

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-383-404

**От алгебраических методов Диофанта — Ферма — Эйлера
к арифметике алгебраических кривых:
из истории диофантовых уравнений после Эйлера**

Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев

Лавриненко Татьяна Алексеевна — кандидат физико-математических наук, Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова (г. Москва).

e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru

Беляев Алексей Александрович — кандидат физико-математических наук, Российский университет дружбы народов (г. Москва).

e-mail: belyaev-aa@rudn.ru

Аннотация

Если говорить об истории той части диофантова анализа, в которой рассматривается решение диофантовых уравнений в рациональных числах, то прежде всего нужно отметить устойчивость алгебраического подхода к этой проблеме, восходящего к «Арифметике» Диофанта Александрийского. Действительно, после знакомства европейских математиков во второй половине XVI века с произведением Диофанта основным средством нахождения рациональных решений диофантовых уравнений становится алгебраический аппарат замен, подстановок и преобразований. Несмотря на ограниченность этих средств, математикам удалось на данном этапе получить важные результаты о решении в рациональных числах неопределенных уравнений с двумя неизвестными 2-й, 3-й и 4-й степеней. Детальный историко-математический анализ этих результатов дан, в частности, в исследованиях И. Г. Башмаковой и её учеников. В статье рассматривается, как в течение XIX века происходил отход от узко алгебраической трактовки диофантовых уравнений, характерной для большинства работ вплоть до конца XIX века, к более общему взгляду на предмет исследования и принципиальному расширению самих средств исследования диофантовых уравнений. Рассматриваются шаги в этом направлении, сделанные такими математиками, как О. Л. Коши, К. Г. Я. Якоби, Э. Люка. Особое внимание уделяется творчеству Дж. Дж. Сильвестра в области диофантовых уравнений и статье У. Стори «On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve», долгое время не попадавшим в поле зрения историков математики.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, арифметика алгебраических кривых, рациональные точки, эллиптическая кривая, Дж. Дж. Сильвестр, У. Э. Стори.

Библиография: 33 названия.

Для цитирования:

Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев. От алгебраических методов Диофанта — Ферма — Эйлера к арифметике алгебраических кривых: из истории диофантовых уравнений после Эйлера // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 383–404.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-383-404

**From the algebraic methods of Diophantus–Fermats–Euler
to the arithmetic of algebraic curves:
about the history of diophantine equations after Euler**

Т. А. Лавриненко, А. А. Беляев

Lavrinenko Tatiana Alekseevna — candidate of physical and mathematical sciences, Plekhanov Russian University of Economics (Moscow).

e-mail: Lavrinenko.TA@rea.ru

Belyaev Aleksei Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Peoples' Friendship University of Russia (Moscow).

e-mail: belyaev-aa@rudn.ru

Abstract

Talking about the Diophantine analysis' history, namely, the problem of rational solutions of Diophantine equations, we should note the longevity of the algebraic approach, which goes back to Diophantus' "Arithmetica". Indeed, after the European mathematicians of the second half of the XVI century became acquainted with Diophantus' oeuvre, algebraic apparatus of variable changes, substitutions and transformations turned into the main tool of finding rational solutions of Diophantine equations. Despite the limitations of this apparatus, there were obtained important results on rational solutions of quadratic, cubic and quartic indeterminate equations in two unknowns. Detailed historico-mathematical analysis of these results was done, inter alia, by I. G. Bashmakova and her pupils. The paper examines the departure from this algebraic treatment of Diophantine equations, typical for most of the research up to the end of XIX century, towards a more general viewpoint on this subject, characterized also by radical expansion of the tools used in the Diophantine equations' investigations. The works of A. L. Cauchy, C. G. J. Jacobi and É. Lucas, where this more general approach was developed, are analyzed. Special attention is paid to the works of J. J. Sylvester on Diophantine equations and the paper "On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve" by W. Story, which were not in the focus of the research on history of the Diophantine analysis and where apparatus of algebraic curves was used in a pioneering way.

Keywords: Diophantine equations, arithmetic of algebraic curves, rational points, elliptic curve, J. J. Sylvester, W. E. Story.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

T. A. Lavrinenko, A. A. Belyaev, 2021, "From the algebraic methods of Diophantus–Fermat–Euler to the arithmetic of algebraic curves: about the history of diophantine equations after Euler", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 383–404.

Памяти Изабеллы Григорьевны Башмаковой (1921–2005)

1. Введение

Арифметика алгебраических кривых в настоящее время – это интенсивно развивающаяся область современной математики, требующая для своего изучения целого арсенала понятий и методов и содержащая выдающиеся результаты, получение которых относится к весьма ярким событиям математики XX века. В то же время основная задача арифметики алгебраических кривых в её классической постановке звучит обманчиво просто: она состоит в нахождении целочисленных или рациональных решений полиномиальных уравнений с несколькими неизвестными, если коэффициенты этих уравнений – целые (или рациональные) числа. В более общей постановке рассматривается система полиномиальных уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

с коэффициентами из некоторого поля K и ставится проблема отыскания множества $X(K)$ всех решений $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ этой системы и определения его алгебраической структуры. Наряду с этой проблемой рассматривается также задача нахождения множества $X(Z_K)$ всех решений $(x_1, \dots, x_n) \in Z_K^n$, где Z_K – кольцо целых чисел поля K . Если в качестве K взять поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то получим классическую постановку задачи о решении диофантовых, или неопределенных, уравнений в рациональных и, соответственно, в целых числах.

История диофантова анализа берет начало в глубокой древности: отдельные неопределенные уравнения были известны ещё в Древнем Вавилоне, систематическое же изучение таких уравнений начинается, по всей видимости, с “Арифметики” Диофанта Александрийского (предположительно III в.), содержавшей решения большого числа задач, приводящих к неопределенным уравнениям. После знакомства с “Арифметикой” европейских математиков во второй половине XVI в. подход Диофанта на долгое время становится определяющим при исследовании рациональных решений диофантовых уравнений. Вершиной его виртуозного применения является творчество Л. Эйлера (1707–1783).

Отметим, что вопрос о целочисленных решениях диофантовых уравнений требует развития иных методов и подходов к его исследованию, нежели вопрос о рациональных решениях этих уравнений. И на протяжении всей истории диофантова анализа мы наблюдаем две линии развития, связанные с изучением каждой из этих проблем. Причем если в первом случае исследования основывались в основном на рассуждениях теоретико-числового характера, то для отыскания рациональных решений неопределенных уравнений, вплоть до конца XVIII в., использовались, как правило, соображения алгебраического характера (при исследовании отдельных уравнений и в этом случае могли встречаться теоретико-числовые рассуждения). Однако после выхода в свет в 1901 г. программного мемуара А. Пуанкаре “*Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*” [1] проблема решения неопределенных уравнений в рациональных числах начинает трактоваться в рамках алгебраической геометрии. Эта новая точка зрения на предмет, когда исходная задача формулируется как задача изучения множества рациональных точек на алгебраических кривых, а для её исследования привлекаются понятия и методы развитой теории, дала мощный толчок для дальнейшего развития диофантова анализа.

