

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-423-437

Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием¹

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении и преломлении плоской гармонической звуковой волны однородной изотропной упругой пластиной с непрерывно неоднородным анизотропным упругим покрытием.

Полагается, что пластина граничит с идеальными однородными жидкостями.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца. Распространение упругих волн в однородной изотропной упругой пластине описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца для продольных и поперечных волн. Колебания неоднородного анизотропного упругого покрытия описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Для нахождения поля смещений в неоднородном анизотропном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Получено аналитическое описание отраженного и прошедшего через пластину акустических полей.

Рассмотрены частные случаи, когда материал неоднородного покрытия является трансверсально-изотропным и изотропным.

Представлены результаты численных расчетов зависимости коэффициента отражения однородной изотропной пластины с трансверсально-изотропным покрытием от угла падения плоской волны.

Ключевые слова: звуковые волны, отражение и преломление, упругая пластина, неоднородное анизотропное упругое покрытие.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 423–437.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-423-437

Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating²

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols@mail.ru

Abstract

In paper the problem of the reflection and refraction of a plane harmonic sound wave by a homogeneous isotropic elastic plate with an continuously inhomogeneous anisotropic elastic coating is considered.

It is assumed that the plate is adjoin to ideal fluids.

The propagation of small perturbations in a ideal fluid in the case of steady state oscillations is described by Helmholtz's equation. The propagation of elastic waves in a uniform isotropic elastic plate is described by scalar and vector Helmholtz's equations for longitudinal and transverse waves. Oscillations of an inhomogeneous anisotropic elastic coating are described by general motion equations of the continuous medium.

The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous anisotropic coating.

An analytical description of the reflected and transmitted through the plate acoustic fields is obtained.

Particular cases when the material of an inhomogeneous coating is transversely isotropic and isotropic are considered.

The results of numerical calculations of dependence of reflection coefficient of a homogeneous isotropic plate with a transversely isotropic coating from the incidence angle of plane wave are presented.

Keywords: sound waves, reflection and refraction elastic plate, inhomogeneous anisotropic elastic coating.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2021, "Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423–437.

²Acknowledgments: The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

1. Введение

Задача об отражении и прохождении звука через плоский однородный изотропный упругий слой рассматривалась во многих работах, например, в [1, 2]. В работах [3, 4] изучено отражение звука однородными анизотропными упругими пластинами. В [5, 6] осуществлен учет термоупругости однородного изотропного плоского слоя при прохождении плоской звуковой волны. Прохождение звуковых волн через плоские неоднородные упругие слои исследовано в [7 – 9]. В [7] слой полагался изотропным, а в [8, 9] — трансверсально-изотропным. В [10, 11] решены задачи об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. В [10] граничащие со слоем жидкости полагались идеальными, а в [11] — вязкими. Прохождение плоской звуковой волны через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, исследовано в [12, 13]. Обратные задачи об определении параметров неоднородности материала плоского упругого слоя по отражению и прохождению звука решены в [14, 15].

Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны однородной изотропной упругой пластиной с изотропным и неоднородным по толщине покрытием рассмотрена в [16 – 18]. Граничащие с пластиной жидкости полагались идеальными [16, 17] и вязкими [18]. Осуществлено моделирование неоднородного изотропного покрытия упругой [19] и термоупругой [20] пластин с оптимальными звукоотражающими свойствами. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного изотропного покрытия конечной однородной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения звука, решена в [21].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным анизотропным покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного анизотропного упругого слоя толщиной h . Введем декартову систему прямоугольных координат x_1, x_2, x_3 с осью x_1 , лежащей в плоскости, разделяющей однородную пластину и неоднородное покрытие и осью x_3 , направленной вниз по нормали к поверхности пластины (рис.1). Полагаем, что модули упругости λ_{ijkl} материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями координаты x_3 , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты x_3 : $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(x_3)$, $\rho = \rho(x_3)$.

