ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.321

О НЕЛИНЕЙНОЙ СУММЕ КЛООСТЕРМАНА[1]

М. А. Королёв (г. Москва)

Аннотация

Во многих задачах теории чисел, связанных с распределением обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю q, большую роль играют оценки тригонометрических сумм специального вида, которые называются суммами Клоостермана. В свою очередь, оценки таких сумм зачастую опираются на оценку А. Вейля т.н. полной суммы Клоостермана по простому модулю. Последняя позволяет оценивать со степенным понижением суммы Клоостермана, число N слагаемых в которых превышает величину $q^{0.5+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число. Оценка А. Вейля была получена средствами алгебраической геометрии. Позже С. А. Степановым было найдено элементарное её доказательство, также достаточно сложное. Цель настоящей заметки — дать элементарный вывод оценки суммы Клоостермана, также позволяющий получить степенное понижение в случае $N \geqslant q^{0.5+\varepsilon}$. Этот вывод основан на использовании т.н. "аддитивного сдвига" переменной суммирования, который широко используется в различных задачах теории чисел.

Ключевые слова: обратные вычеты, суммы Клоостермана, оценка Вейля.

Библиография: 15 названий.

ON NON-LINEAR KLOOSTERMAN SUM

M. A. Korolev (Moscow)

Abstract

Exponential sums of a special type — so-called Kloosterman sums — play key role in the series of number-theoretic problems concerning the distribution of inverse residues in the residual rings of given modulo q. At the same time, in many cases, the estimates of such sums are based on A. Weil's bound of so-called complete Kloosterman sum of prime modulo. This bound allows one to estimate Kloosterman sums of length $N \geqslant q^{0.5+\varepsilon}$ for any fixed $\varepsilon > 0$ with power-saving factor. Weil's bound was proved originally by methods of algebraic geometry. Later, S. A. Stepanov gave an elementary proof of this bound, but this proof was also complete enough. The aim of this paper is to give an elementary proof of Kloosterman sum of length $N \geqslant q^{0.5+\varepsilon}$, which also leads to power-saving factor. This proof is based on the trick of "additive shift" of the variable of summation which is widely used in different problems of number theory.

Keywords: inverse residues, Kloosterman sums, Weil's bound.

Bibliography: 15 titles.

Памяти Сергея Михайловича Воронина
и Геннадия Ивановича Архипова

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00433).

1. Введение

Суммой Клоостермана по модулю $q > 2$ называется тригонометрическая сумма вида

$$\sum_{n\in A} e_q(an^* + bn) \;=\; \sum_{n\in A} e_q\Big(\frac{a}{n} + bn\Big), \tag{1}$$

где $e_q(u) = e^{2\pi iu/q}$, a, b — целые числа, $a \not\equiv 0 \pmod q$, $n^* = 1/n$ — решение сравнения $nn^* \equiv 1 \pmod q$, A — некоторое подмножество приведённой системы вычетов $\mathbb{Z}_q^*$ по модулю q. Если $A \neq \mathbb{Z}_q^*$ то сумма (1) называется неполной; если число $|A|$ элементов множества, по которому ведётся суммирование, удовлетворяет неравенству $|A| < q^{1-c}$, где $0 < c < 1$ — некоторая постоянная, то сумма (1) называется короткой.

Полные суммы Клоостермана

$$S(q; a, b) \;=\; \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} e_q(an^* + bn) \tag{2}$$

обладают свойством мультипликативности. Именно, если $q_1q_2 = q$, где $(q_1, q_2) = 1$, то $S(q_1; a_1, b)S(q_2; a_2, b) = S(q; a, b)$ при некотором целом a, зависящем от q_1, q_2, a_1 и a_2 (см., например, [1, решение вопроса 7 δ) к гл. IV]). Поэтому исследование полных сумм сводится к случаю, когда $q = p^\alpha$ — степень простого числа. Если $\alpha > 1$, то для сумм (2) элементарными методами (см. [2],[3]) получается оценка вида

$$|S(q; a, b)| \;\leqslant\; \tau(q)(a, b, q)^{1/2}\sqrt{q}. \tag{3}$$

В случае $\alpha = 1$, то есть когда модуль q является простым числом, при $(a, q) = 1$ оценка (3) была впервые доказана А. Вейлем [4] методами алгебраической геометрии. Элементарное, но также достаточно сложное доказательство оценки (3) было найдено С. А. Степановым [5].

