'_r \cap \gamma)$, а также $\varphi(K_1A_1) = \varphi(H_1L_1)$. Таким образом, области D'_k и D''_k являются взаимнообратными, и $\varphi(C_1F_1) = 1$, а это невозможно. Также отметим, что, если выполняется $\|\varphi(F_1C_1B_1E_1)\| = 2m_{ij}$, то область D_k не существует.

Случай, когда D_k имеет первый, а D'_r соответственно второй тип, является аналогичным.

б) Пусть диаграмма M^{**} содержит область второго типа D_k , а D'_r есть область первого типа (рис.11), и пусть $\|\varphi(F_1C_1B_1E_1)\| = 2m_{ij}$.

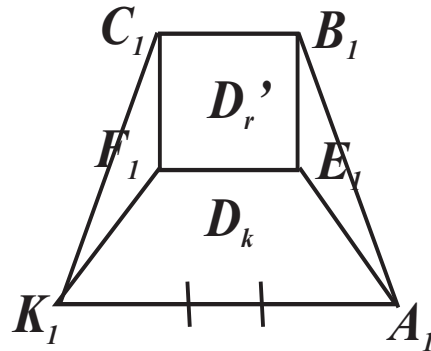


Рис.11 Случай б

Область D'_r ограничена контуром $F_1C_1B_1E_1$, а D_k — $F_1E_1A_1K_1$. Тогда получаем, что $\varphi(K_1C_1) = \varphi(K_1F_1)$, $\varphi(A_1B_1) = \varphi(A_1E_1)$, и $\varphi(C_1B_1) = \varphi(F_1E_1)$. Скле-

им ребра K_1F_1 и K_1C_1 , тогда вершина F_1 совпадает с C_1 , откуда $\varphi(C_1F_1) = 1$, что невозможно. Если $\|\varphi(K_1F_1E_1A_1)\| = 2m_{ij}$, тогда область D'_r не существует.

Случай, когда D_k имеет первый, а D'_r соответственно третий тип, также является аналогичным.

в) Если области D_k и D'_r являются одновременно областями второго или третьего типов, то данная ситуация вновь невозможна, так как это приводит к тому, что-либо диаграмма содержит внутреннюю точку, либо на границе возможны $\bar{R}$ -сокращения.

2.1. Пусть диаграмма M^{**} содержит область третьего типа D_k (рис.9), тогда области D_r, D'_r , являются областями второго типа. Отметим, что граничные метки областей D_k, D'_r , принадлежат одной подгруппе вида G_{ab} . Так как $\varphi(O'O'_1) = \varphi(B_1E_1) = h^{-1} = a^{-m}$, тогда $\varphi(\partial D'_r \cap \gamma)$ содержит y^m , где $y \in \{a, b\}$, $\varphi(\partial D'_r) \in G_{ab}$. Следовательно, и $\varphi(\partial D_k \cap \gamma)$ содержит y^m , откуда $\varphi(E_1A_1) = a^m = h$.

2.2. Пусть диаграмма M^{**} содержит область второго типа D_k (рис.12). Тогда области D_r, D'_r , являются областями третьего типа. Имеем $\varphi(O_1A_1) = \varphi(E_1E_2) = w'_\Pi$, $\varphi(\partial D_k \cap \delta) = \varphi(\partial D'_r \cap \gamma)$, поэтому метка области D_n является взаимнообратной метке области D'_k , а метки областей D_k и D'_k совпадают. Тогда $\varphi(B_2E_2) = \varphi(E_2A_2)^{-1}$ и $\varphi(\partial D_{k-1} \cap \partial D'_k) = \varphi(\partial D_{n-1} \cap \partial D_n)^{-1}$. Отсюда следует $\varphi(E_1A_1) = \varphi(B_1E_1)^{-1} = h$, $\varphi(E_2A_2) = h^{-1}$.