Поверхности покрытия $x_3 = -h$ и однородной пластины $x_3 = H$ граничат с идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $x_3 < -h$ на пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская гармоническая звуковая волна, волновой вектор \mathbf{k}_1 которой лежит в плоскости x_1, x_3 . Потенциал скорости падающей волны равен

$$\psi_0 = A_0 \exp\{i[k_{11}x + k_{13}(x_3 + h) - \omega t]\}, \quad (2.1)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{11} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{13} = k_1 \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора \mathbf{k}_1 на оси координат x_1 и x_3 соответственно; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $x_3 < -h$; ω — круговая частота; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью x_3 ; t — время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

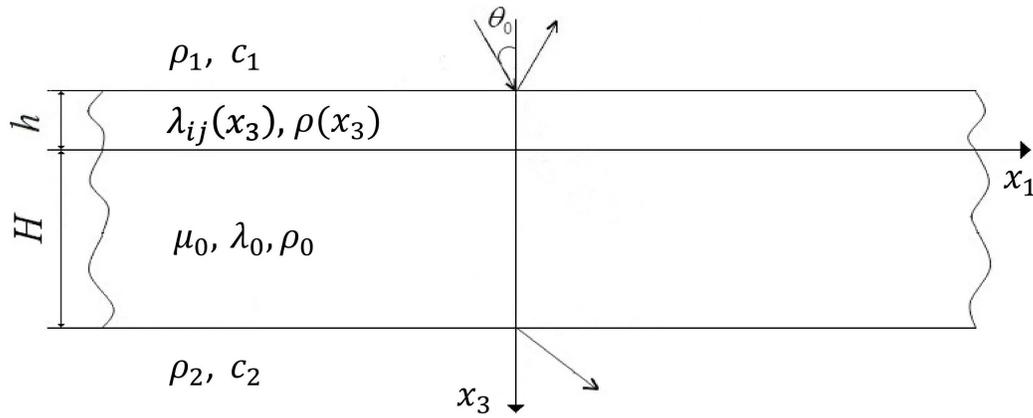


Рис. 1: Геометрия задачи

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также волновые поля в пластине и ее покрытии.

3. Математическая модель задачи

Так как волновой вектор падающей волны \mathbf{k}_1 лежит в плоскости x_1, x_3 и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты x_2 , а неоднородность материала покрытия проявляется лишь по оси x_3 , то от координаты x_2 не будут зависеть ни отраженное, ни прошедшее через пластину, ни возбужденные в однородной пластине и в неоднородном покрытии волновые поля.

Потенциалы скоростей отраженной от пластины с покрытием и прошедшей через нее волн ψ_1 и ψ_2 в случае установившегося режима колебаний являются решениями уравнений Гельмгольца [1, 2]

$$\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $x_3 > H$.

Вектор скорости частиц жидкости и акустическое давление в полупространствах $x_3 < -h$ и $x_3 > H$ определяются по формулам

$$\mathbf{v}^{(1)} = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1)$$

и

$$\mathbf{v}^{(2)} = \text{grad}\psi_2, \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в однородной изотропной упругой пластине описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн, которые в случае установившихся колебаний переходят в уравнения Гельмгольца [1]

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad (3.2)$$

$$\Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (3.3)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц в упругой однородной пластине

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad}\Psi + \text{rot}\Phi. \quad (3.4)$$

Векторное уравнение (3.3) эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$\Delta\Phi_j + k_7^2\Phi_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

относительно трех составляющих Φ_1, Φ_2, Φ_3 вектора Φ .

Составляющие вектора $\mathbf{u}^{(0)} = u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}$. Они являются тремя искомыми функциями, а система уравнений (3.2) и (3.4) представляет собой систему четырех скалярных уравнений относительно четырех скалярных функций Ψ, Φ_j ($j = 1, 2, 3$). Чтобы полностью определить эти четыре функции при подчинении решения системы (3.2), (3.5) граничным условиям, необходимо привлечь еще одно дополнительное условие. Этим условием может служить равенство [1]

$$\operatorname{div} \Phi = 0. \quad (3.6)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ в однородной изотропной среде связаны с составляющими $u_j^{(0)}$ ($j = 1, 2, 3$) вектора смещения $\mathbf{u}^{(0)}$ соотношениями [1]

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \lambda_0 \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} + \mu_0 \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad (3.7)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Согласно (3.4) имеем

$$u_1^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad u_2^{(0)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}, \quad u_3^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}. \quad (3.8)$$

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [22], которые при отсутствии массовых сил, с учетом временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ и отсутствия зависимости волновых полей от координаты x_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= -\rho\omega^2 u_1, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= -\rho\omega^2 u_2, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= -\rho\omega^2 u_3, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в покрытии; u_j ($j = 1, 2, 3$) — проекции вектора смещения \mathbf{u} на оси координат x_j .