В случае, когда $(a, q) = 1$, следствием всех перечисленных результатов является оценка неполной суммы вида

$$\sideset{}{'}\sum_{c<n\leqslant c+N} e_q(an^* + bn) \ll \tau(q)\sqrt{q}\ln q, \tag{4}$$

где c — произвольное число, а штрих означает, что $(n, q) = 1$. Ввиду неравенства $\tau(q) \ll_\varepsilon q^\varepsilon$ оценка (4) нетривиальна при $N \geqslant q^{0.5+\varepsilon}$.

Между тем, для решения некоторых задач теории чисел для сумм (4) достаточно иметь оценку вида

$$\sideset{}{'}\sum_{c<n\leqslant c+N} e_q(an^* + bn) \ll Nq^{-\delta}, \tag{5}$$

где $(a, q) = 1$, $N \geqslant q^{0.5+\varepsilon}$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Примером может служить задача о распределении в кольце $\mathbb{Z}_q$ вычетов чисел вида $ap^* + bp$ в случае, когда величина p пробегает простые числа промежутка $(1, N]$. Для её решения необходимы оценки двойных сумм, простейшими из которых являются суммы типа

$$W \;=\; \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{V<v\leqslant V_1} e_q(a_1u^*v^* + b_1uv), \quad (a_1, q) = 1, \quad 1 \leqslant U \leqslant V, \quad q^{0.5+0.5\varepsilon} \leqslant UV \leqslant N$$

В случае, когда q является простым числом, Ж. Бургейном [6] и Р. Бейкером [7] было получено неравенство

$$W \;\ll_\varepsilon\; UVq^{-c\varepsilon^4} \tag{6}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная постоянная, и, как следствие, оценка суммы Клоостермана по простым числам:

$$\sum_{p\leqslant N} e_q(ap^* + bp) \ll Nq^{-c_1\varepsilon^4}, \quad 0 < c_1 < c.$$

При $U \geqslant q^{c_2\varepsilon}$, $0 < c_2 < 0.25$, оценка суммы (6) получается с помощью оригинального метода Бургейна, в основе которого лежит верхняя оценка мощности множества тех "исключительных" вычетов $\xi \in \mathbb{Z}_q$, для которых суммы

$$\biggl|\sum_{V<v\leqslant V_1} e_q(a\xi v^*)\biggr|, \qquad \sum_{|w|\leqslant V^{1-\gamma}}\biggl|\sum_{V<v\leqslant V_1} e_q\biggl(\frac{a\xi w}{v(v+w)}\biggr)\biggr|, \quad 0 < \gamma < 0.5,$$

достаточно велики (первая из сумм необходима для оценки W при $b \equiv 0 \pmod q$), вторая — при $b \not\equiv 0 \pmod q$). В случае же, когда $1 \leqslant U \leqslant q^{c_2\varepsilon}$, искомая оценка W следует (с большим запасом) из оценки Вейля (4) и потому вполне может быть заменена неравенством (5).