В данной статье мы хотим проследить, как ещё до появления мемуара А. Пуанкаре происходил отход от чисто алгебраической трактовки проблемы решения неопределенных уравнений в рациональных числах, и отметить некоторые узловые моменты в истории этой проблемы, связанные с расширением средств её исследования в XIX веке и изменением точки зрения на сам предмет исследования. В дальнейшем на протяжении всей статьи, говоря о решении диофантовых уравнений, мы будем иметь в виду решение этих уравнений именно в рациональных числах, не оговаривая этого каждый раз специально.

Исторически первыми общими результатами относительно решения в рациональных чис-

лах неопределенного уравнения

$$f_n(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $f_n(x, y)$ - многочлен степени n от двух переменных x, y с рациональными коэффициентами, были результаты о нахождении рациональных решений уравнения (1) при $n = 2, 3, 4$. Очевидно, вопрос о рациональных решениях неопределенного уравнения (1) можно сформулировать как вопрос о рациональных точках плоской алгебраической кривой, задаваемой уравнением (1) в декартовых координатах x, y . Как сейчас известно, решение этого вопроса зависит от того, какой род имеет кривая (1). В случае рода 0 по одной известной неособой рациональной точке кривой (1) можно найти выражения для координат всех ее неособых рациональных точек в виде рациональных функций одного параметра. Для кривых рода 1, или эллиптических, этого сделать нельзя. В этом случае, если эллиптическая кривая обладает хотя бы одной рациональной точкой, задачу нахождения её рациональных точек можно свести к аналогичной задаче для эллиптической кривой 3-го порядка. Для нахождения же рациональных точек на эллиптической кривой 3-го порядка применяют методы “касательной” и “секущей”, позволяющие находить по одной или двум известным рациональным точкам только ещё одну новую рациональную точку кривой. Эти методы можно неограниченно итерировать, используя в них новые найденные точки и таким образом получая на каждом шаге применения одного из этих методов, вообще говоря, еще одну рациональную точку кривой. Методы касательной и секущей лежат в основе определения операции сложения рациональных точек кубической кривой рода 1, относительно которой множество $X(\mathbb{Q})$ всех рациональных точек этой кривой образует абелеву группу. В XX веке были получены важные результаты о строении этой группы. Что касается кривых рода больше 1, то только в 1983 году немецким математиком Фалтингсом была доказана гипотеза Морделла о том, что на такой кривой может быть не более конечного числа рациональных точек.

2. Диофантов анализ эйлеровского времени

Связь между свойствами диофантова уравнения и родом задаваемой им кривой была отчётливо осознана только после упомянутого выше исследования Пуанкаре 1901 года. До этого же известные методы решения диофантовых уравнений вида (1) классифицировались по степени этого уравнения. В конце XVIII века в арсенале диофантова анализа были восходящие к Диофанту метод нахождения всех рациональных решений неопределенного уравнения 2-ой степени по одному известному рациональному решению, а также методы нахождения нового рационального решения по одному или двум известным рациональным решениям для неопределенных уравнений 3-ей степени вида

$$f_3(x) = y^2 \quad (2)$$

и

$$f_3(x) = y^3, \quad (3)$$

где $f_3(x)$ — многочлен 3-ей степени с рациональными коэффициентами, а также для неопределенного уравнения вида

$$f_4(x) = y^2, \quad (4)$$

где $f_4(x)$ — многочлен 4-ой степени с рациональными коэффициентами. Все эти результаты были получены алгебраическим путем, с использованием определенным образом подобранных замен и подстановок квадратичного или линейного вида.

Историко-математический анализ этих результатов, проведенный И. Г. Башмаковой и её учениками с использованием привычного теперь при изучении диофантовых уравнений геометрического языка, показал, что эти методы соответствуют применяемым и сейчас методам

нахождения рациональных точек на кривых рода 0 (для неопределенного уравнения 2-ой степени) и рода 1 (для неопределенного уравнения 3-ей степени). Уточним, что нахождение нового рационального решения уравнения (2) или (3) по известному рациональному решению с помощью линейной подстановки представляет собой алгебраический эквивалент “метода касательной”, а с помощью квадратичной подстановки – алгебраический эквивалент “метода парабол”¹. К Пьеру Ферма (1601–1665) восходит итерирование “метода касательной”, которое дает возможность последовательно находить одно за другим новые рациональные решения уравнения (2) или (3), принадлежащие некоторой, вообще говоря бесконечной, последовательности рациональных решений соответствующего уравнения. Что же касается “метода секущей”, то он вплоть до Эйлера применялся только для уравнения (3) в одной особой ситуации, на которой мы здесь останавливаться не будем. И только Эйлер смог прийти алгебраическим путем к способу отыскания нового рационального решения неопределенного уравнения 3-ей степени по двум его известным рациональным решениям – способу, который представлял собой алгебраический эквивалент “метода секущей”. Детальное изложение этих вопросов и соответствующая библиография содержатся в монографии И. Г. Башмаковой и Е. И. Славутина [2], творчество Л. Эйлера в области диофантова анализа рассматривается в работах [3] – [6].

Здесь отметим только, что Эйлеру удалось получить “метод секущей” для нахождения нового рационального решения уравнения (2) или (3) по двум известным рациональным решениям даже несколькими алгебраическими путями (см. [6])! Идея использования двух известных рациональных решений для получения нового рационального решения неопределенного уравнения 3-ей степени впервые была высказана в печати в сочинении “Vollständige Anleitung zur Algebra” [7] (далее в тексте – просто “Алгебра”) при рассмотрении конкретного уравнения $4 + x^2 = y^3$. На этом примере Эйлер и изложил свой метод. Хотя его образ действий был вполне общим, Эйлер не сформулировал его в общем виде для уравнения (3) и математики, по-видимому, не заметили, что в данном случае имеют дело с новым методом. Другой алгебраический способ, приводящий к “методу секущей” для уравнения (3), содержится в рукописях Эйлера [8, с. 112] и также изложен на примере. Формулы “метода секущей” для уравнения (2) были обнаружены в записных книжках Эйлера, опубликованных в наше время. Хотя вывода этих формул в записных книжках нет, но форма представления результатов позволила дать реконструкцию метода, основанную на типичных для Эйлера рассуждениях (см. [9]). Наконец, в цикле работ, представленных в Петербургскую Академию наук в 1780 году, но опубликованных только в 1830 году, была разработана бесконечная процедура последовательного нахождения рациональных решений уравнения (2) по одному или двум его известным рациональным решениям (см. об этом [10]). Фактически в рамках этой алгебраической процедуры для нахождения новых рациональных точек используется и “метод секущей” для уравнения (2), и итерирование “метода секущей”. Кроме того, в различных вариантах метода Эйлера используются “метод касательной” и “метод парабол”. Однако “метод секущей” возникает в этих исследованиях Эйлера как один шаг некоторой бесконечной алгебраической процедуры и в отдельный метод не выделяется, его геометрический смысл в результате оказывается полностью скрытым.

3. Исследование проблемы решения диофантовых уравнений в рациональных числах после Эйлера

а) 1777 год, Ж. Л. Лагранж. “Метод касательной” для общего уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными.