В общем случае анизотропии компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций ε_{kl} следующим образом (обобщенный закон Гука) [22]:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \varepsilon^{kl}.$$

Учитывая симметрию тензора модулей упругости по индексам i, j и по индексам k, l [22], имеем

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ij11} \varepsilon_{11} + \lambda_{ij22} \varepsilon_{22} + \lambda_{ij33} \varepsilon_{33} + 2\lambda_{ij23} \varepsilon_{23} + 2\lambda_{ij13} \varepsilon_{13} + 2\lambda_{ij12} \varepsilon_{12}, \quad (3.10)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.11)$$

В дальнейшем воспользуемся двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik} , где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

На поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления

$$-i\omega u_3 = v_{1n}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_1 \quad \text{при } x_3 = -h, \quad (3.12)$$

$$-i\omega u_3^{(0)} = v_{2n}, \quad \sigma_{13}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(0)} = -p_2 \quad \text{при } x_3 = H, \quad (3.13)$$

где $v_{1n} = \partial(\psi_0 + \psi_1)/\partial x_3$ и $v_{2n} = \partial\psi_2/\partial x_3$ — нормальные компоненты скоростей частиц жидкостей в полупространствах $x_3 < -h$ и $x_3 > H$ соответственно.

На поверхности $x_3 = 0$, разделяющей однородную пластину и неоднородное покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$u_1 = u_1^{(0)}, \quad u_2 = u_2^{(0)}, \quad u_3 = u_3^{(0)}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^{(0)}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^{(0)}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(0)} \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (3.14)$$

Искомые величинами являются $\psi_1(x_1, x_3)$, $\psi_2(x_1, x_3)$, $\Psi(x_1, x_3)$, $\Phi_j(x_1, x_3)$, $u_j(x_1, x_3)$ ($j = 1, 2, 3$). Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решений уравнений (3.1), (3.2), (3.5), (3.6), (3.9), удовлетворяющих граничным условиям (3.12) — (3.14).

4. Аналитическое решение задачи

Решения уравнений (3.1), (3.2) и (3.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \exp\{i[k_{11}x_1 - k_{13}(x_3 + h)]\}, \\ \psi_2 &= A_2 \exp\{i[k_{21}x_1 + k_{23}(x_3 - H)]\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Psi = B_1 \exp[i(k_{l1}x_1 + k_{l3}x_3)] + B_2 \exp[i(k_{l1}x_1 - k_{l3}x_3)], \quad (4.2)$$

$$\Phi_j = C_{1j} \exp[i(k_{\tau 1}x_1 + k_{\tau 3}x_3)] + C_{2j} \exp[i(k_{\tau 1}x_1 - k_{\tau 3}x_3)] \quad (j = 1, 2, 3), \quad (4.3)$$

где k_{21}, k_{23} — проекции волнового вектора \mathbf{k}_2 волны, прошедшей через пластину, на оси x_1 и x_3 ; $k_{23} = \sqrt{k_2^2 - k_{21}^2}$; $k_{l3} = \sqrt{k_l^2 - k_{l1}^2}$; $k_{\tau 3} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau 1}^2}$.

Согласно закону Снеллиуса, заключающемуся в требовании равенства фазовых скоростей распространения волн вдоль границы раздела двух сред [2, 23], имеем

$$k_{21} = k_{l1} = k_{\tau 1} = k_{11}. \quad (4.4)$$

Так как зависимость всех компонент движения от координаты x_1 будет иметь вид $\exp(ik_{11}x_1)$, то и составляющие вектора \mathbf{u} будем искать в виде

$$u_j = U_j(x_3) \exp(ik_{11}x_1), \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

Из (3.5) получаем

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}. \quad (4.6)$$

Подставим (4.3) в (4.6). С учетом (4.4) находим

$$C_{13} = -\frac{k_{11}}{k_{\tau 3}} C_{11}, \quad C_{23} = \frac{k_{11}}{k_{\tau 3}} C_{21}. \quad (4.7)$$

Таким образом, коэффициентами, подлежащими определению из граничных условий, являются A_j, B_j, C_{1j} и C_{2j} ($j = 1, 2$).