2. Основной результат

Цель настоящей заметки состоит в получении элементарным способом оценки (5) в случае, когда $b \equiv 0 \pmod q$, а модуль q является простым числом, а также оценки суммы более общего вида, "нелинейной" по величине n^*. Основным утверждением работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $0 < \varepsilon < 0.25$ — сколь угодно малая фиксированная постоянная, q — простое число, $q \geqslant q_0(\varepsilon)$, a, c, N, N_1 — целые числа, причём $(a, q) = 1$, $q^{0.5+\varepsilon} \leqslant N < N_1 \leqslant 2N < q$. Тогда для любого фиксированного целого $k \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\biggl|\sideset{}{'}\sum_{N<n\leqslant N_1} e_q\bigl(a\bigl\{(n+c)^*\bigr\}^k\bigr)\biggr| \leqslant Nq^{-\varepsilon^2/18},$$

где штрих означает, что $n \not\equiv -c \pmod q$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $k, r \geqslant 2$ — целые числа, q — простое, $1 < Y < q$. Пусть, далее, величина t пробегает некоторое множество $T \subset \mathbb{Z}_q$ с числом элементов, равным T, а параметр $\overline{y}$ пробегает все целочисленные наборы вида $(y_1, \ldots, y_{2r})$, где $1 \leqslant y_1, \ldots, y_{2r} \leqslant Y$. Пусть, наконец, для фиксированного набора $\overline{y}$ величина $N(\overline{y}; q)$ равна количеству решений сравнения*

$$\frac{1}{(t+y_1)^k} + \ldots + \frac{1}{(t+y_r)^k} \equiv \frac{1}{(t+y_{r+1})^k} + \ldots + \frac{1}{(t+y_{2r})^k} \pmod q \tag{7}$$

в числах $t \in T$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{\overline{y}} N(\overline{y}; q) < r!Y^r|T| + 2krY^{2r}. \tag{8}$$

Замечание 1. *Неравенство (8) для простого q и $k = 1$ (без явного вида зависящих от r постоянных) содержится в работе Бургейна [6] (§5, соотношение (13)). Аналог оценки (8) для произвольного модуля q и $k = 1$ дан Бейкером [7]. Для удобства читателя ниже приводится доказательство леммы, практически дословно следующее работе Бейкера.*

Доказательство. Все наборы $\overline{y}$ разобьём на два класса: A и B. К классу A отнесём те из них, для которых набор $(y_{r+1},\ldots,y_{2r})$ является перестановкой набора $(y_1,\ldots,y_r)$, а ко второму — все остальные. Если $\overline{y}\in A$, то решением (8) служит любое $t\in T$, для которого $t+y_j\not\equiv 0 \pmod q$, так что $N(\overline{y};q)\leqslant |T|$. Пусть $\overline{y}\in B$. Приводя в (8) подобные члены и производя при необходимости сокращения, получим сравнение вида

$$\frac{\alpha_1}{(t+z_1)^k}+\ldots+\frac{\alpha_1}{(t+z_\ell)^k}\;\equiv\;\frac{\alpha_{\ell+1}}{(t+z_{\ell+1})^k}+\ldots+\frac{\alpha_{\ell+m}}{(t+z_{\ell+m})^k}\pmod q,$$

в котором $1\leqslant \ell,m\leqslant r$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{\ell+m}\geqslant 1$, $z_1,\ldots,z_\ell$ — элементы набора $(y_1,\ldots,y_r)$, $z_{\ell+1},\ldots,z_{\ell+m}$ — элементы набора $(y_{r+1},\ldots,y_{2r})$, причём

$$z_i\not\equiv z_j \pmod q \quad \text{при}\;\; i\neq j. \tag{9}$$

Полагая $G(t)=(t+z_1)^k\ldots(t+z_{\ell+m})^k=(t+z_i)^kG_i(t)$, $i=1,\ldots,\ell+m$, находим:

$$\alpha_1G_1(t)+\ldots+\alpha_{\ell+m}G_{\ell+m}(t)\;\equiv\;0\pmod q. \tag{10}$$

Левая часть (10) представляет собой некоторый полином $F(t)$ степени не выше $k(\ell+m-1)\leqslant k(2r-1)$, не равный тождественно нулю. Действительно, положив $t\equiv -z_1$, согласно (9) будем иметь:

$$F(-z_1)\;\equiv\;\alpha_1G_1(-z_1)\;\equiv\;\alpha_1(z_2-z_1)^k\ldots(z_{\ell+m}-z_1)^k\not\equiv 0\pmod q.$$