¹Заметим, что “метод парабол” не имеет самостоятельного значения, поскольку решения, получаемые этим методом, могут быть получены в результате применения определенной комбинации методов касательной и секущей.

В методах Диофанта — Ферма — Эйлера для нахождения рационального решения уравнения (2) или (3) использовались линейные и квадратичные подстановки, подбираемые по виду этого уравнения. Так, “метод касательной” для уравнения (2) и для уравнения (3) рассматривался как два разных приема, поскольку предназначался для уравнений разных видов, хотя общность рассуждений в обоих случаях очевидна. Эта общность рассуждений стала особенно наглядной после систематического изложения методов Диофанта–Ферма в “Алгебре” Эйлера [7], где была четко выявлена их суть с алгебраической точки зрения. И уже через 7 лет после появления “Алгебры” Лагранж (1736–1813) в работе “Sur quelques problèmes de l’analyse de Diophante” [11] излагает метод нахождения нового рационального решения по одному известному рациональному решению для общего уравнения 3-ей степени с двумя неизвестными

$$f_3(x, y) \equiv a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = 0. \quad (5)$$

В своем исследовании Лагранж основывался на тех же самых алгебраических соображениях, которые применялись и для уравнений (2) и (3), и весь стиль его рассуждений был алгебраическим. В результате в диофантов анализ был введен “метод касательной” для общего уравнения (5) в чисто алгебраическом выражении, без апелляции к его геометрическому смыслу (подробнее об этом см. [12]). Помимо алгебраических средств в работе использовались также частные производные многочлена $f_3(x, y)$ для записи многочлена $f_3(p + t, q + u)$ по степеням переменных t и u (здесь p и q – известные числа). При этом Лагранж отмечает, что получить такое представление многочлена можно и непосредственно с помощью алгебраических выкладок, но “с помощью дифференциального метода” это сделать легче. Кстати, именно использование частных производных многочлена $f_3(x, y)$ в изложении метода Лагранжа существенно облегчает его геометрическую интерпретацию.

Если по средствам исследования работу Лагранжа можно отнести к тому же этапу развития диофантова анализа, к которому мы относим результаты Ферма и Эйлера, то по общности постановки задачи эта работа знаменует переход к следующему этапу, на котором неопределенные уравнения начинают трактоваться с гораздо более общих позиций, чем в эпоху Эйлера.

б) 1826 год, О. Л. Коши. Работа “Sur la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers”.

Заметим вначале, что от задачи решения уравнения (1) в рациональных числах можно перейти к эквивалентной ей задаче решения в целых числах однородного диофантова уравнения вида

$$F_n(u, v, w) = 0, \quad (6)$$

где $F_n(u, v, w)$ – однородный многочлен степени n от переменных u, v, w с рациональными коэффициентами. Без ограничения общности можно считать коэффициенты в (6) целыми. На геометрическом языке такой переход соответствует переходу от рассмотрения кривой (1) в декартовых координатах x, y к рассмотрению этой кривой на проективной плоскости с однородными координатами u, v, w . Такое рассмотрение позволяет исследовать свойства кривых с более общих позиций.

По-видимому, первая попытка построения общей теории однородных неопределенных уравнений принадлежит О. Л. Коши (1789–1857), который посвятил данному вопросу свою большую работу “Sur la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers” [13] (“О решении некоторых неопределенных уравнений в целых числах”). Работа [13] состоит из пяти параграфов, в первом из которых рассматривается тривиальный случай однородного уравнения n -ой степени с двумя неизвестными, а остальные параграфы посвящены изучению однородных уравнений общего вида (6) с тремя неизвестными при $n = 1, 2, 3$. Оставаясь в целом в рамках алгебраического подхода к исследованию уравнения (6), Коши стремится

провести это исследование с общих позиций: изложив в третьем параграфе некие общие соображения об отыскании целочисленных решений уравнения (6), если известно одно такое решение, для произвольного n , он применяет их в следующем параграфе для случая $n = 2$. Коши пишет, что “хотя проблема, которая будет предметом обсуждения этого параграфа, может быть сведена к известному вопросу о решении в рациональных числах неопределенного уравнения 2-ой степени с двумя неизвестными, нам кажется удобным показать, каким образом вышеприведенный метод применяется к этой проблеме”. В последнем параграфе своей работы Коши с единых позиций приходит к методам нахождения нового целочисленного решения по одному и, соответственно, по двум известным целочисленным решениям для неопределенного уравнения (6) 3-ей степени. Изучая уравнение (6) при $n = 2$ и при $n = 3$, он помимо алгебраических средств использует только, как и Лагранж, при преобразовании многочлена в результате подстановок частные производные этого многочлена.

Современный читатель работы Коши при внимательном чтении без труда увидит, что методы Коши для неопределенного однородного уравнения 3-ей степени представляют собой сформулированные чисто аналитически методы касательной и секущей для кривой 3-го порядка. Для этого достаточно заметить, что однородное уравнение 3-ей степени с тремя неизвестными и подстановки, осуществляемые Коши в этом уравнении, задают на проективной плоскости соответственно кривую 3-го порядка и прямые – в одном случае касательную, проведенную к кривой в её известной рациональной точке, в другом случае прямую, проходящую через две известные рациональные точки кривой (см. [12]). Однако в самой работе такой геометрической интерпретации методов нет: следует учесть, что общие однородные проективные координаты были введены Плюккером в его “Аналитико-геометрических исследованиях” (1828 г., 1831 г.) позже и только после этого стало возможным рассматривать алгебраические кривые на проективной плоскости. Первое классическое изложение такой теории было дано Плюккером в 1839 году в его “Теории алгебраических кривых”.

Таким образом, Коши, ограничиваясь в своей работе алгебраическими средствами исследования, поставил изучение проблемы о рациональных решениях диофантовых уравнений на принципиально иной уровень общности, чем это было до него. При этом метод секущей в его работе наконец-то “обрел равные права гражданства” с методом касательной. Результаты Коши “ждали”, когда будет развита теория алгебраических кривых на проективной плоскости, чтобы получить простую геометрическую интерпретацию.

в) 1835 год, К. Г. Якоби. Аналитическая трактовка проблемы решения неопределенных уравнений с помощью теорем сложения эллиптических и абелевых интегралов.

Как известно, для изучения множества всех рациональных точек плоской кривой рода 1, или эллиптической, оказывается чрезвычайно полезным аналитический аппарат теории алгебраических кривых, связанный с использованием теории эллиптических функций. Систематическое применение этого аппарата для исследования диофантовых уравнений началось с мемуара Пуанкаре 1901 года, в котором с его помощью были получены важные результаты о диофантовых уравнениях, задающих кривые рода 1. Сейчас использование этого аналитического аппарата при получении основных фактов о строении множества рациональных точек на эллиптических кривых является классическим.