На основании (3.7) и (3.8) и учитывая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = \Delta \Psi = -k_l^2 \Psi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= -\lambda_0 k_l^2 \Psi + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \\ \sigma_{12}^{(0)} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1^2} \right), \quad \sigma_{22}^{(0)} = -\lambda_0 k_l^2 \Psi, \\ \sigma_{33}^{(0)} &= -\lambda_0 k_l^2 \Psi + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \\ \sigma_{13}^{(0)} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \quad \sigma_{23}^{(0)} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Теперь получим уравнения для искомым функций $U_j(x_3)$ ($j = 1, 2, 3$). Подставим выражения (4.5) в соотношения (3.9). Затем полученные выражения для ε_{ij} подставим в (3.8). В результате компоненты тензора напряжений запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= [s\lambda_{11}U_1 + \lambda_{13}U_3' + \lambda_{14}U_2' + \lambda_{15}(U_1' + sU_3) + s\lambda_{16}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{22} &= [s\lambda_{21}U_1 + \lambda_{23}U_3' + \lambda_{24}U_2' + \lambda_{25}(U_1' + sU_3) + s\lambda_{26}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{33} &= [s\lambda_{31}U_1 + \lambda_{33}U_3' + \lambda_{34}U_2' + \lambda_{35}(U_1' + sU_3) + s\lambda_{36}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{23} &= [s\lambda_{41}U_1 + \lambda_{43}U_3' + \lambda_{44}U_2' + \lambda_{45}(U_1' + sU_3) + s\lambda_{46}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{13} &= [s\lambda_{51}U_1 + \lambda_{53}U_3' + \lambda_{54}U_2' + \lambda_{55}(U_1' + sU_3) + s\lambda_{56}U_2]e^{ik_{11}x}, \\ \sigma_{12} &= [s\lambda_{61}U_1 + \lambda_{62}U_3' + \lambda_{64}U_2' + \lambda_{65}(U_1' + sU_3) + s\lambda_{66}U_2]e^{ik_{11}x}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $s = ik_{11}$, а штрихи здесь и ниже обозначают производные по координате x_3 .

Подставляя выражения (4.5) и (4.9) в уравнения движения (3.9), получим следующую систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_1(x_3)$, $U_2(x_3)$, $U_3(x_3)$:

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}'' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{C}}\mathbf{U} = 0, \quad (4.10)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$; $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ — матрицы третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \lambda_{55} & \lambda_{54} & \lambda_{53} \\ \lambda_{45} & \lambda_{44} & \lambda_{43} \\ \lambda_{35} & \lambda_{34} & \lambda_{33} \end{pmatrix}; \\ \hat{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \lambda'_{55} + 2s\lambda_{51} & \lambda'_{54} + s(\lambda_{56} + \lambda_{14}) & \lambda'_{53} + s(\lambda_{55} + \lambda_{13}) \\ \lambda'_{45} + s(\lambda_{41} + \lambda_{65}) & \lambda'_{44} + 2s\lambda_{64} & \lambda'_{43} + s(\lambda_{45} + \lambda_{63}) \\ \lambda'_{35} + s(\lambda_{31} + \lambda_{55}) & \lambda'_{34} + s(\lambda_{36} + \lambda_{54}) & \lambda'_{33} + 2s\lambda_{35} \end{pmatrix}; \\ \hat{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} s\lambda'_{51} + s^2\lambda_{11} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{56} + s^2\lambda_{16} & s\lambda'_{55} + s^2\lambda_{15} \\ s\lambda'_{41} + s^2\lambda_{61} & s\lambda'_{46} + s^2\lambda_{66} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{45} + s^2\lambda_{65} \\ s\lambda'_{31} + s^2\lambda_{51} & s\lambda'_{36} + s^2\lambda_{56} & s\lambda'_{35} + s^2\lambda_{55} + \rho\omega^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставим выражения (4.1) и (4.5) в первое граничное условие (3.12). Получаем выражение для коэффициента отражения A_1

$$A_1 = A_0 + \frac{\omega}{k_{13}}U_3(-h). \quad (4.11)$$

Из первого граничного условия (3.13) находим коэффициент прохождения A_2 , выраженный через коэффициенты B_1 , B_2 , C_{12} и C_{22}

$$A_2 = \frac{i\omega k_{l3}}{k_{23}} \left(-B_1 e^{ik_{l3}H} + B_2 e^{-ik_{l3}H} \right) - \frac{i\omega k_{11}}{k_{23}} \left(C_{12} e^{ik_{\tau 3}H} + C_{22} e^{-ik_{\tau 3}H} \right). \quad (4.12)$$