В силу теоремы Лагранжа, сравнение (10) имеет не более $k(2r-1)$ решений в числах t, то есть $N(\overline{y};q)\leqslant k(2r-1)<2kr$. Замечая, что количества наборов в классах A и B не превосходят, соответственно, величин $r!Y^r$ и Y^{2r}, приходим к искомому утверждению. □

Доказательство теоремы. Дальнейшие рассуждения используют так называемый "аддитивный" сдвиг переменной суммирования, широко использующийся при оценках тригонометрических сумм и сумм значений характеров, и применявшийся к оценкам сумм Клоостермана Э. Фаври и Ф. Мишель [15], а также Ж. Бургейном [6].

Именно, пусть X,Y — целые числа, зависящие от q,N и такие,что $XY=o(N)$ при $q\to+\infty$. Тогда для любых x,y, $1\leqslant x\leqslant X$, $1\leqslant y\leqslant Y$, для суммы W из условия теоремы будем иметь:

$$W\;=\;\sideset{}{'}\sum_{N-xy<n\leqslant N_1-xy}e_q\bigl(a\{(n+xy+c)^*\}^k\bigr)\;=$$
$$=\;\sideset{}{'}\sum_{N<n\leqslant N_1}e_q\bigl(a\{(n+xy+c)^*\}^k\bigr)\;+\;2\theta_1xy,\quad |\theta_1|\leqslant 1.$$

Здесь и далее штрих означает, что переменные суммирования принимают такие значения, что величина, стоящая под знаком обратного вычета, не делится на q.

Суммируя обе части этого равенства по x,y, после несложных преобразований получим:

$$W\;=\;(XY)^{-1}\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{N<n\leqslant N_1}e_q\bigl(a\{(n+xy+c)^*\}^k\bigr)\;+\;2\theta_2XY,\quad |\theta_2|\leqslant 1,$$
$$|W|\;\leqslant\;(XY)^{-1}\sum_{x=1}^{X}\sum_{N<n\leqslant N_1}\left|\sum_{y=1}^{Y}e_q\bigl(a\{(n+xy+c)^*\}^k\bigr)\right|\;+\;2XY.$$

Преобразуем показатель экспоненты следующим образом:

$$a\{(n+xy+c)^*\}^k\;\equiv\;a(x^*)^k\bigl\{(y+x^*(n+c))^*\bigr\}^k\;\equiv\;z\bigl((y+t)^*\bigr)^k,$$

где

$$\begin{cases} z \equiv a(x^*)^k \pmod q, \\ t \equiv x^*(n+c) \pmod q. \end{cases} \tag{11}$$

Обозначая через $\mu(z,t)$ число решений системы (11) в переменных $1 \leqslant x \leqslant X$, $N < n \leqslant N_1$, будем иметь:

$$|W| \leqslant (XY)^{-1} \sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \mu(z,t) \left| \sum_{y=1}^{Y} e_q\bigl(z\{(t+y)^*\}^k\bigr) \right| + 2XY,$$

где T — подмножество $\mathbb{Z}_q$, состоящее изо всех вычетов чисел вида $x^*(n+c)$, $1 \leqslant x \leqslant X$, $N < n \leqslant N_1$. Обозначим сумму по z и t через W_1. Задавшись некоторым целым $r \geqslant 2$, применим к W_1 неравенство Гёльдера. Получим:

$$W_1^r \leqslant \left(\sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \mu(z,t) \right)^{r-1} \sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \mu(z,t) \left| \sum_{y=1}^{Y} e_q\bigl(z\{(t+y)^*\}^k\bigr) \right|^r,$$

$$W_1^{2r} \leqslant \left(\sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \mu(z,t) \right)^{2(r-1)} \left(\sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \mu^2(z,t) \right) \sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \left| \sum_{y=1}^{Y} e_q\bigl(z\{(t+y)^*\}^k\bigr) \right|^{2r} =$$

$$= \Sigma_1^{2(r-1)} \Sigma_2 \Sigma_3,$$

откуда $W_1 \leqslant \Sigma_1^{1-1/r} \Sigma_2^{1/(2r)} \Sigma_3^{1/(2r)}$ (смысл обозначений Σ_j очевиден).