Впервые идея о возможности такой аналитической трактовки задач диофантова анализа была высказана задолго до появления мемуара Пуанкаре, в 1835 году. В своей статье “De Usu Theoriae Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysisi Diophantea” [14] К. Г. Я. Якоби (1804–1851) обращается к последней работе из упоминавшегося нами выше цикла поздних работ Эйлера, опубликованного в 1830 году. Он отмечает тесную аналогию между рассуждениями этой работы, приводящими Эйлера к бесконечной процедуре последовательного нахождения рациональных решений уравнения вида (4) по одному или двум его

известным рациональным решениям, и рассуждениями, с помощью которых Эйлер получает теорему сложения эллиптических интегралов. Установив связь между проблемой решения в рациональных числах уравнения (4)² и теоремой сложения эллиптических интегралов вида $\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$, Якоби дает описание алгебраической процедуры Эйлера для нахождения рациональных решений уравнения (4) на другом языке, аналитическом, с помощью теоремы сложения эллиптических интегралов. Он также использует теорему сложения абелевых интегралов для изучения диофантовых уравнений видов $f_5(x) = y^2$ и $f_6(x) = y^2$, задающих кривые рода 2. Детальный анализ результатов Якоби дан И. Г. Башмаковой [15].

Таким образом, благодаря статье Якоби открылся новый путь, приводящий к принципиальному расширению средств исследования неопределенных уравнений. Он был связан с аналитическим подходом к изучению неопределенных уравнений и характеризовался применением теории эллиптических интегралов и эллиптических функций. Но вплоть до 1880 года новых результатов в этом направлении, по-видимому, получено не было.

г) 1847–1858 годы. Статьи Дж. Дж. Сильвестра по неопределенным уравнениям.

По-видимому, вопрос о рациональных решениях диофантова уравнения впервые был сформулирован геометрически, как вопрос о рациональных точках на соответствующей алгебраической кривой, в XVII веке, великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643–1727). В его математических бумагах были обнаружены записи [16], в которых он рассматривает и метод нахождения всех рациональных точек кривой 2-го порядка по одной известной рациональной точке этой кривой, и формулирует “метод секущей” для кривой 3-го порядка. Он отмечает также, что с помощью метода секущей по трем известным рациональным точкам кубики, не лежащим на одной прямой, можно последовательно находить всё новые и новые рациональные точки кубики. Но эти изыскания Ньютона не увидели света при его жизни и были опубликованы только в наше время, в 1971 году, математикам же XVIII и XIX веков они были недоступны.

Как мы отметили выше, ни в работе Коши по диофантовым уравнениям 1826 года, ни в работе Якоби 1835 года нет даже упоминания о возможности геометрической трактовки диофантовых уравнений. Когда же геометрические представления стали проникать в диофантов анализ? Некоторый свет на этот вопрос проливает творчество Дж. Дж. Сильвестра (1814–1897) в данной области, на чем мы остановимся подробнее. Хотя исследование неопределенных уравнений не принадлежало к главным приоритетам математической деятельности Сильвестра, тем не менее именно он осуществил прорыв в их изучении. Результаты Сильвестра по неопределенным уравнениям нашли отражение в шести публикациях – это четыре небольшие статьи, опубликованные в журнале “Philosophical Magazine”, три из которых появились в 1847 году и одна – в 1858 году, краткая заметка 1856 года, опубликованная в “Annali di scienze matematiche e fisiche”, и, наконец, фундаментальная работа “On Certain Ternary Cubic-Form Equations”, напечатанная в нескольких номерах “American Journal of Mathematics” в 1879–80 годах. Во всех этих работах рассматривается однородное уравнение 3-ей степени с тремя неизвестными. И во всех них, кроме последней работы, не содержится доказательств.

Статьи [17] – [19], вышедшие в 1847 году и образующие единый цикл, и заметка [20] 1856 года все посвящены однородному уравнению 3-ей степени с тремя неизвестными вида

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz, \quad (7)$$

где A, B, C, D – целые, или его частным случаям. Не вдаваясь в подробности, скажем только, что в них: сформулированы некие теоремы относительно уравнения (7), из которых, по утверждению Сильвестра, можно получить в качестве следствий результаты о неразрешимости в

²Если кривая, задаваемая уравнением (4), не имеет конечных особых точек, то её род равен 1.

целых числах различных уравнений вида (7); приводится без доказательства ряд утверждений относительно неразрешимости в целых числах некоторых классов уравнений вида (7) и некоторых конкретных уравнений этого вида; описывается некая бесконечная процедура алгебраического характера для получения (всех, как утверждает Сильвестр) целочисленных решений уравнения

$$x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz \quad (8)$$

по одному известному целочисленному решению при определенных условиях на коэффициенты A и M . Во второй статье 1847 года Сильвестр пишет, что “доказательство всего, что здесь представлено, существует не только в виде замысла в голове автора, но и в достаточно протяженной записи, причем в виде, пригодном для публикации” [18, с. 296], а в следующей работе выражает надежду “представить в скором времени статью на эту тему в более полном виде”, но свои намерения он не осуществил.

Мы не будем останавливаться подробно на сформулированных без доказательства утверждениях, приведенных в этих работах. Отметим только важный для нашей темы момент. Все приведенные Сильвестром формулировки носят теоретико-числовой характер³. Но в последней статье 1847 года Сильвестр вводит в рассмотрение кривую 3-го порядка, задаваемую уравнением

$$Y^3 + X^3 + 1 = \frac{M}{A^{1/3}} XY, \quad (9)$$

в котором коэффициент при XY он называет характеристикой. Сопоставляя уравнению (8) кривую (9)⁴, он связывает вопрос о целочисленных решениях этого уравнения со свойствами кривой (9). А именно, говоря о различиях в трактовке диофантова уравнения (8) в случае, если $27A - M^3 > 0$, и в случае, если $27A - M^3 < 0$, он объясняет их разными свойствами кривой (9) в зависимости от значения характеристики: если характеристика меньше 3, что соответствует случаю $27A - M^3 > 0$, то кривая (9) “является непрерывной кривой, простирающейся в обе стороны до бесконечности”, а “как только характеристика становится равной 3, [она] включает в себя изолированную точку, зародыш овала или замкнутой ветви, который продолжает расширяться (всегда находясь обособленно от непрерывной ветви), если характеристика продолжает неограниченно возрастать (т.е. $27A - M^3 < 0$ – Т.Л.)” [19, с. 470]. Таким образом, уже к 1847 году относятся первые попытки связать свойства диофантова уравнения с геометрическими свойствами соответствующей ему кривой.

О попытках Сильвестра исследовать диофантовы уравнения с помощью геометрических средств свидетельствует и его письмо к А. Кэли (1821–1895) от 23.10.1856. Говоря о связи между решением в рациональных числах уравнений, задаваемых с помощью кубической формы от трех переменных и с помощью кубической формы от четырех переменных, Сильвестр высказывает следующую идею: “Если у нас есть кубическая поверхность, обладающая некоторой рациональной точкой, то тангенциализация дает бесконечно много рациональных кривых [подразумевается, что кубическая поверхность задается уравнением с рациональными коэффициентами; под рациональной кривой подразумевается кривая, задаваемая уравнением с рациональными коэффициентами – Т.Л.], и, таким образом, если я могу доказать, что из известного решения уравнения $x^3 + y^3 + Az^3 + Bt^3 = 0$ можно получить точку среди бесконечной последовательности таких рациональных кривых, у которой $t = 0$, я решу уравнение $x^3 + y^3 + Az^3 = 0$ ” [22, с. 93]. По-видимому, Сильвестру не удалось получить каких-либо

³Например, в [20] он утверждает, что уравнение (8) неразрешимо в целых числах при выполнении следующих трех условий: 1) число $M^3 - 27A$, представленное в виде $\Delta^3 \cdot \Delta'$, где Δ' не содержит кубических делителей, таково, что Δ' - четное и Δ' не содержит делителей вида $f^2 + 3g^2$; 2) A - простое; 3) $\sqrt{-M/A}$ не является целым.

