

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

О приближении сферическими полиномами в L^p при $p < 1$ ¹

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgtail@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

На основе недавно доказанных оценок для L^1 -констант Никольского для $\mathbb{S}^d$ и $\mathbb{R}^d$ даются эффективные оценки константы K в следующем неравенстве типа Brown–Lucier для функций $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, $0 < p < 1$:

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p,$$

где Π_n^d — подпространство сферических полиномов, $E_1 f$ — элемент наилучшего приближения f полиномами Π_n^d в метрике $L^1(\mathbb{S}^d)$. Результаты обобщаются на случай веса Данкля.

Ключевые слова: сферический полином, элемент наилучшего приближения, константа Никольского, вес Данкля.

Библиография: 4 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. О приближении сферическими полиномами в L^p при $p < 1$ // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 453–456.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

Approximation by spherical polynomials in L^p for $p < 1^2$

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

Based on recently proved estimates for the L^1 -Nikolskii constants for $\mathbb{S}^d$ and $\mathbb{R}^d$, effective bounds for the constant K are given in the following inequality of the type Brown–Lucier for functions $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, $0 < p < 1$:

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p,$$

where Π_n^d is the subspace of spherical polynomials, $E_1 f$ is a best approximant of f from Π_n^d in the metric $L^1(\mathbb{S}^d)$. The results are generalized to the case of the Dunkl weight.

Keywords: spherical polynomial, best approximant, Nikolskii constant, Dunkl weight.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii. 2021, "Approximation by spherical polynomials in L^p for $p < 1$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 453–456.

Установим одно интересное неравенство для приближений функций сферическими полиномами в пространстве L^p при $0 < p < 1$, возникшее в связи с работами [1, 3, 4, 2].

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in (0, \infty]$, $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^{d+1}$ с обычной лебеговой мерой dx , $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{S}^d} |f|^p dx)^{1/p}$, Π_n^d — подпространство сферических полиномов порядка не выше n , $C(d, n) = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_1}$ — точная константа Никольского в пространстве $L^1(\mathbb{S}^d)$.

Пусть $0 < p < 1$. Из результатов работы [1] вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([1]). Пусть $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, $E_1 f$ — элемент наилучшего приближения функции f полиномами из Π_n^d в метрике $L^1(\mathbb{S}^d)$ (он существует). Тогда

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p, \quad (1)$$

где

$$K = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_1}.$$

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

В [1] отмечается, что константу $(1 + 2K)^{1/p}$ можно заменить на лучшую $(2K)^{1/p-1}$, однако для доказательства дана ссылка неопубликованную работу. Мы не смогли найти эту работу, поэтому считаем, что данный вопрос открыт. В целом, интерес к неравенствам вида (1) обусловлен тем фактом, что мы можем найти $E_1 f$ методами аппроксимации в L^1 . Например, для $n = 0$ (приближение константами) получаем медиану.

Ясно, что $K = C(d, n)$. Поэтому для придания неравенству (1) заверщенного вида можно применить верхние оценки констант Никольского. В этой связи воспользуемся следующими утверждениями, вытекающими из результатов работ [4, 2] при $p = 1$. Пусть $L(d) = \sup_{f \in \mathcal{E}_1^d \setminus \{0\}} \frac{|f(0)|}{\|f\|_1}$ — точная константа Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1, ограниченных в пространстве $L^1(\mathbb{R}^d)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([4]). Для $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем

$$n^d L(d) \leq C(d, n) \leq (n + \theta_d)^d L(d),$$

где $\theta_1 = 1$, $\theta_d = 2 \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ при $d \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([2]). Для $d \in \mathbb{N}$

$$2^{-d} \leq 2^d \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) L(d) \leq F_d = {}_1F_2\left(\frac{d}{2}; \frac{d}{2} + 1, \frac{d}{2} + 1; -\frac{\beta_d^2}{4}\right),$$

где β_d — первый положительный функции Бесселя $J_{d/2}$. При $d \rightarrow \infty$

$$F_d = (\sqrt{2/e})^{d(1+O(d^{-2/3}))}, \quad \sqrt{2/e} = 0.857 \dots$$

Из предложений 1, 2, 3 немедленно получаем следующее основное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in (0, 1)$ имеем

$$\|f - E_1 f\|_p \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_p,$$

где

$$\frac{n^d}{4^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \leq K = C_1(d, n) \leq \frac{(n + \theta_d)^d F_d}{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)}.$$

При больших d равномерно по n , d имеем

$$\frac{n^d}{(8/e)^{d/2} (\pi d)^{(d+1)/2}} \lesssim K \lesssim \frac{(n + d + 2)^d}{(\pi d)^{(d+1)/2}}.$$

Отметим, что предложение 4 позволяет оценить K в больших размерностях, когда n сравнимо с d . Такие вопросы поднимаются в современной теории информационной сложности.

Предложение 4 обобщается на случай сферического веса Данкля [3]

$$v_\kappa(x) = \prod_{a \in R_+} |\langle a, x \rangle|^{2\kappa(a)}, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1},$$

связанного с системой корней $R \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R , $\kappa: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений.

Пусть $\|f\|_{p,\kappa} = \left(\int_{\mathbb{S}^d} |f|^p v_\kappa dx\right)^{1/p}$. Тогда аналогично предложению 4

$$\|f - E_1 f\|_{p,\kappa} \leq (1 + 2K)^{1/p} \inf_{u \in \Pi_n^d} \|f - u\|_{p,\kappa},$$

где K — весовая константа Никольского $C_\kappa(d, n) = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_{1,\kappa}}$.

В [3] показано, что если размерность Данкля $d_\kappa = d + 2 \sum_{a \in R_+} \kappa(a)$ целая, то

$$C_\kappa(d, n) \leq C(d_\kappa, n).$$

Поэтому в этом случае можно воспользоваться предложением 4 для оценки $K = C_\kappa(d, n)$ сверху.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown L.G., Lucier B.J. Best approximations in L^1 are near best in L^p , $p < 1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 120, no. 1. P. 97–100.
2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101553>.
3. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.
4. Горбачев Д.В., Мартыанов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

REFERENCES

1. Brown L.G., Lucier B.J. Best approximations in L^1 are near best in L^p , $p < 1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 120, no. 1. P. 97–100.
2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101553>.
3. Gorbachev, D.V. & Dobrovolskii, N.N. 2020. “Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307. (In Russ.)
4. Gorbachev, D.V. & Mart’yanov, I.A. 2020. “Bounds of the Nikol’skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

Получено 10.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.