ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-457-463

Конечные группы с OS-пропереставочными подгруппами[1]

Е. В. Зубей

Зубей Екатерина Владимировна — кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина (Беларусь, г. Брест).
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

Аннотация

Подгруппа A группы G называется *OS-пропереставочной* в G, если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B. В этой ситуации подгруппу B будем называть OS-продобавлением к A в G.

В настоящей работе установлена p-разрешимость конечной группы G, в которой силовская p-подгруппа OS-пропереставочна, где $p > 5$.

Ключевые слова: конечная группа, p-разрешимая группа, OS-пропереставочная подгруппа, подгруппа Шмидта, полунормальная подгруппа.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
Е. В. Зубей. Конечные группы с OS-пропереставочными подгруппами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 457–463.

[1]Работа выполнена в рамках выполнения задания 1.1.02 подпрограммы «Математические модели и методы» ГПНИ на 2021–2025 гг. «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-457-463

Finite groups with OS-propermutable subgroups

E. V. Zubei

Zubei Ekaterina Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, Brest State A. S. Pushkin University (Belarus, Brest).
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

Abstract

A subgroup A of a group G is called *OS-propermutable* in G if there is a subgroup B such that $G = N_G(A)B$, AB is a subgroup of G and the subgroup A permutes with all Schmidt subgroups of B. In this situation, the subgroup B is called *OS-prosupplement* to A in G.

In this paper, we proved the p-solubility of a finite group G such that a Sylow p-subgroup of G is OS-propermutable in G, where $p > 5$.

Keywords: finite group, p-soluble group, OS-propermutable subgroup, Schmidt subgroup, seminormal subgroup.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
E. V. Zubei, 2021, "Finite groups with OS-propermutable subgroups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 457–463.

1. Введение

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B. В этой ситуации подгруппу B называют супердобавлением к подгруппе A в группе G. Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены многими авторами, см. литературу в [10].

В работе [9] вводится обобщение понятия полунормальной подгруппы.

Подгруппа A группы G называется *OS-полунормальной* в группе G, если существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B.

В. С. Монахов и Е. В. Зубей [9] установили для простого числа $r \geq 7$ r-разрешимость группы, в которой силовская r-подгруппа OS-полунормальна; для $r < 7$ перечислили все неабелевы композиционные факторы такой группы, также доказали разрешимость группы с OS-полунормальными силовскими 2− и 3-подгруппами.

А. Н. Скиба и И. Сяолян [13] ввели понятие проперестановочной подгруппы:

подгруппа A называется *проперестановочной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B. Подгруппу B в дальнейшем будем называть *продобавлением* к A в G.

В настоящей работе изучается группа G, в которой силовская p-подгруппа P перестановочна с подгруппами Шмидта из подгруппы B такой, что $G = N_G(P)B$. В связи с этим вводится следующее понятие.

Подгруппа A группы G называется *OS-проперестановочной* в G, если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B. В этой ситуации подгруппу B будем называть OS-продобавлением к A в G.

2. Вспомогательные результаты

Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [7, 12].

Напомним, что $A^G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$ — подгруппа, порожденная всеми сопряженными с A подгруппами группы G. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков k, m и p^t обозначаются через D_k, Z_m и E_{p^t} соответственно, $[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Подгруппу N нормальную в группе G обозначим через $N \lhd G$.

Группа G называется: π-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$, где π — некоторое множество простых чисел, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество простых чисел, делящих порядок группы G.

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G_{i+1} для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Группа называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами.

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгрупппы которой нильпотенты [11]. Свойства подгрупп Шмидта можно найти в работах О. Ю. Шмидта [11], В. С. Монахова [8]. Условимся называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической силовской q-подгруппой Q. Минимальным добавлением к подгрупе A в группе G называется такая подгруппа B, что $G = AB$ и $AB_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп B_1 из B.

Лемма 1. ([2, лемма 1]) *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа;*

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;*

(3) *L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.*

Лемма 2. ([4, лемма 11]) *Если простая группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта S, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 2$, $G \simeq PSL(2, 7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq [Z_7]Z_3$;*

(2) *$p = 3$, $G \simeq SL(2, 8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq [E_8]Z_7$;*

(3) *$p = 5$, $G \simeq PSL(2, 5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_4]Z_3$.*

Вопрос перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта исследовался Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком [1], В. С. Монаховым и В. Н. Княгиной [4]. Так из [4, теорема 1] вытекает следующая

Лемма 3. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта, то группа G r-разрешима.*

В работе [3] были получены локальные аналоги результатов работы Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [1].

