ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.911.5; 517.982.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

Замечание к одной лемме из статьи Филиппова о дифференциальных включениях

Е. Е. Борисенко

Борисенко Евгений Егорович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
email: yevhenii16@yandex.ru

Аннотация

В статье А.Ф. Филиппова рассматривается возможное определение решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью. Из приведенной Филипповым леммы об устройстве множества, определяющего дифференциальное включение, можно вывести эквивалентное определение решения, которое позволяет расширить набор возможных множеств определения и значений функции, стоящей в правой части уравнения.

В этой заметке получено обобщение этой леммы на случай общих топологических пространств и пространств с мерой. Даны полные доказательства соответствующих теорем.

Ключевые слова: дифференциальные включения, регуляризация по Филиппову

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
Е. Е. Борисенко. Замечание к одной лемме из статьи Филиппова о дифференциальных включениях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 448–452.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 517.911.5; 517.982.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-448-452

A remark on a lemma from Filippov's article on differential inclusions

E. E. Borisenko

Borisenko Evgeny Egorovich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
email: yevhenii16@yandex.ru

Abstract

The Filippov's article discusses a possible definition of the solution of differential equation with discontinuous right-hand side. The lemma on the structure of the set defining differential inclusion given by Filippov implies an equivalent solution definition, which allows us to expand possible domains and codomains of the function, that is in the right-hand side of the equation.

In this paper we find a generalization of this lemma to the case of general topologic and measure spaces. Proofs of corresponding theorems are given here.

Keywords: differential inclusions, Filippov's regularization

Bibliography: 7 titles.

For citation:
E. E. Borisenko, 2021, A remark on a lemma from Filippov's article on differential inclusions, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 448–452.

1. Введение

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега μ. Пусть E – область в $\mathbb{R}^n$, $\mu(E) \neq 0$. Оригинальная лемма статьи Филиппова формулируется следующим образом.

Lemma 1 ([1],[2]). *Пусть вектор-функция $f(x)$ определена и измерима на множестве E. Тогда существует такое множество N_0 меры нуль, что*

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(E \backslash N)} = \overline{f(E \backslash N_0)}$$

В статье Филиппова [1] приведён лишь набросок доказательства. В книге [2] при обсуждении этой леммы используется теорема Лузина, которая требует введения топологии в области определения f. Мы докажем обобщенную версию леммы и, в частности, откажемся от этого требования.

Поскольку в оригинальных работах Филиппова приведены лишь идеи доказательства и в виду того, что в последнее время появились работы по дифференциальным включениям в бесконечномерных пространствах (например, [3] и [4]), нам представляется, что данное обобщение может оказаться полезным.

2. Основные теоремы

Теорема 1. *Пусть X – пространство, на котором заданы σ-алгебра и счетно-аддитивная мера μ на этой σ-алгебре, Y – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой топологии $\mathcal{V}$ и борелевской σ-алгеброй и*
$f : X \to Y$ – измеримое отображение. Тогда существует множество $N_0 \subset X$ меры нуль такое, что

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X \backslash N)} = \overline{f(X \backslash N_0)}$$

Лемма 1 является частным случаем этой теоремы при $X = E$ – область в $\mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n$.
Доказательство. Назовем точку $y \in Y$ плохой, если существует открытая окрестность U_y точки y такая, что $\mu(f^{-1}(U_y)) = 0$. Остальные точки в Y назовем хорошими.

Очевидно, что если точка y плохая, то все точки из U_y плохие – можно взять для них окрестность U_y. Обозначим множество плохих точек B. Тогда

$$B = \bigcup_{y \in B} U_y,$$

т.е. B – открытое множество. По второй теореме Линделёфа [5] можно выделить счетное подпокрытие, т.е. существует такая $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$, что

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{y_n}.$$

Обозначим $N_0 := f^{-1}(B)$. Докажем, что это искомое множество.

Сначала проверим, что $\mu(N_0) = 0$. Действительно, в силу измеримости f и счетной-аддитивности меры на X

$$\mu(N_0) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{y_n}\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(U_{y_n})\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(U_{y_n})) = 0.$$

Докажем теперь требуемое равенство $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X\backslash N)} = \overline{f(X\backslash N_0)}$.

Включение $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X\backslash N)} \subset \overline{f(X\backslash N_0)}$ очевидно, так как N_0 – одно из множеств, по которым берется пересечение.

Осталось проверить включение $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X\backslash N)} \supset \overline{f(X\backslash N_0)}$. Покажем, что $\overline{f(X\backslash N_0)}$ не содержит плохих точек. Действительно, в соответствии с [6]

$$f(X\backslash N_0) \cap B = f((X\backslash N_0) \cap f^{-1}(B)) = f((X\backslash N_0) \cap N_0) = f(\emptyset) = \emptyset$$ [1]

Значит, $f(X\backslash N_0) \subset Y\backslash B$. Но множество B открытое, а потому $Y\backslash B$ замкнуто. Следовательно $\overline{f(X\backslash N_0)} \subset Y\backslash B$.