⁴Уравнение (8) задает в декартовых координатах кривую $X_1^3 + Y_1^3 + A = MX_1Y_1$, которая с помощью преобразования $X_1 = A^{1/3}X$, $Y_1 = A^{1/3}Y$ переходит в кривую (9).

значительных результатов, исходя из высказанных соображений, во всяком случае, в опубликованных работах такие результаты отсутствуют. Но важно само намерение расширить средства исследования диофантовых уравнений с помощью геометрического подхода.

В работе Сильвестра 1858 года, называемой “Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree” [21], мы снова встречаем геометрический язык при рассмотрении неопределенных уравнений. В этой статье Сильвестр только сообщает, что получил некоторые результаты относительно общего однородного уравнения третьей степени

$$f_3(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

одно решение которого $x = a, y = b, z = c$ известно, и описывает эти результаты в общих чертах, не давая точных формулировок. Вначале условие целочисленности на коэффициенты уравнения (10) и на само решение (a, b, c) не накладывается. Сильвестр пишет, что обладает формулами, с помощью которых из известного решения (a, b, c) уравнения (10) могут быть “сформированы” новые решения путем последовательного получения из одного решения другого. Решения этой последовательности он называет “первой, или начальной, второй, третьей, и т.д. производными системами (derivative systems)” и приводит затем следующие два примера “производных систем”: 1) координаты точки пересечения касательной к кубической кривой в точке (a, b, c) и этой кривой; 2) координаты точки, в которой “коника, имеющая касание наибольшего порядка с кубической кривой”, пересекает эту кривую.

Обращаясь во второй части своей “Заметки...” к вопросу о “связи между этой теорией деривации и арифметикой уравнений третьей степени с тремя неизвестными с целыми коэффициентами”, Сильвестр вначале отмечает, что он установил существование большого класса уравнений, обладающих свойством, “что все их решения, если они существуют, являются monobasic; т.е. все их решения – известные функции одного из них”. Далее он пишет: “Если это решение представить как точку на кривой, соответствующей данной кубике, то все остальные возможные целочисленные решения будут представляться точками этой кривой, являющимися производными (derivatives) (в смысле, использованном выше в данной заметке) данной точки” [21, с. 118].

Итак, мы здесь опять сталкиваемся с геометрической интерпретацией решения неопределенного однородного уравнения 3-ей степени с тремя неизвестными в целых числах. Сильвестр также приводит и два геометрических способа нахождения нового целочисленного решения (10) по известному целочисленному решению: 1) с помощью проведения касательной к кривой (10), т.е. “метод касательной”; 2) с помощью проведения коники, касающейся (10), т.е. “метод конических сечений”, частным случаем которого является “метод парабол”.

Рассмотренные работы Сильвестра показывают, что уже к середине XIX века геометрические представления проникают в диофантов анализ. По-видимому, Сильвестр был одним из первых математиков, кто рассматривал задачу решения однородных диофантовых уравнений в целых числах как задачу об отыскании целочисленных точек на соответствующей кривой и пытался привлечь для исследования диофантовых уравнений геометрические средства. Однако в его работах 1847–1858 годов не было подробного изложения результатов и эффективность геометрического подхода к трактовке диофантовых уравнений будет показана им значительно позже, в 1880 году, в работе “On Certain Ternary Cubic-Form Equations” [23]. В целом же в середине XIX века при рассмотрении вопроса о рациональных решениях уравнения (1) и вопроса о целочисленных решениях уравнения (5) сохранялся алгебраический подход, даже если математики и понимали, что этот вопрос можно трактовать геометрически.

д) 1878 год, Э. Люка. Геометрическая формулировка методов касательной и секущей для общего однородного уравнения 3-ей степени с тремя неизвестными.

В 1878 году в печати появляется статья французского математика Эдуарда Люка (1842–1891) “Sur l’Analyse indéterminée du troisième degré...” [24], в которой однородное уравнение 3-ей степени (10) интерпретируется как уравнение кривой в однородных координатах на проективной плоскости и формулируются, причем вполне современным образом, процедуры нахождения рациональных (или целочисленных, что в данном случае одно и то же) точек на такой кривой – “метод касательной” и “метод секущей”⁵. Хотя, как мы видели, Сильвестр и до этого прибегал к геометрическому языку при рассмотрении методов нахождения целочисленных решений уравнения (10), тем не менее четкие геометрические формулировки методов касательной и секущей как основных методов отыскания целочисленных решений уравнения (10) по одному или двум известным целочисленным решениям появились впервые в печати именно в работе Люка. Поэтому не будем оспаривать, что методы касательной и секущей в их геометрическом виде были введены в диофантов анализ именно в 1878 году Эдуардом Люка. Подробнее о работе Люка см. в [25].

е) 1880 год, Дж. Дж. Сильвестр. Привлечение средств теории алгебраических кривых для исследования диофантовых уравнений.

В своей “Заметке...” [21] 1858 года Сильвестр выражает надежду, что будет “вскоре иметь спокойствие духа” для того, чтобы “дать миру мемуар, или его фрагмент” под названием “Об арифметической теории однородных кубических форм”. В этом мемуаре он, по-видимому, намеревался подробно изложить свою “теорию деривации”, о существовании которой сообщалось в “Заметке...”. Исполнить свое намерение Сильвестр смог только спустя более чем 20 лет, в работе “On Certain Ternary Cubic-Form Equations” [23]. Возможно, к этому времени “теория деривации” была разработана им более детально и глубоко по сравнению с первоначальным вариантом. В этой работе Сильвестр не только свободно использует геометрический язык при рассмотрении диофантовых уравнений 3-ей степени, но и привлекает для их исследования теорию алгебраических кривых. Благодаря такому подходу ему удается получить первые общие результаты о структуре множества рациональных решений уравнения (10). Эти результаты и составляют содержание его “теории рациональной деривации”, которую он излагает в первом номере “American Journal of Mathematics” за 1880 год.