Величина Σ_1 совпадает с числом всех возможных пар (x,n), так что $\Sigma_1 \leqslant XN$. Далее, сумма Σ_2 равна числу решений системы сравнений

$$\begin{cases} a(x_1^*)^k \equiv a(x_2^*)^k \pmod q, \\ x_1^*(n_2+c) \equiv x_2^*(n_1+c) \pmod q, \end{cases}$$

или, что то же, системы

$$\begin{cases} x_1^k \equiv x_2^k \pmod q, \\ x_1(n_1+c) \equiv x_2(n_2+c) \pmod q \end{cases} \tag{12}$$

с условиями $1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant X$, $N < n_1, n_2 \leqslant N_1$. Решения первого сравнения в (12) связаны соотношением $x_1 \equiv e x_2 \pmod q$, где e — некоторый корень сравнения $e^k \equiv 1 \pmod q$. Фиксируя значения e, x_1 и n_1 не более чем k, X и N способами соответственно, получим: $n_2 \equiv e(n_1+c)-c \pmod q$. Следовательно, система (12) имеет не более kXN решений, т.е. $\Sigma_2 \leqslant kXN$.

Наконец, пользуясь обозначениями и утверждением леммы, будем иметь:

$$\Sigma_3 = \sum_{z=1}^{q} \sum_{t \in T} \sum_{1 \leqslant y_1, \ldots, y_{2r} \leqslant Y} e_q\left(z \left\{ \frac{1}{(t+y_1)^k} + \ldots - \frac{1}{(t+y_{2r})^k} \right\} \right) =$$

$$= q \sum_{\overline{y}} N(q; \overline{y}) \leqslant q(r! Y^r |T| + 2krY^{2r}) < q((rY)^r |T| + 2krY^{2r}) <$$

$$< q\bigl((rY)^r XN + 2krY^{2r}\bigr).$$

Таким образом,

$$W_1 \leqslant (XN)^{1-1/r}(kXN)^{1-1/(2r)}\big(q\big((rY)^r XN + 2krY^{2r}\big)\big)^{1/(2r)} <$$
$$< k^{1/(2r)}(XN)^{1-1/(2r)}\Big(q^{1/(2r)}\sqrt{rY} + (2kq)^{1/(2r)}Y\Big) <$$
$$< k^{1/r}XN\left(q^{1/(2r)}\sqrt{rY} + 2Y\left(\frac{q}{XN}\right)^{1/(2r)}\right),$$
$$|W| \leqslant k^{1/r}N\left(q^{1/(2r)}\sqrt{\frac{r}{Y}} + 2\left(\frac{q}{XN}\right)^{1/(2r)} + \frac{XY}{N}\right).$$

Положим теперь $Y = \big[q^{2/r}\big] + 1$, $X = \big[NY^{-1}q^{-\varepsilon/2}\big] + 1$. Тогда

$$q^{1/(2r)}\sqrt{\frac{r}{Y}} \leqslant \sqrt{r}q^{-1/(2r)}, \quad \left(\frac{q}{XN}\right)^{1/(2r)} \leqslant \left(\frac{2q^{1+\varepsilon/2+2/r}}{N^2}\right)^{1/(2r)} \leqslant 1.5q^{(-\varepsilon+2/r)/(2r)},$$
$$\frac{XY}{N} \leqslant 2q^{-\varepsilon/2}.$$

Беря $r = \big[4\varepsilon^{-1}\big] + 1$, окончательно находим:

$$|W| \leqslant k^{\varepsilon/4}N\big(\sqrt{r}q^{-\varepsilon/9} + 1.5q^{-\varepsilon^2/17} + 2q^{-\varepsilon/2}\big) < Nq^{-\varepsilon^2/18},$$