Лемма 4. ([6, лемма 5]) *Пусть H, K и N — попарно перестановочные подгруппы группы G. Если H холлова, то $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$.*

Лемма 5. ([12, VI.4.10]) *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Лемма 6. *Пусть A — OS-проперестановочна подгруппа группы G и B ее OS-продобавление.*

(1) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет OS-продобавлением к подгруппе A в группе G.*

(2) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет OS-проперестановочной в группе G, а подгруппы B и B^g — ее OS-продобавлениями.*

Доказательство. (1) Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G, где $b \in B$, $a \in A$. Ввиду изоморфизма $B \simeq B^g$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная подгруппа Шмидта из B^g, где S — подгруппа Шмидта в B. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$AS^b = S^bA,\ AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^bA)^a = S^{ba}A = S^gA.$$

Это означает, что B^g — OS-продобавление к A в группе G.

(2) Если T — подгруппа Шмидта в B^g, то $T = S^g$ для некоторой подгруппы Шмидта S из B. По условию $AS = SA$, поэтому $A^gS^g = S^gA^g$ и так как $G = (N_G(A)B)^g = N_G(A^g)B^g$, то A^g — OS-проперестановочная подгруппа в G и B^g — ее OS-продобавление. Из пункта (1) следует, что $(B^g)^{g^{-1}} = B$ будет OS-продобавлением к A^g в группе G. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A — OS-проперестановочная подгруппа группы G и B — ее OS-продобавление.*

(1) *Если $N \lhd G$, то AN — OS-проперестановочна в G и B является OS-продобавлением к AN в G.*

(2) *Если $N \lhd G$, то AN/N — OS-проперестановочна в G/N и BN/N является OS-продобавлением к AN/N в G/N.*

(3) *Если A — OS-проперестановочная подгруппа группы G и B — OS-продобавление в G, то $A^G = A(A^G \cap B)$ и A OS-проперестановочна в A^G и $A^G \cap B$ — OS-продобавление к A в A^G.*

Доказательство. (1) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G = N_G(AN)B$ и AN перестановочна с любой подгруппой Шмидта из B, то AN — OS-проперестановочная подгруппа группы G и B — ее OS-продобавление.

(2) Известно, что $N_{G/N}(AN/N) = N_G(A)N/N$. Тогда $G/N = N_{G/N}(AN/N)(BN/N)$. Пусть D/N — подгруппа Шмидта из BN/N. Тогда $D = D \cap BN = N(B \cap D)$, т.е $B \cap D$ есть добавление к N в D.

По лемме 1 подгруппа $B \cap D$ содержит подгруппу Шмидта S такую, что $S^{B\cap D} = B \cap D$. Так как $S \leq L \leq B \cap D$, где L — минимальное добавление к N в D, то A перестановочна с S. Из леммы 6 (1) следует, что A перестановочна с S^x для любого $x \in G$. Поэтому A перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, AN/N перестановочна с D/N, т.е. AN/N OS-проперестановочна в G/N и BN/N будет OS-продобавлением к AN/N в G/N.

(3) Так как A — OS-проперестановочна в G, то $G = N_G(A)B$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B. Тогда $A^G = A^{N_G(A)B} = A^B \leq AB$ и $A^G = A^G \cap AB = A(A^G \cap B)$. Пусть S — произвольная подгруппа Шмидта из $A^G \cap B$. Так как $S \leq B$ — произвольная подгруппа Шмидта из B, то A — OS-полунормальна в A^G, а следовательно, A — OS-проперестановочна в A^G. Тогда $A^G \cap B$ — OS-продобавление к A в A^G.

Лемма доказана.

3. Основной результат

Теорема 1. *Если в группе G силовская p-подгруппа OS-проперестановочная и $p > 5$, то группа G p-разрешима.*

Доказательство. Обозначим силовскую p-подгруппу группы G через P. Воспользуемся индукцией по порядку группы G.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда по лемме 7 (2) PN/N OS-проперестановочна в G/N. Значит, G/N p-разрешима.

Будем считать, что в группе G нет p-разрешимых нормальных подгрупп.

Если $P^G < G$, то по лемме 7 (3) P — OS-пропересатновочна в P^G, а следовательно, P^G p-разрешима. Противоречие.

Значит $P^G = G$. Тогда по лемме 7 (3) $G = PY$ и P перестановочна с любой подгруппой Шмидта S из Y. Если порядок группы Y делится на p, то можно считать, что силовская p-подгруппа Y_p группы Y содержится в силовской p-подгруппе P группы G.

По теореме Дедекинда $Y \cap PS = (Y \cap P)S = Y_pS = SY_p = S(Y \cap P)$, т. е. силовская p-подгруппа Y_p группы Y перестановочна с любой подгруппой Шмидта S из Y. По лемме 3 группа Y p-разрешима. Значит, существует $Y_{p'}$ — p'-холлова подгруппа в группе G и $G = PY_{p'}$. Поэтому можно считать, что Y — p'-подгруппа, причем Y — p'-холлова подгруппа.