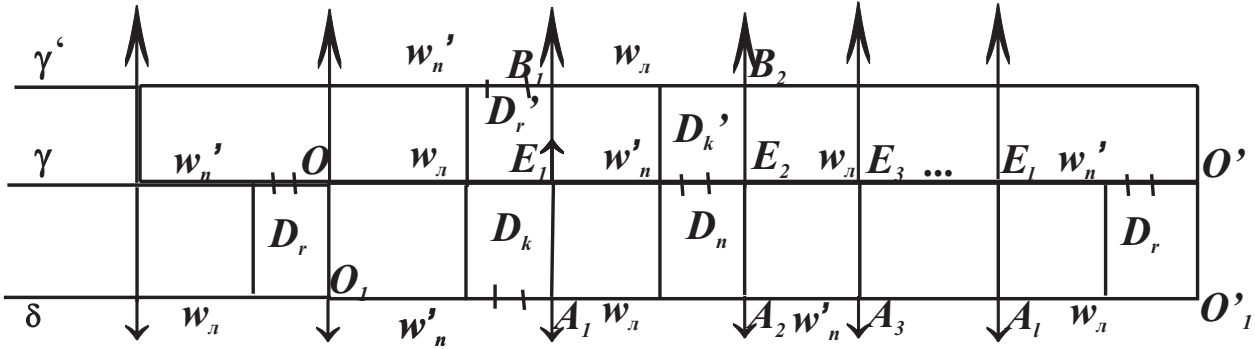


Рис.12 Диаграмма M^{**}

Из 2.1. и 2.2. вытекает, что $\varphi(A_1A_2) = w_\Pi$. Проводя аналогичные рассуждения, мы получим $\varphi(E_1E_2) = \varphi(A_2A_3) = \dots = w'_\Pi$, $\varphi(A_1A_2) = \varphi(E_2E_3) = \dots = w_\Pi$ (рис.12).

Возможны следующие случаи:

I. Если $\varphi(OO') = w = w_\Pi w'_\Pi w_\Pi w'_\Pi \dots w_\Pi$. Тогда $w = (w_\Pi)^k$, что противоречит нашим предположениям.

II. Если $\varphi(OO') = w = w_\Pi w'_\Pi w_\Pi w'_\Pi \dots w_\Pi \cdot T$, тогда имеет место фрагмент диаграммы M^* (рис.13). Имеем $\varphi(BK) = \varphi(A_3O'_1) = w_\Pi$, $\varphi(KO') = \varphi(CA_3) = T$, $\varphi(BC) = h$, $\varphi(O'O'_1) = h^{-1}$.

Данной поддиаграмме соответствует соотношение $hw_\Pi Th^{-1} = Tw_\Pi$. Т. е.,

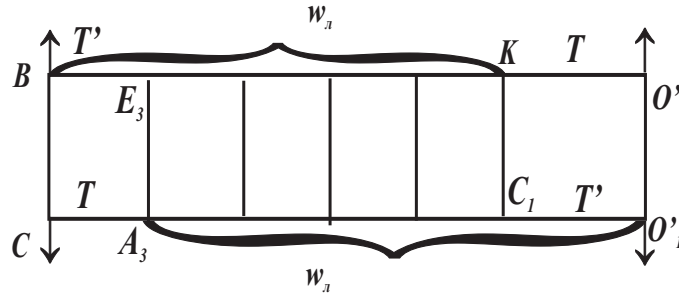
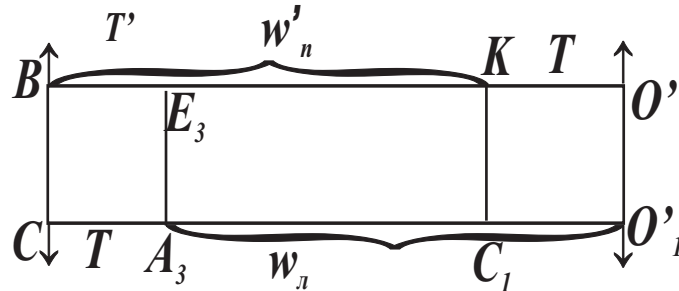


Рис.13 Случай II

мы свели решение исходной задачи $h^{-1}w_{\text{л}}w_{\text{п}}h = w_{\text{п}}w_{\text{л}}$ к решению подобной $hw_{\text{л}}Th^{-1} = Tw_{\text{л}}$, где $\|w_{\text{л}}\| \leq \min\{\|w_{\text{л}}\|, \|w_{\text{п}}\|\}$, $\|T\| \leq \min\{\|w_{\text{л}}\|, \|w_{\text{п}}\|\}$. Решая новую задачу, через конечное число шагов мы получим, либо $w = (T_x)^s$, где T_x — подслово w или степень образующего, либо сведем к задаче $hT_xT_yh^{-1} = T_yT_x$, где T_x, T_y — степени образующих. А это противоречит нашим предположениям.

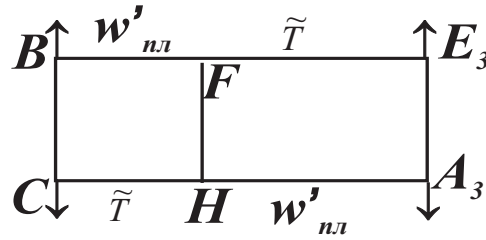
III. Если $\varphi(OO') = w = w_{\text{л}}w'_{\text{п}}w_{\text{л}}w'_{\text{п}} \dots w'_{\text{п}}$. Тогда $w = (w_{\text{л}}w'_{\text{п}})^k$, что невозможно.

IV. Если $\varphi(OO') = w = w_{\text{л}}w'_{\text{п}}w_{\text{л}}w'_{\text{п}} \dots w'_{\text{п}} \cdot T$. Рассмотрим фрагмент диаграммы M^* (рис.14). Имеем $\varphi(BC) = \varphi(E_3A_3) = h$, $\varphi(KC_1) = \varphi(O'O'_1) = h^{-1}$, $\varphi(BE_3) = T'$, $\varphi(KO') = \varphi(CA_3) = T$.