Из последних трех граничных условий (3.12) получаем три краевых условия для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (4.10)

$$(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{U})_{x_3=-h} = \hat{\mathbf{D}}, \quad (4.13)$$

где

$$\hat{\mathbf{E}} = s \begin{pmatrix} \lambda_{51} & \lambda_{56} & \lambda_{55} \\ \lambda_{41} & \lambda_{46} & \lambda_{45} \\ \lambda_{31} & \lambda_{36} & \lambda_{35} + \frac{i\rho_1\omega^2}{sk_{l3}} \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{D}} = (0; 0; -2i\rho_1\omega A_0)^T.$$

Учитывая (4.11) и (4.12), из последних трех условий (3.13) и первых трех условий (3.14) получаем две системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{K}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{L}, \quad (4.15)$$

где $\mathbf{x} = (B_1, B_2, C_{12}, C_{22})^T$; $\mathbf{y} = (C_{11}, C_{21})^T$; $\mathbf{K} = (U_1(0), U_3(0), 0, 0)^T$; $\mathbf{L} = (U_2(0), 0)^T$;
 $\mathbf{V} = (v_{pq})_{4 \times 4}$, $\mathbf{W} = (w_{pq})_{2 \times 2}$ — матрицы с элементами

$$v_{11} = v_{12} = ik_{11}, \quad v_{13} = -v_{14} = -ik_{\tau 3},$$

$$v_{21} = -v_{22} = ik_{l3}, \quad v_{23} = v_{24} = ik_{11},$$

$$v_{31} = \left(-\lambda_0 k_l^2 - 2\mu_0 k_{l3}^2 + \frac{\rho_2 \omega^2 k_{l3}}{k_{23}} \right) e^{ik_{l3}H}, \quad v_{32} = \left(-\lambda_0 k_l^2 - 2\mu_0 k_{l3}^2 - \frac{\rho_2 \omega^2 k_{l3}}{k_{23}} \right) e^{-ik_{l3}H},$$

$$v_{33} = \left(-2\mu_0 k_{11} k_{\tau 3} + \frac{\rho_2 \omega^2 k_{11}}{k_{23}} \right) e^{ik_{\tau 3}H}, \quad v_{34} = \left(2\mu_0 k_{11} k_{\tau 3} + \frac{\rho_2 \omega^2 k_{11}}{k_{23}} \right) e^{-ik_{\tau 3}H},$$

$$v_{41} = -2k_{11} k_{l3} e^{ik_{l3}H}, \quad v_{42} = 2k_{11} k_{l3} e^{-ik_{l3}H}, \quad v_{43} = (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2) e^{ik_{\tau 3}H}, \quad v_{44} = (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2) e^{-ik_{\tau 3}H},$$

$$w_{11} = -w_{12} = i \left(k_{\tau 3} + \frac{k_{11}^2}{k_{\tau 3}} \right), \quad w_{21} = -(k_{\tau 3}^2 + k_{11}^2) e^{ik_{\tau 3}H}, \quad w_{22} = -(k_{\tau 3}^2 + k_{11}^2) e^{-ik_{\tau 3}H}.$$

Из системы (4.14) видно, что ее решение зависит от величин $U_1(0)$ и $U_3(0)$. Поэтому представим коэффициенты B_1 , B_2 , C_{12} и C_{22} в виде

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_1 U_1(0) + \alpha_2 U_3(0), & B_2 &= \alpha_3 U_1(0) + \alpha_4 U_3(0), \\ C_{12} &= \beta_1 U_1(0) + \beta_2 U_3(0), & C_{22} &= \beta_3 U_1(0) + \beta_4 U_3(0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подставим (4.16) в (4.14) и приравняем коэффициенты перед $U_1(0)$ и $U_3(0)$, стоящие в левой и правой частях каждого уравнения. Приходим к двум системам линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}\mathbf{z}_j = \mathbf{M}_j \quad (j = 1, 2),$$

