ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-22-3-474-478

Об одном свойстве преобразования Фенхеля

А. А. Фарвазова

Фарвазова Айсылу Азатовна — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: aisylu.farvazova@yandex.ru

Аннотация

Мы рассматриваем класс функций $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, которые являются полунепрерывными снизу, четными, выпуклыми и $\Phi(0) = 0$. Преобразование Фенхеля Ψ от Φ тоже принадлежит этому классу функций. Мы определим функции, играющие роль производных для всех функций из нашего класса и докажем, что эти функции взаимно обратные в обобщенном смысле.

Ключевые слова: максимизация полезности, пространство Орлича, преобразование Фенхеля.

Библиография: 3 названий.

Для цитирования:
А. А. Фарвазова Об одном свойстве преобразования Фенхеля // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 474–478.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-22-3-474-478

On a property of the Fenchel transform

A. A. Farvazova

Farvazova Aisylu Azatovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: aisylu.farvazova@yandex.ru

Abstract

We consider the class of functions $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, which are lower semicontinuous, even, convex and $\Phi(0) = 0$. The Fenchel transform Ψ from Φ also belongs to this class of functions. We will define functions that play the role of derivatives for all functions from our class and prove that these functions are mutually inverse in a generalized sense.

Keywords: utility maximization, Orlicz space, Fenchel transform.

Bibliography: 3 titles.

For citation:
A. A. Farvazova, 2021, "On a property of the Fenchel transform", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 474–478.

1. Введение

Максимизация полезности является стандартной задачей экономической теории. Ожидаемая полезность наиболее часто используется в областях, связанных с риском.

Мотивировка данной работы заключается в том, что, во-первых, задачу максимизации полезности и двойственную к ней рассматривают в пространствах Орлича, ассоциированных с функцией Юнга из нашего класса и её преобразованием Фенхеля, а во-вторых, функции, играющие роль производных, могут рассматриваться как траектории возрастающего процесса, порождающего замену времени.

В Разделе 2 даются краткие сведения про пространства Орлича и замену времени. Приводятся общие сведения про субдифференцируемость класса функций Юнга. В Разделе 3 формулируется основной результат в качестве теоремы. Более содержательную часть представляет само доказательство.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Функция Юнга и пространства Орлича

Приведем общие сведения о пространствах Орлича, см. [1]:

Определение 1. $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ – *функция Юнга, если* Φ – *чётная, выпуклая и*

(i) $\Phi(0) = 0$;

(ii) $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$;

(iii) $\Phi(x) < +\infty$ *в окрестности нуля.*

Сопряженная Ψ к Φ (или преобразование Фенхеля функции Φ) определяется как

$$\Psi(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - \Phi(x)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. *Отметим, что функция, тождественно равная нулю* $\Phi(x) \equiv 0$ *исключается. Соответствующая сопряженная функция, которая в нуле равно нулю* $\Psi(0) = 0$, *а в остальных точках бесконечности* $\Psi(y) \equiv +\infty$ *тоже исключается.*

Предложение 1. *Сопряженная функция* Ψ *также является функцией Юнга.*

Рассмотрим некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Пусть L^0 – множество измеримых функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, определенных на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

Определение 2. *Пространство Орлича* $L^\Phi(\mathsf{P})$, *ассоциированное с функцией Юнга* Φ, *определяется как*

$$L^\Phi(\mathbb{P}) = \{u \in L^0 : \exists\ \alpha > 0 \int_\Omega \Phi(\alpha u) d\mathbb{P} < +\infty\}$$

Замечание 2. *Отметим, что* $L^\Phi(\mathsf{P})$ – *векторное пространство.*

Замечание 3. $L^\Phi(\mathbb{P})$ *является также банаховым пространством, оснащенным нормой Люксембурга*

$$||u||_{\Phi,\mathbb{P}} = \inf\{k > 0\colon \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k}\Big) d\mathbb{P} \le 1\}.$$

Замечание 4. *Норма Люксембурга эквивалентна норме Орлича*

$$N_{\Phi,\mathbb{P}}(u) = \sup_{v \in L^{\Psi}(\mathbb{P}) : \int_\Omega \Psi(v) d\mathbb{P} \leq 1} \Big\{ \int_\Omega |uv| d\mathbb{P} \Big\}.$$

Определение 3. *Функция Юнга $\Phi(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших значениях x, если существуют такие постоянные $k > 0$ и $x_0 \geq 0$, что для $x \geq x_0$*

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x).$$

Замечание 5. *Функция Юнга $\Phi(x)$, удовлетворяющее Δ_2-условию, растет не быстрее степенной. Обратное утверждение неверно.*

Замечание 6. *Если функция Юнга $\Phi(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то сопряженное пространство эквивалентно пространству Орлича $(L^\Phi)^* \sim L^\Psi$, а если не удовлетворяет, то сопряженное пространство шире $(L^\Phi)^* \supset L^\Psi$.*

2.2. Возрастающие процессы, порождающие замену времени

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbb{P})$ — стохастический базис.