Развивая свою “теорию деривации”, Сильвестр с самого начала ставит задачу общим образом: он рассматривает произвольную кубическую кривую на проективной плоскости и исследует множество Ω точек этой кривой, порожденное одной её произвольной точкой путем всевозможных применений методов касательной и секущей. Он не оговаривает, что эта точка должна иметь рациональные координаты, хотя, как следует из его замечаний в начале работы, рассмотрение Сильвестром множества Ω было связано с исследованием диофантовых уравнений, т.е. со случаем, когда исходная точка рациональна. Нахождение новой точки Q кубики по известной точке P методом касательной Сильвестр называет “тангенциализацией” (“tangentialization”), а полученную точку Q – “тангенциалью” (“tangential”) точки P . Точку R , полученную тангенциализацией из точки Q , он называет второй тангенциалью точки P , и т.д. Нахождение же новой точки кубики по двум известным точкам методом секущей он называет “коллинеацией” (“collineation”). Сильвестр пишет: “Рассмотрим на кубической кривой произвольную точку с ее последовательными тангенциальными до бесконечности. Мы можем, проведя прямые через любые две из этих точек, пересечь кривую, получая таким образом дополнительное множество точек. Расширенная таким образом система может быть снова подвергнута этому процессу коллинеации и тангенциализации и этот метод увеличения и расширения может быть продолжен до бесконечности. Всякая точка, найденная таким образом, будет рациональной производной (a rational derivative) от начальной точки (т.е. ее координаты

⁵Люка формулирует и третью процедуру, «метод конических сечений», который, как известно, сводится к комбинации первых двух методов.

будут рациональными целыми функциями от координат начальной точки)” [23, с. 58]. Сильвестр утверждает, что на первый взгляд мы будем получать описанным образом некую сеть “рациональных производных”, но на самом деле получается “линейная последовательность, или цепь, точек” (“a line or chain of points”), вообще говоря, бесконечная. Сильвестр также отмечает, что при некоторых положениях начальной точки эта последовательность может обрываться или закидываться, т.е. фактически она будет содержать только конечное число различных точек.

Чтобы обосновать свое утверждение относительно “линейной” структуры множества Ω , Сильвестр делает шаг принципиальной важности — он вводит понятие индекса точки, сопоставив каждой точке из Ω натуральное число, не делящееся на 3, весьма остроумным способом. Сильвестр использует обозначение $(A, B) = C$ или $A, B = C$, если точка C находится по точкам A и B при $A \neq B$ методом секущей и при $A = B$ методом касательной. Исходной точке кубики Сильвестр приписывает индекс 1, её первой тангенциали — индекс 2, а её второй тангенциали — индекс 4, т.е. он полагает $(1, 1) = 2$ и $(2, 2) = 4$. Далее он вводит последовательность точек, одновременно приписывая им индексы, по следующему правилу

$$(1, 4) = 5, (2, 5) = 7, (1, 7) = 8, (2, 8) = 10, (1, 10) = 11, (2, 11) = 13, \dots$$

т.е. по правилу

$$(1, 3k + 1) = 3k + 2, (2, 3k + 2) = 3k + 4, k = 1, 2, \dots,$$

и доказывает, что эта последовательность исчерпывает все множество Ω . Таким образом, Сильвестр нумерует точки из Ω с помощью их индексов, причем в процессе этой нумерации устанавливает простое правило оперирования с индексами при тангенциализации и коллинеации⁶. Это были первые результаты о структуре множества рациональных точек кубической кривой, получаемых из одной её рациональной точки с помощью всевозможных применений методов касательной и секущей.

Не ограничиваясь изучением множества Ω , Сильвестр дополняет Ω точкой перегиба кубической кривой (её координаты тоже должны быть рациональными, как Сильвестр отмечает в сноске в начале своей работы [23, с. 282]) и исследует структуру множества Ω_1 , порожденного с помощью методов касательной и секущей точками из $\Omega \cup \{I\}$, где I — указанная точка перегиба. Он показывает, что множество Ω_1 представляет собой “двойную шкалу”: одна часть точек из Ω_1 индексируется Сильвестром с помощью всех натуральных чисел, а другая — с помощью индексов $\{1', 2', 3', \dots, n', \dots\}$. Устанавливая правила оперирования с индексами точек из Ω_1 при тангенциализации и коллинеации, Сильвестр фактически вводит операцию на этом множестве. Более детальный анализ этого исследования Сильвестра можно найти в статьях [25], [26]. Здесь отметим только, что правила оперирования с индексами состояли из целого ряда случаев, отличающихся друг от друга по тому, есть у индексов штрихи или нет и каковы остатки от деления индексов на 3. Для доказательства этих правил в [23] применялась теорема о девяти точках на кубической прямой, которую Сильвестр использовал в следующей формулировке: для любых четырех точек A, B, C и D , принадлежащих кубической кривой, имеет место совпадение точек $((A, B), (C, D))$ и $((A, C), (B, D))$.

В работе [23] рассматриваются и другие вопросы, связанные с решением неопределенных уравнений и, в частности, со структурой множества Ω_1 . Так, Сильвестр исследует важный вопрос о том, когда из одной рациональной точки с помощью методов касательной и секущей получается лишь конечное число рациональных точек, т.е. когда множество Ω_1 оказывается конечным (подробнее об этом см. в [25]). Мы не будем останавливаться на этом рассмотрении

⁶Согласно этому правилу индекс точки, получаемой коллинеацией из точек с индексами m и n , равен тому из чисел $m + n$ и $|m - n|$, которое не делится на 3. При тангенциализации из точки с индексом m получается точка с индексом $2m$.

Сильвестра, в котором, на наш взгляд, были предприняты только первые попытки изучения данного вопроса, но было еще далеко от существенного продвижения в нем.

Итак, в [23] впервые исследование общего неопределенного уравнения 3-ей степени было осуществлено на основе теории алгебраических кривых. В результате оказалось возможным перейти от рассмотрения отдельных рациональных точек на кубической кривой, как это было до появления работы [23], к изучению всего множества рациональных точек, порожденного одной рациональной точкой с помощью методов касательной и секущей. С современной точки зрения множество Ω_1 , впервые введенное в рассмотрение Сильвестром, представляет собой циклическую подгруппу группы всех рациональных точек кубики, порожденную исходной рациональной точкой.

Мемуар Сильвестра отличался от всех предшествующих работ по диофантовым уравнениям 3-ей степени, во-первых, новым уровнем общности в постановке самой задачи исследования диофантовых уравнений и, во-вторых, принципиальным расширением средств их исследования.

ж) 1880 год, У. Стори. Применение аналитического аппарата теории эллиптических кривых.

Теория индексов Сильвестра, развитая для исследования множества рациональных точек на кривой третьего порядка, была переработана и существенно упрощена в том же 1880 году коллегой Сильвестра по университету Джонса Хопкинса американским математиком Уильямом Стори⁷ (1850–1930) в его статье «On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve» [27]. В [27] прежде всего отмечается, что «теория рациональной деривации» на кубической кривой была разработана Сильвестром «для целей решения арифметической задачи [т.е. для задачи о рациональных точках кубики – Т.Л.], но имеет интерес сама по себе с геометрической точки зрения» [27, с. 356]. Цель своей работы Стори видит в том, чтобы «развить эту новую теорию индексов в более общей и симметричной форме» и, «комбинируя ее, в конце