где $\mathbf{z}_1 = (\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3)^T$; $\mathbf{z}_2 = (\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4)^T$; $\mathbf{M}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{M}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, из которых определяем α_j и β_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Из (4.15) находим

$$C_{11} = rU_2(0), \quad C_{21} = -rU_2(0), \quad (4.17)$$

где $r = \frac{-ik_{\tau 3}}{2(k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)}$.

Теперь из последних трех граничных условий (3.13) получим еще три краевых условия для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (4.10). Учитывая (4.16) и (4.17), будем иметь

$$(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{F}}\mathbf{U})_{x_3=0} = 0, \quad (4.18)$$

где

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_{11} & s\lambda_{56} & f_{13} \\ s\lambda_{41} & s\lambda_{46} & s\lambda_{45} \\ f_{31} & s\lambda_{36} & f_{33} \end{pmatrix};$$

$$f_{11} = s\lambda_{51} - \mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_1 + \alpha_3) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_1 + \beta_3)],$$

$$f_{13} = s\lambda_{55} - \mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_2 + \alpha_4) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_2 + \beta_4)],$$

$$f_{31} = s\lambda_{31} + (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_1 + \alpha_3) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_1 - \beta_3),$$

$$f_{33} = s\lambda_{35} + (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_2 + \alpha_4) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_2 - \beta_4).$$

Таким образом, для определения волновых полей в пластине и вне ее сначала необходимо решить краевую задачу (4.10), (4.13), (4.18) каким-либо методом (например, [8, 10, 12, 16]), а затем найти коэффициенты, стоящие в выражениях (4.1) – (4.3).

5. Частные случаи

Рассмотрим случай, когда упругое неоднородное покрытие является трансверсально-изотропным. Для трансверсально-изотропной среды число независимых модулей упругости равно пяти [22]. Это λ_{11} , λ_{12} , λ_{13} , λ_{33} , λ_{44} . При этом

$$\lambda_{22} = \lambda_{11}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{13}, \quad \lambda_{55} = \lambda_{44}, \quad \lambda_{66} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2. \quad (5.1)$$

Для такой анизотропии тензор модулей упругости при условии, что ось x_3 прямоугольной декартовой системы координат направлена по оси упругой симметрии, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{11} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{13} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнения обобщенного закона Гука (3.10) существенно упрощаются.

При слоистой неоднородности покрытия, когда механические характеристики материала изменяются только в направлении оси упругой симметрии, плоскости, нормальные к оси упругой симметрии, являясь однородными поверхностями, одновременно являются плоскостями изотропии.

В этом случае $u_2 = 0$. Так как $U_2(x_3) \equiv 0$, то $C_{11} = C_{21} = C_{13} = C_{23} = 0$, что следует из (4.17) и (4.7). Поэтому $\Phi = (0, \Phi_2, 0)$.

Так как

$$\lambda_{34} = \lambda_{35} = \lambda_{36} = \lambda_{41} = \lambda_{43} = \lambda_{45} = \lambda_{46} = 0,$$

$$\lambda_{51} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = \lambda_{56} = \lambda_{64} = \lambda_{65} = 0,$$

то система (4.10) переходит в систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений. Краевые условия (4.13) и (4.18) также существенно упрощаются. С учетом (5.1) матрицы $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\mathbf{D}}$ принимают вид

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_{44} & 0 \\ 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \lambda'_{44} & s(\lambda_{13} + \lambda_{44}) \\ s(\lambda_{13} + \lambda_{44}) & \lambda'_{33} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} s^2\lambda_{11} + \rho\omega^2 & s\lambda'_{44} \\ s\lambda'_{13} & s^2\lambda_{44} + \rho\omega^2 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{D}} = (0; -2i\rho_1\omega A_0)^T; \quad \hat{\mathbf{E}} = s \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{44} \\ \lambda_{13} & \frac{i\rho_1\omega^2}{sk_{13}} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{13} \\ \tilde{f}_{31} & \tilde{f}_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{f}_{11} = -\mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_1 + \alpha_3) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_1 + \beta_3)],$$