При этом если $y \in Y\backslash B$, то $y \in \overline{f(X\backslash N)}$ для любого $N \subset X$ нулевой меры. Действительно, зафиксируем множество N нулевой меры. Для любой открытой окрестности V хорошей точки y существует x_V, принадлежащая $f^{-1}(V)\backslash N$, поэтому $f(x_V) \in V \cap f(X\backslash N)$, а значит $y \in \overline{f(X\backslash N)}$. В силу произвольности выбора N множество $\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(X\backslash N)}$ содержит все хорошие точки, а поэтому содержит и $\overline{f(X\backslash N_0)}$. $\square$

Remark 2. *Кроме того, мы показали, что $\overline{f(X\backslash N_0)}$ есть в точности множество хороших точек.*

Напомним, что замкнутой выпуклой оболочкой conv A для подмножества A линейного пространства называется наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее A. Тогда верно

Следствие 1. *Если Y, кроме того, является линейным пространством, то верно*

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \operatorname{conv} f(U\backslash N) = \operatorname{conv} f(U\backslash N_0),$$

причем N_0 можно выбрать то же, что и в теореме 1.

Доказательство. Включение

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \operatorname{conv} f(U\backslash N) \subset \operatorname{conv} f(U\backslash N_0)$$

очевидно.

Обратное включение получается применением к обеим частям равенства из теоремы 1 выпуклого замыкания в силу включения

$$\operatorname{conv} \bigcap_{\alpha} U_\alpha \subset \bigcap_{\alpha} \operatorname{conv} U_\alpha.$$

$\square$

[1]Здесь используется формула $f(A) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$ со стр. 22 из [6]

Теорема 2. *Пусть X – топологическое пространство с борелевской σ-алгеброй и мерой μ на ней, причем мера любого непустого открытого множества отлична от нуля, а Y – локально выпуклое хаусдорфово пространство. Пусть $f : X \to Y$ – отображение непрерывное в точке $\tilde{x}$. Тогда*

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \mathrm{conv}\, f(U\backslash N) = \{f(\tilde{x})\},$$

где $\mathcal{U}$ - множество окрестностей точки $\tilde{x}$.

Эта теорема в частном случае, когда $X = E$ – область в $\mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n$, рассматривается Филипповым. Доказательство. Проверим включение $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \mathrm{conv}\, f(U\backslash N) \supset \{f(\tilde{x})\}$. Очевидно, что

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \mathrm{conv}\, f(U\backslash N) \supset \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{f(U\backslash N)}$$

Для любого $U \in \mathcal{U}$ и любого множества $N \subset U$ нулевой меры $\tilde{x} \in \overline{U\backslash N}$. По свойству непрерывных функции [6] $f(\tilde{x}) \in \overline{f(U\backslash N)}$, что доказывает включение.

Проверим теперь включение $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \bigcap_{\mu(N)=0} \mathrm{conv}\, f(U\backslash N) \subset \{f(\tilde{x})\}$. Для любой выпуклой открытой окрестности V точки $f(\tilde{x})$ и любого множества $N \subset X$ нулевой меры из свойств выпуклых множеств (см. [7]) имеем

$$\mathrm{conv}\, f(f^{-1}(V)\backslash N) \subset \mathrm{conv}\,(V) = \overline{V}$$

В силу произвольности выбора V из хаусдорфовости Y получаем требуемое включение. □

3. Благодарности

Автор признателен профессору О.Э.Зубелевичу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Матем. сб., 1960, том 51(93), номер 1, 99-128.

2. Филиппов А.Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.

3. Stewart, D.E. *Formulating Measure Differential Inclusions in Infinite Dimensions.* Set-Valued Analysis 8, 273-293 (2000).

4. А. А. Толстоногов, *О дифференциальных включениях в банаховом пространстве с невыпуклой правой частью. Существование решений*, Сиб. матем. журн., 1981, том 22, номер 4, 182-198

5. П.С.Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 368 стр.

6. К.Куратовский, *Топология*, том 1, Москва, Мир, 1966.

7. А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства.* Москва, Мир, 1967.

REFERENCES

1. A. F. Filippov, 1960, *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Math. col., T. 51(93), № 1, pp. 99-128.
2. A. F. Filippov, 1985, *Differential equations with discontinuous right-hand side.* - M.: Science. Main editorial office of physical and mathematical literature.
3. Stewart, D.E, 2000, *Formulating Measure Differential Inclusions in Infinite Dimensions.* Set-Valued Analysis 8, pp. 273-293.
4. A. A. Tolstonogov, 1981, *Differential inclusions in a Banach space with nonconvex right-hand side. Existence of solutions*, Sib. Math. Journal, T. 22, № 4, pp. 182-198.
5. P. S. Alexandrov, 1977, *Introduction to set theory and general topology*, Main edition of physical and mathematical literature of the publishing house "Nauka", M.,368 p.
6. K. Kuratovskiy, 1966, *Topology*, T. 1, Moscow, "Mir 1966.
7. A. Robertson, V. Robertson, 1967, *Topological vector spaces.* Moscow, "Mir".

Получено 10.05.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.