⁷Уильям Эдвард Стори (1850–1930) родился в Бостоне, штат Массачусетс, США, в семье адвоката Исаака Стори. Математическое образование получил в Гарварде, закончив университет с отличием в 1871 году. В том же году отправился в Германию, где продолжил изучение математики и физики. В Берлине слушал лекции Вейерштрасса, Куммера и Гельмгольца. Находясь в Лейпциге, написал под руководством К. Г. Неймана диссертацию «Об алгебраических соотношениях между полярами бинарной формы», за которую в 1875 г. получил степень доктора философии. Вернувшись в США, стал тьютором в Гарварде. Ещё в бытность студентом Гарварда Стори, благодаря своим способностям, обратил на себя внимание известного американского астронома и математика, профессора Гарварда, Бенджамина Пирса. Как пишут К. Паршалл и Д. Роу [27], когда Сильвестр стал подыскивать для университета Джонса Хопкинса кандидатуру на пост своего помощника, способного принять участие в налаживании исследовательской работы в университете, то Б. Пирс без колебаний рекомендовал Сильвестру Уильяма Стори. В 1876 г. последний стал сотрудником отделения математики в университете Джонса Хопкинса, взяв на себя практически полностью нагрузку, связанную с обучением математике по студенческим программам, в то время как Сильвестр посвящал свое время исключительно своим собственным исследованиям и занятиям с аспирантами. Стори также читал курсы и для аспирантов, в частности, в 1878–80 гг. он читал аспирантские курсы по плоским кривым высших порядков и по эллиптическим функциям. Возможно, именно это обстоятельство способствовало возникновению у Стори идеи о применении аппарата эллиптических функций к теории индексов Сильвестра, разработанной для плоских алгебраических кривых 3-го порядка. Стори пытался развивать отделение математики университета Джонса Хопкинса на основе германской модели, с которой познакомился во время своего пребывания в Берлине и Лейпциге. Так, он основал Математическое Общество в университете и был, наряду с Сильвестром, основателем *American Journal of Mathematics*, где на посту заместителя главного редактора ему приходилось выполнять большую работу. Правда, спустя некоторое время (не позднее 1884 г.) вынужден был из-за разногласий с Сильвестром оставить этот пост. Как отмечают К. Паршалл и Д. Роу, «Стори играл ключевую роль в успехе всей программы университета Хопкинса» [27, с. 109]. В 1889 г. Стори принял приглашение возглавить математическое отделение в недавно открытом университете Кларка (Вустер, штат Массачусетс), первом американском университете, созданном исключительно для обучения по аспирантским программам. Проработал в университете Кларка до 1921 года и за это время под его руководством было выполнено и защищено 16 диссертаций. Самым известным учеником Стори был Соломон Лефшец, выдающийся американский алгебраический геометр и тополог. Более детальную информацию о Стори и его роли в институционализации математических исследований в США можно найти в статье [28], содержащей много интересных подробностей.

концов, с теорией параметров, решить ряд задач, связанных прежде всего с перечислением точек [кубики – Т.Л.], обладающих определенными свойствами, аналогичными свойствам для особых точек...» [там же].

Заметим, что существует параллелизм между использованием Сильвестром индексов точек, составляющих «шкалу рациональных производных» или «пополненную шкалу рациональных производных», и использованием эллиптических параметров этих точек для описания множеств Ω и Ω_1 . Действительно, эллиптическую кривую 3-го порядка, заданную в нормальной вейерштрассовой форме⁸

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad (11)$$

и рассматриваемую над полем $\mathbb{C}$, можно параметризовать с помощью эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ и её производной $\wp'(z)$ с решеткой периодов $L[\omega_1, \omega_2]$. Эта параметризация задает биекцию между значениями комплексного параметра $z \pmod{L}$ и комплекснозначными точками $P(z) = (\wp(z), \frac{1}{2}\wp'(z))$ кривой (11), при этом бесконечно удаленной точке $(0 : 1 : 0)$ сопоставляется параметр $z = 0$. Как известно, указанную параметризацию можно задать таким образом, что для любых трех точек кривой (11), лежащих на одной прямой, будет справедливо соотношение $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{L}$, где z_1, z_2 и z_3 – параметры (или, согласно [1], эллиптические аргументы) этих точек. Нетрудно проверить, что если взять в процедуре Сильвестра в качестве точки перегиба I бесконечно удаленную точку $(0:1:0)$ и обозначить эллиптический параметр исходной точки с индексом 1 через z_1 , то множеству индексов

$$\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \cup \{1', 2', 3', \dots, n', \dots\}, \quad (12)$$

приписываемых Сильвестром точкам множества Ω_1 , будет соответствовать следующая последовательность эллиптических параметров этих точек:

$$\begin{aligned} &\{z_1, -2z_1, 3z_1, 4z_1, -5z_1, 6z_1, \dots, -(3k-1)z_1, 3kz_1, (3k+1)z_1, \dots\} \cup \\ &\cup \{-z_1, 2z_1, -3z_1, -4z_1, 5z_1, -6z_1, \dots, (3k-1)z_1, -3kz_1, -(3k+1)z_1, \dots\} \end{aligned} \quad (13)$$

(подробнее об этом см. [25]). Индексы точек, таким образом, если не обращать внимания на штрихи, есть просто модули коэффициентов при z_1 у эллиптических параметров этих точек. Правила же оперирования с индексами из системы (12), полученные Сильвестром, в точности соответствуют правилу оперирования с эллиптическими параметрами при «коллинеациях».

На связь между индексами и эллиптическими параметрами и обратил внимание Стори. Чтобы упростить сильвестрову теорию индексов, он предлагает так изменить определение, данное Сильвестром, чтобы индекс «производной» точки из множества Ω_1 стал просто равным «числу, на которое нужно умножить параметр начальной точки, чтобы получить параметр «производной» точки» [29, с. 357]. Заметив, что при определенной параметризации неособой кубики с помощью эллиптических функций условие коллинеарности трех ее точек с параметрами μ, μ' и μ'' имеет вид:

$$\mu + \mu' + \mu'' \equiv 0 \pmod{(\omega, \omega')} \quad (14)$$

где ω, ω' – примитивные периоды эллиптических функций, используемых для параметризации, Стори предлагает именно это условие сделать «нашим руководством при приписывании

⁸Уравнение любой эллиптической кривой 3-го порядка с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$, обладающей хотя бы одной рациональной точкой, всегда можно привести с помощью бирациональных преобразований (с коэффициентами из $\mathbb{Q}$) к виду (11). При этом можно считать, что $a, b \in \mathbb{Z}$. Если же уравнение кривой рассматривается над полем $\mathbb{C}$, то такое приведение с помощью бирациональных преобразований возможно всегда.

индексов, чтобы могло существовать упомянутое соотношение между индексом и параметром, т.е. для индексов a, b, c трех коллинеарных точек сохраняется фундаментальная формула

$$a + b + c = 0,$$

или

$$[a, b] = -(a + b), \quad (15)$$

если через $[a, b]$ обозначить индекс «связующей» двух точек⁹ с индексами a и b [29, с. 357-358].

Такой подход при введении индексов, основанный на едином правиле для оперирования с индексами и для оперирования с эллиптическими параметрами точек, позволил значительно упростить всю теорию Сильвестра. Полученные Сильвестром правила оперирования с индексами при «коллинеациях», состоящие из целого ряда случаев, были заменены одним единственным равенством (15). Сам вывод правил оперирования с индексами стал гораздо более коротким и изящным.