$$\tilde{f}_{13} = s\lambda_{44} - \mu_0 [2k_{11}k_{l3}(-\alpha_2 + \alpha_4) + (-k_{11}^2 + k_{\tau 3}^2)(\beta_2 + \beta_4)],$$

$$\tilde{f}_{31} = s\lambda_{13} + (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_1 + \alpha_3) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_1 - \beta_3),$$

$$\tilde{f}_{33} = (\lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{l3}^2)(\alpha_2 + \alpha_4) + 2\mu_0 k_{11}k_{\tau 3}(\beta_2 - \beta_4).$$

Отметим, что в случае изотропного упругого покрытия [22]

$$\lambda_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

где λ и μ — упругие коэффициенты Ламе. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= \lambda + 2\mu && \text{при } i \leq 3; \\ \lambda_{ii} &= \mu && \text{при } i > 3; \\ \lambda_{ij} &= \lambda && \text{при } i \neq j, \quad i \leq 3 \text{ и } j \leq 3; \\ \lambda_{ij} &= 0 && \text{при } i \neq j, \quad i > 3 \text{ или } j > 3. \end{aligned}$$

Таким образом, из решения рассмотренной задачи для случая трансверсально-изотропного покрытия легко получить решение для покрытия из изотропного материала. Достаточно положить $\lambda_{11} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{12} = \lambda$, $\lambda_{13} = \lambda$, $\lambda_{33} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{44} = \mu$, где λ и μ — коэффициенты Ламе изотропного материала.

6. Численные исследования

Были проведены расчеты коэффициента отражения $|A_1/A_0|$ однородной изотропной пластины с трансверсально-изотропным покрытием. Исследовались угловые зависимости.

Полагалось, что пластина находится в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с), амплитуда падающей волны равна единице. Однородная пластина толщиной $H = 1$ м имеет следующие характеристики: $\rho_0 = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь).

Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\bar{\rho} = 7,1 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\bar{\lambda}_{11} = 16,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{33} = 6,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{44} = 3,83 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{13} = 5,01 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\lambda}_{12} = 3,42 \cdot 10^{10}$ Н/м² (цинк), так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \bar{\rho}f(x_3) \quad \lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij}f(x_3).$$

Был проанализирован закон неоднородности вида

$$f(x_3) = a \left[\left(\frac{x_3 + h}{h} \right)^2 + 1 \right],$$

где множитель a выбран так, чтобы среднее значение функции $f(x_3)$ по толщине слоя было равно единице ($a = 0,75$). При этом в неоднородном слое максимум функции $f(x_3)$ достигается при $x_3 = 0$ и минимум — при $x_3 = -h$.

Краевая задача (4.10), (4.13), (4.18) решена методом сведения ее к задачам с начальными условиями (например, [10]).

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны θ_0 при фиксированном волновом размере пластины $k_1 H = 10$, когда отношение толщины покрытия h к толщине однородного слоя H равно 0,2. Сплошная линия соответствует случаю неоднородного покрытия, пунктирная — однородному покрытию.

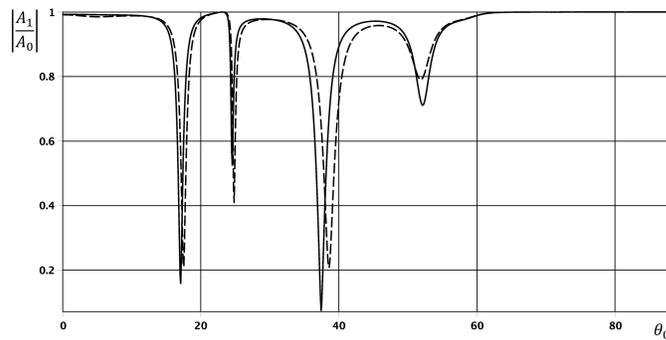


Рис. 2: Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для неоднородного и однородного покрытий

Анализируя угловые характеристики коэффициента отражения для неоднородного и однородного покрытий пластины замечаем, что неоднородность материала трансверсально-изотропного покрытия приводит к заметному изменению картины отражения. Наблюдаем смещение резонансов и изменение их уровней.