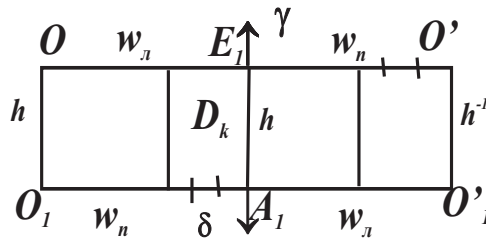
Рис.14 Фрагмент диаграммы M^*

Так как $\varphi(A_3O'_1) = w_{\text{л}}$, то $\varphi(E_3O') = w'_{\text{п}}$. Получаем графическое равенство $T'w'_{\text{п}} = w'_{\text{п}}T$, откуда следует $\|T'\| = \|T\|$ и $w'_{\text{п}} = w'_{\text{пл}}T^p$, где $\|w'_{\text{пл}}\| < \|T\|$. С другой стороны, $w'_{\text{п}} = T' \cdot \varphi(E_3K) = T' \cdot w'_{\text{пл}}T^{p-1}$. Тогда имеет место графическое равенство $T' \cdot w'_{\text{пл}}T^{p-1} = w'_{\text{пл}}T^p$, откуда $T'w'_{\text{пл}} = w'_{\text{пл}}T$. Так как $|T'w'_{\text{пл}}| = |w'_{\text{пл}}T|$, тогда $T' = w'_{\text{пл}}T'_1$, $T = T'_2w'_{\text{пл}}$ и получаем $w'_{\text{пл}}T'_1w'_{\text{пл}} = w'_{\text{пл}}T'_2w'_{\text{пл}}$, следовательно, $T'_1 = T'_2 = \tilde{T}$. В итоге имеем $T' = w'_{\text{пл}}\tilde{T}$, $T = \tilde{T}w'_{\text{пл}}$. Рассмотрим фрагмент диаграммы M^* (рис.15). Имеем $\varphi(BF) = \varphi(HA_3) = w'_{\text{пл}}$, $\varphi(FE_3) = \varphi(CH) = \tilde{T}$, $\varphi(BC) = \varphi(E_3A_3) = h$, $\varphi(FH) = h^{-1}$.

Таким образом, мы приходим к задаче $hw'_{\text{пл}}\tilde{T}h^{-1} = \tilde{T}w'_{\text{пл}}$, а дальше пользуемся выводами случая 2б.

Рис.15 Фрагмент диаграммы M^*

Следовательно, случай 2г возможен, только если диаграмма M^* состоит из двух частей (рис.16). Имеем $\varphi(OE_1) = \varphi(A_1O'_1) = w_\pi$, $\varphi(O_1A_1) = \varphi(E_1O') = w_\pi$.

Рис.16 Диаграмма M^*

Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$hw_\pi h^{-1} = w_\pi w_\pi, hw_\pi h^{-1} = w_\pi, hw_\pi h^{-1} = w_\pi(*).$$

Откуда следуют следующие соотношения: $h^2 w_\pi h^{-1} = hw_\pi$, $hw_\pi h^{-2} = w_\pi h^{-1}$, и $h^2 w_\pi h^{-2} = w_\pi w_\pi$. Т. е. следующие элементы принадлежат централизатору $C(w): w = w_\pi w_\pi, w_\pi h^{-1}, hw_\pi, h^2$.

Рассмотрим группу $\langle h^2, w_\pi w_\pi, w_\pi h^{-1}, hw_\pi | h^2 w_\pi h^{-1} = hw_\pi, hw_\pi h^{-2} = w_\pi h^{-1} \rangle$. Выполним преобразования Титце и получим $\langle h^2, w_\pi h^{-1} | h^2 w_\pi h^{-1} \cdot h^{-2} = w_\pi h^{-1} \rangle$.

Таким образом, централизатор элемента w является свободной абелевой группой ранга 2 $C(w) = \langle w_\pi h^{-1}, h^2 \rangle$.

Пусть слово w — циклически несократимое в свободной группе и не равное 1 в G , $\|w\| > 1$, и пусть w является степенью некоторого элемента из G : $w = v^k, k > 1$, где v в свою очередь не является степенью никакого элемента из G , тогда, так как $v \in C(w)$, то централизаторы слов v и w совпадают.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invenf. Math. 1983. Vol. 72. P. 201—220.
2. Линдон Р., Шюпп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

3. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 67—82.
4. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. О кручении в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 6—17.
5. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 42—59.
6. Платонова О. Ю. О структуре централизатора элементов единичной слововой длины в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 2(34). С. 73—84.
7. Платонова О. Ю. Проблема пересечения циклических подгрупп в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 2(34). С. 85—96.

Новомосковский институт (филиал) <Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева> (НИ РХТУ),

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Поступило 27.09.2013