Определение 4. *Заменой времени называется семейство $(T_s)_{s \geqslant 0}$ $(\mathscr{F}_t)$-марковских моментов, для которого отображения $s \rightsquigarrow T_s$ не убывают и непрерывны справа.*

Если $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ — согласованный непрерывный справа возрастающий процесс, $A_0 \geqslant 0$, то

$$T_s := \inf\{t : A_t > s\}$$

задает *замену времени*, порожденную A, и

$$A_t := \inf\{s : T_s > t\}.$$

Замечание 7. *Предполагаем, что* $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Замечание 8. *Последняя формула позволяет по замене времени $(T_s)_{s \geqslant 0}$ построить порождающий ее возрастающий процесс.*

Замечание 9. *Мы в дальнейшем будем рассматривать такой класс функций, что при фиксированном ω $(T_s)_{s \geqslant 0}$ является производной нашего класса функций. Более точно, замена времени T_s и порождающий её процесс A_t являются производными функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой.*

2.3. Общие сведения про субдифференцируемость класса функций Юнга

Напомним следующее определение:

Определение 5. *Пусть задана собственная функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Субдифференциал функции f в точке $x \in \mathbb{R}$:*

$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R} : f(y) \geq f(x) + p(y - x) \ \forall\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Предложение 2. *Пусть задана собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда*

$$y \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \partial f^*(y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + f^*(y) = xy.$$

Рассмотрим класс функций Юнга Ф. Функции Ф, где она определена, поставим в соответствие функцию $a(\cdot)$, за исключением тождественного нуля, а функции $\Phi^* = \Psi$ – $c(\cdot)$, за исключением функции, которая в нуле равна нулю, а в остальных точках бесконечности. Мы покажем, что класс таких функций a – класс неубывающих, неотрицательных, непрерывных справа функций из $\mathbb{R}_+$ в $[0, +\infty]$, и в замене времени отвечает траекториям.

Определение 6. *Дано $\Phi(t)$. Вводим функцию $a(t)$ для $t \in \mathbb{R}_+$ через субдифференциал:*
(1) если $\partial\Phi(t) \neq \emptyset$, то $a(t) = \sup \partial\Phi(t)$ (м.б. $+\infty$),
(2) *если $\partial\Phi(t) = \emptyset$, то $a(t) = +\infty$.*

Определение 7. *Дано $\Phi(t)$. Вводим функцию $a(t)$ для $t \in \mathbb{R}_+$ через правую производную:*
(1) если существует $\varepsilon > 0$, т.ч. $\Phi(t+\varepsilon) < \infty$, то $a(t) = \Phi'_+(t)$,
(2) если для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено $\Phi(t+\varepsilon) = +\infty$, то $a(t) = +\infty$.

Предложение 3. *Два определения функции $a(t)$ эквивалентны.*

Замечание 10. *Функция $c(t)$ определяется аналогично по $\Psi(t)$.*

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть Ф – функция Юнга. Зададим $a(\cdot)$ как в Определении 7, аналогично определим $c(\cdot)$. Тогда функции $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ – возрастающие, непрерывные справа и для произвольных s, $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено*

$$a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}, \tag{1}$$

$$c(t) = \inf\{s : a(s) > t\}. \tag{2}$$

Пусть g – положительная борелевская функция на $\mathbb{R}_+$. Тогда справедливо

$$\int_0^\infty g(t)da(t) = \int_0^{a(\infty)} g(c(t))dt. \tag{3}$$

Доказательство. Если определить функции $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ через правую производную, то в конечном случае и в бесконечном, непрерывность справа и возрастание очевидны. Также это очевидно, если они определены через формулы (1) и (2).