Пусть теперь N — нормальная подгруппа группы G и N не является p-разрешимой. Тогда по лемме 4 $N = N \cap PY = (N \cap P)(N \cap Y) = N_p(N \cap Y)$, где N_p — силовская p-подгруппа в $N \cap P$.

Пусть $S \leq N \cap Y$ — подгруппа Шмидта, тогда S — подгруппа Шмидта в Y и P перестановочна с S. Имеем $N \cap PS = (N \cap P)S = N_pS = SN_p = S(N \cap P)$. По индукции N p-разрешима. Противоречие.

Значит, G — простая группа. Очевидно, что $PS < G$ и тогда по лемме 5 либо $P^G \neq G$, противоречие с выше доказанным, либо $S^G \neq G$, противоречие.

Следовательно, $G = PS$. По лемме 2 $G \simeq PSL(2, 7)$, или $SL(2, 8)$, или $PSL(2, 5)$. Это значит, что группа G p-разрешима и $p > 5$, противоречие.

Теорема доказана.

В группах $PSL(2, 7)$, $SL(2, 8)$, $PSL(2, 5)$ соответственно силовские 2-,3-, 5-подгруппы OS-полунормальны, а значит и OS-проперестановочны, но перечисленные группы не являются p-разрешимыми, где $p \in \{2, 3, 5\}$.

4. Заключение

В настоящей работе установлен признак r-разрешимости группы, в которой силовская подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из подгруппы B такой, что $G = N_G(A)B$. В дальнейшем исследовании планируется описать композиционные факторы группы с OS-проперестановочными силовскими подгруппами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, №4. С.741-753.

2. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №4. С. 448-458.

3. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №4. С. 126–133.

4. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, №3. С. 130-139.

5. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности n-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, №3. С. 125–130.

6. Княгина В. Н., Монахов В. С. О π'-свойствах конечной группы, обладающей π-холловой подгруппой // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, №2. С. 297-309.

7. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

8. Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев. 2002. Секция №1. С. 81-90.

9. Монахов В. С., Зубей Е. В. О композиционных факторах конечной группы с OS-полунормальной силовской подгруппой // Тр. Ин-та математики НАН РБ. 2018. Т. 26:1. С. 90–94.

10. Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, №1. С. 148-159.

11. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 366-372.

12. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

13. Yi X., Skiba A. N. On S-propermutable subgroups of finite groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2015. Vol. 38, №2. P. 605-616.

REFERENCES

1. Berkovich, Ya. G., Pal'chik, Je. M. 1967, "On the commutability of subgroups of afinite group", *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, vol. 8, no. 4, pp. 741–753.

2. Kniahina, V. N., Monakhov, V. S. 2007, "Finite groups with seminormal Schmidt subgroups", *Algebra i logika*, vol. 46, no. 4, pp. 448–458.

3. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2011, "On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups", *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*, vol. 17, no. 4, pp. 126–133.

4. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2010, "On permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups", *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*, vol. 16, no. 3, pp. 130–139.

5. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2012, "On the permutability of n-maximal subgroups with Schmidt subgroups", *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*, vol. 18, no. 3, pp. 125–130.

6. Knyagina, V. N., Monakhov, V. S. 2011, "On the π'-properties of a finite group possessing a Hall π-subgroup", *Siberian Math. J.*, vol. 52, no. 2, pp. 234–243

7. Monakhov, V. S. 2006, "Vvedenie v teoriju konechnyh grupp i ih klassov", Vyshjejshaja shkola, Minsk.

8. Monakhov, V. S. “The Schmidt subgroups, its existence, and some of their classes“, *Trudy Ukrainskogo matematicheskogo kongressa: sbornik trudov*. Kiev, 2002, pp. 81–90.

9. Monakhov, V. S., Zubei, E. V. 2018 “On composition factors of a finite group with OS-seminormal sylow subgroup“, *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Republic of Belarus*, vol. 26, no. 1, pp. 90-94.

10. Monakhov, V. S., Trofimuk, A. A. 2020, “On the supersolvability of a group with seminormal subgroups“, *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, vol. 61, no. 1, pp. 148-159.

11. Shmidt, O. Ju. 1924 “Groups, whose all subgroups are special“, *Matematicheskii sbornik*, vol. 31, no. 3–4, pp. 366–372.

12. Huppert, B. 1967 “Endliche Gruppen I“, Berlin, Heidelberg, New York.

13. Yi, X., Skiba, A. N. 2015 “On S-propermutable subgroups of finite groups“, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 38, no. 2, pp. 605-616.

Получено 31.05.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.