что и требовалось. □

3. Заключение

Использованный в заметке приём “аддитивного” сдвига переменной суммирования оказывается полезен и при исследовании сумм Клоостермана “с весами”, где в качестве весового множителя выступает многомерная функция делителей $\tau_k(n)$. Соответствующие результаты планируется вскоре опубликовать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел, 9-е изд. М., Наука, 1981.
2. Salie H. Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$ // Math. Z. T. 34. 1931. С. 91—109.
3. Estermann T. On Kloosterman's sum // Mathematika. T. 8. Вып. 1 1961. С. 83–86.
4. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. T. 34. 1948. С. 204–207.
5. Степанов С. А. Об оценке сумм Клостермана // Изв. АН СССР. Сер. матем.. Т. 35. Вып. 2. 1971. С. 308–323.
6. Bourgain J. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // Int. J. Number Theory. T. 1. 2005. С. 1–32.
7. Baker R. C. Kloosterman sums with prime variable // Acta Arith. T. 152. Вып. 4. 2012. С. 351–372.
8. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Тр. МИАН СССР. Т. 23. Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 3–109.

9. Burgess D. A. On character sums and primitive roots // Proc. London Math. Soc.. T. 12. Вып. 3 1962. С. 179–192.

10. Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем.. Т. 28. Вып. 1. 1964. С. 237-–248.

11. Карацуба А. А. Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. матем.. Т. 34. Вып. 1. 1970. С. 20-–30.

12. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 34. Вып. 2. 1970. С. 299-–321.

13. Карацуба А. А. Суммы характеров с весами // Изв. РАН. Сер. матем.. Т. 64. Вып. 2. 2000. С. 29-–42.

14. Бургейн Ж., Гараев М. З. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 78. Вып. 4. 2014. С. 19-–72.

15. Fouvry E., Michel P. Sur certaines sommes d'exponentielles sur les nombres premiers // Ann. scient. Éc. Norm. Sup.. T. 31. Вып. 1. 1998. С. 93–130.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. Elements of number theory, Dover Publications, 2003.

2. Salie, H. 1931, "Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$", *Math. Z.*, vol. 34, pp. 91—109.

3. Estermann, T. 1961, "On Kloosterman's sum", *Mathematika*, vol. 8, no. 1, pp. 83–86.

4. Weil, A. 1948, "On some exponential sums", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 34, pp. 204–207.

5. Stepanov S. A. 1971, "An estimation of Kloosterman sums", *Mathematics of the USSR -Izvestiya*, vol. 5, no. 2, pp. 319–336.

6. Bourgain J. 2005, "More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications", *Int. J. Number Theory*, vol. 1, pp. 1–32.

7. Baker R. C. 2012, "Kloosterman sums with prime variable", *Acta Arith.*, vol. 152, no. 4, pp. 351–372.

8. Vinogradov I. M. 1947, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers.* (Russian). Tr. Mat. Inst. Steklova 23 (1947).

9. Burgess D. A. 1962, "On character sums and primitive roots", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 12, no. 3, pp. 179–192.

10. Karatsuba A. A. 1964, "Trigonometric sums of a special type and their applications". (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 28, no. 1, pp. 237—248.

11. Karatsuba A. A. 1970, "Estimates of character sums". (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 34, no. 1, pp. 20-–30.

12. Karatsuba A. A. 1970, "Sums of characters with prime numbers". (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 34, no. 2, pp. 299-–321.

13. Karatsuba A. A. 2000, “Character sums with weights”, *Izv. Math.*, vol. 64, no. 2, pp. 249-–263.

14. Bourgain J., Garaev M. Z. 2014, “Sumsets of reciprocals in prime fields and multilinear Kloosterman sums”, *Izv. Math.*, vol. 78, no. 4, pp. 656–707.

15. Fouvry E., Michel P. 1998, “Sur certaines sommes d’exponentielles sur les nombres premiers”, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 31, no. 1, pp. 93–130.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Получено 07.12.2015 г.
Принято в печать 10.03.2016 г.