Далее, пусть $a(u)$ определено как в Определении 7, а $c(t)$ определено как в (2). Покажем, что это определение $c(t)$ эквивалентно определению через правую производную. Сначала для этого докажем, что $a(u) \geq t \Leftrightarrow u \geq c(t_-)$, где $c(t_-) = \lim_{t'\uparrow t} c(t')$. Пусть $a(u) \geq t$. Возьмём $s < t$, тогда $a(u) > s$ и $c(s) \leq u$. Т.к. данное неравенство выполнено для произвольного $s < t$, то $c(t_-) \leq u$. Обратно, пусть $c(t_-) \leq u$, $a(u) < t$. Для $t' < t$ имеем $c(t') \leq u$. Т.к. $a(c(t')) \geq t'$, см. [2], то $t' \leq a(c(t')) \leq a(u)$, т.е. $a(u) \geq t'$.

Далее, докажем, что $a(u_-) \leq t \Leftrightarrow u \leq c(t)$, где $a(u_-) = \lim_{u'\uparrow u} a(u')$. Пусть $c(t) \geq u$. Для $u' < u$ имеем $c(t) > u'$ и $a(u') \leq t$. Т.к. данное неравенство справедливо для произвольного $u' < u$, то $a(u_-) \leq t$. Обратно, пусть $a(u_-) \leq t$, $c(t) < u$. Отсюда следует, что существует $s < u$, т.ч. $a(s) > t$. Противоречие.

С одной стороны, возьмём $t \in \partial\Phi(u)$, и пусть $a(u)$ определено как в Определении 7, а $c(t)$ определено как в (2). Тогда $a(u) \geq t \geq a(u_-) \Leftrightarrow c(t_-) \leq u \leq c(t)$. С другой, $t \in \partial\Phi(u) \Leftrightarrow u \in \partial\Psi(t)$. Так как это выполнено для произвольного $t \in \partial\Phi(u)$, то $\partial\Psi(t) = [\Psi'_-(t), \Psi'_+(t)] = [c(t_-), c(t)]$ и $c(t) = \Psi'_+(t)$. Аналогично, определяя $c(t)$ через производную, а $a(u)$ как в (1), получаем, что для $a(u)$ справедливо Определение 7. Отсюда следует, что $\partial\Phi(u) = [\Phi'_-(u), \Phi'_+(u)] = [a(u_-), a(u)]$ и $a(u) = \Phi'_+(u)$.

Если ни для какого u $t \notin \partial\Phi(u)$, то $\partial\Psi(t) = \emptyset$. Это случай, когда функция Ψ в точке t обращается в $+\infty$, либо принимает конечное значение, но левая производная равна $+\infty$, а правая производная не существует, так как справа функция принимает бесконечное значение. В этом случае $c(t) = +\infty$.

Пусть сначала $g(t) = \mathbb{1}\{t = 0\}$. Левая часть (3) равно a(0). Правая – длине интервала $|I_0| = |\{t : c(t) = 0\}| = a(0)$.

Пусть теперь $g(t) = \mathbb{1}\{t \in (0, s]\}$. Левая часть (3) равно $a(s) - a(0)$. Правая – длине интервала $|I_s| = |\{t : 0 \leq c(t) \leq s\}| = \inf\{t : c(t) > s\} - \inf\{t : c(t) > 0\} = a(s) - a(0)$.

Проверим (3) для $g(t) = 1$. Тогда $a(0) + a(\infty) - a(0) = a(\infty)$.

Обозначим $\mathscr{H}$ векторное пространство ограниченных борелевских функций g, для которых выполняется соотношение (3), и $\mathscr{C}$ – совокупность индикаторов интервалов вида $[0, t]$. Теорема о монотонных классах, см. [3], показывает, что $\mathscr{H}$ содержит все ограниченные борелевские функции. Равенство (3) с помощью предельного перехода проверяется для всех положительных борелевских функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rao M. M., Ren Z. D. Theory of Orlicz Spaces // N.Y: Marcel Dekker. 1991.

2. Embrechts P., Hofert M. A note on generalized inverses // Math. Meth. of Oper. Res. 2013. Vol. 77, №3. P. 423-432.

3. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы // М.: Мир, 1973.

REFERENCES

1. Rao, M. M. & Ren, Z. D., 1991, Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, New-York.

2. Embrechts, P. & Hofert, M., 2013, “A note on generalized inverses”, *Math. Meth. of Oper. Res.*, vol. 77, no. 3, pp. 423-432.

3. Meyer, P.-A., 1973, Veroyatnost i potentcialy [Probability and potentials], Mir, Moscow.

Получено 30.06.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.
Получено 28.05.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.