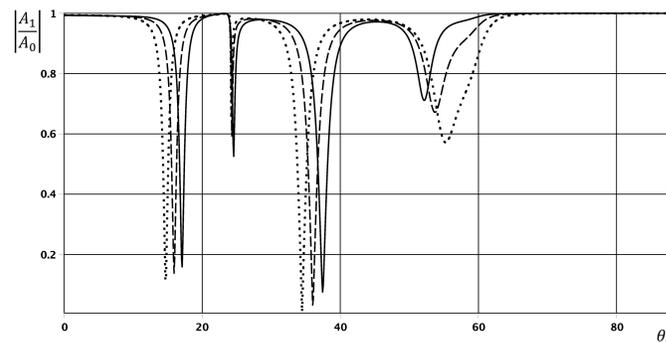


Рис. 3: Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий разной толщины

На фиг. 3 приведены угловые зависимости, рассчитанные для случая пластины с неоднородным покрытием при разных значениях толщины покрытия. Сплошная, штриховая и пунктирные линии соответствуют значениям $h/H = 0,2$, $h/H = 0,15$ и $h/H = 0,1$ соответственно.

При изменении толщины неоднородного трансверсально-изотропного покрытия существенно изменяется форма угловой характеристики.

7. Заключение

Полученное аналитическое решение задачи позволяет исследовать отражение и прохождение звука через однородную изотропную упругую пластину с покрытием из материала с разными видами неоднородности и типами анизотропии. Создание покрытий с соответствующими параметрами неоднородности и анизотропии дает возможность достигать требуемые звукоотражающие свойства пластин.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
3. Лонкевич М. П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85 – 92.
4. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122 – 129.
5. Ларин Н. В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145 – 153.
6. Ларин Н. В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109 – 123.
7. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212 – 218.
8. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740 – 744.
9. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78 – 83.
10. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика, 1999. Т. 40. № 5. С. 179 – 184.
11. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029 – 1035.
12. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650 – 659.

13. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108 – 116.
14. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 552 – 558.
15. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246 – 257.
16. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.
17. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.
18. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 311 – 324.
19. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.
20. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.
21. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.
22. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
23. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

REFERENCES

1. Shenderov, E. L. 1972, “Wave problems of underwater acoustics”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
2. Brekhovskikh, L. M. 1973, “Waves in Layered Media”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
3. Lonkevitch, M. P. 1971, “Transmission of sound through a finite-thickness layer of a transversal-isotropic materia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 17, no 1, pp. 85 – 92, [in Russian].
4. Shenderov, E. L. 1984, “Sound propagation through transversally-isotropic plate”, *Akust. Zhurnal*, vol. 30, no 1, pp. 122 – 129, [in Russian].
5. Larin, N. V. 2015, “The transmission of sound through a uniform thermoelastic plane layer”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 145 – 153, [in Russian].

6. Larin, N. V. 2017, "Analysis of the resonance sound scattering by a thermoelastic plate", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 109 – 123, [in Russian].
7. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, "Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 212 – 218, [in Russian].
8. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, "Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer", *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 4, pp. 740 – 744, [in Russian].
9. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, "Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate", *Defektoskopiya*, no 8, pp. 78 – 83, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 1999, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no 5, pp. 936 – 941.
11. Tolokonnikov, L. A. 1998, "The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 62, no 6, pp. 953 – 958.
12. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, "The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no 4, pp. 590 – 598.
13. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, "Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 1, pp. 95 – 102.
14. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the Inhomogeneity Laws for an Elastic Layer with Preset Sound-Reflecting Properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no 5, pp. 504 – 510.
15. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining the parameters of anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7-2, pp. 246 – 257, [in Russian].
16. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 219 – 226, [in Russian].
17. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 362 – 372, [in Russian].
18. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 2, pp. 311 – 324, [in Russian].
19. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no 4, pp. 339 – 344.
20. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 11-2, pp. 216 – 234, [in Russian].
21. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7, pp. 83 – 92, [in Russian].

-
22. Nowacki, W. 1975, "*Teoria sprężystości*", Mir, Moscow, 872 p., [in Russian].
 23. М.А. Isakovich, М.А. 1973 "*General acoustics*", Nauka, Moscow, 496 p., [in Russian].

Получено 07.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.