Мы не будем останавливаться подробно на теории индексов Стори, отсылая за подробностями к статье [25]. Отметим только, что для индексации точек из Ω_1 Стори использует множество целых чисел $\mathbb{Z}$, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{Z}$ и $(\Omega_1 \cup I)$. Способ действий при этом — вполне геометрический и состоит в использовании свойств кривой 3-го порядка: в основе доказательств лежит теорема о девяти точках на кубической кривой, которую использовал и Сильвестр, а также теорема о том, что точки, противоположные трем коллинеарным точкам кубики относительно одной и той же точки перегиба, также коллинеарны. Наряду с множеством Ω_1 Стори рассматривает и другие «пополненные шкалы рациональных производных» заданной точки кубики, используя для построения каждой из них свою точку перегиба кубики.

Если в первой части своей работы Стори строит теорию индексов чисто геометрически, а равенство (14) является лишь подсказкой для более «удобного» определения индекса точки, позволяющего упростить сильвестрову теорию, то во второй части работы [29] вопрос о связи между теорией индексов и теорией параметров точек на кубической кривой рассматривается более детально [29, с. 368-369]. Здесь Стори указывает, что в случае неособой кубической кривой координаты её произвольной точки могут быть выражены, согласно Клебшу [30], как двоякопериодические функции одного параметра и в качестве простейшего представления для неособой кубики приводит её параметризацию с помощью эллиптических функций Якоби:

$$x : y : z = sn\mu : (cn\mu \cdot dn\mu) : sn^3\mu.$$

Он устанавливает формулы, связывающие индекс и эллиптический параметр точки из любой «пополненной шкалы рациональных производных» начальной точки. В соответствии с этими формулами, если точка перегиба неособой кубики, используемая для построения «пополненной шкалы» Ω_1 , имеет эллиптический параметр, равный 0, то эллиптический параметр точки с индексом a , $a \in \mathbb{Z}$, будет равен просто $a\mu$, где μ — эллиптический параметр исходной точки.

Стори решает ряд задач из теории алгебраических кривых, соединяя развитую им теорию индексов с использованием параметрического представления кубической кривой. Мы не будем останавливаться здесь на этих задачах, так как они не имеют прямого отношения к вопросам диофантова анализа.

Итак, обращение к аналитическому аппарату эллиптических кривых позволило Стори кардинально упростить теорию индексов Сильвестра, разработанную последним в [23] для изучения структуры множества Ω_1 рациональных точек кубики, порожденного одной рациональной

⁹Под «связующей» здесь понимается точка кубики, полученная из точек с индексами a и b с помощью метода секущей (или с помощью метода касательной, если $a = b$). Сильвестр обозначает индекс «связующей» через (a, b) .

точкой с помощью методов касательной и секущей (и с помощью рациональной точки перегиба). Была установлена полная аналогия между оперированием с индексами и оперированием с эллиптическими параметрами точек из Ω_1 . Из рассуждений Стори непосредственно следовало, что множество рациональных точек кубики, введённое Сильвестром в [23], имеет простое описание с помощью эллиптических параметров этих точек. Однако в статье [29] теория индексов применяется для исследования строения самой кубической кривой, а не множества её рациональных точек.

Интересно, что Сильвестр не только дал положительную оценку работе [29], но и обратил на нее внимание А. Кэли, подчеркнув при этом факт применения в [29] теории эллиптических функций. В письме к А. Кэли от 12 мая 1881 года Сильвестр пишет, что у Стори «есть первоклассная статья, которая выйдет в нашем следующем номере [журнала], расширяющая и завершающая мою теорию рациональной деривации на кубических кривых — которая, я думаю, заинтересует Вас, поскольку он рассматривает приложение эллиптических функций к этому вопросу» [22, с. 201-202].

Отметим также, что Пуанкаре, изучая в [1] множество Ω всех точек кубики рода 1, порожденное одной её рациональной точкой путем всевозможных применений методов касательной и секущей, вводит точки этого множества в той же самой последовательности, что и Сильвестр, и Стори. Но для описания множества Ω он сразу использует эллиптические параметры точек, не вводя понятие индекса, и получает, что все точки рассматриваемого множества имеют параметры вида $(3n+1)\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, где α — эллиптический параметр исходной точки. В рассмотрении множества точек кубики, порожденного одной её рациональной точкой, Сильвестр и Стори пошли даже несколько дальше Пуанкаре, дополнив множество Ω точкой перегиба кубики и введя в рассмотрение точки кубики, противоположные точкам из Ω относительно этой точки перегиба. В результате они приходят к построению множества Ω_1 , которое с современной точки зрения есть циклическая подгруппа группы всех рациональных точек эллиптической кривой, порожденная одной её рациональной точкой. У Пуанкаре эта конструкция в явном виде отсутствует.

Трудно сказать, знал ли Пуанкаре о работах [23] и [29], поскольку он вообще не упоминает предшественников в своем мемуаре. Нет у него и упоминания имен Сильвестра и Стори, так же, как, например, нет упоминания имен Гильберта и Гурвица, опубликовавших в 1890 г. результаты о множестве рациональных точек кривой рода 0.

з) 1890 год, Д. Гильберт, А. Гурвиц. Алгебро-геометрическое исследование структуры множества рациональных точек на кривых рода 0.

Через 10 лет после выхода в свет работ Сильвестра и Стори была опубликована статья Д. Гильберта (1862-1943) и А. Гурвица (1859-1919) «Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null» [31]. Статья была посвящена задаче нахождения всех целочисленных решений уравнения

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (16)$$

где $f(x_1, x_2, x_3)$ — однородный многочлен степени n с целочисленными коэффициентами, в предположении, что уравнение (16) задаёт плоскую алгебраическую кривую рода 0. Авторы отмечают, что вопрос о всех рациональных точках кривой (16) означает по существу ту же задачу. Они также отмечают, что в своем рассмотрении будут опираться на статью М. Нётера [32].

В результате исследования, проведенного в [31], было установлено, что уравнение (16) либо не имеет целочисленных решений, либо имеет конечное число решений, причем все эти решения соответствуют особым точкам кривой (16), либо, в случае если кривая (16) имеет хотя бы одну неособую целочисленную точку, уравнение (16) имеет бесконечно много целочисленных решений. Причем все целочисленные решения, соответствующие неособым точкам

кривой (16), можно выразить как рациональные функции параметра. Полученные выводы основывались на факте бирациональной эквивалентности плоской кривой n -го порядка рода 0 и кривой 1-го или 2-го порядка.

Статья Гильберта и Гурвица [31] является, по-видимому, первой работой, в которой для исследования проблемы о рациональных решениях неопределенного уравнения выделяется класс уравнений не по признаку одинаковой степени, как это было на протяжении многих столетий, а по признаку одинакового рода соответствующей кривой. Результаты, полученные в [31], указывали на важность для исследования указанной проблемы такой алгебро-геометрической характеристики, как род кривой, являющейся инвариантом бирациональных преобразований, и на плодотворность применения самих бирациональных преобразований. Исследование, проведенное в [31], было осуществлено уже целиком в рамках алгебраической геометрии.

4. Заключение

Хотя вплоть до начала XX века в подавляющем большинстве исследований, посвященных решению диофантовых уравнений в рациональных числах, рассматривались отдельные конкретные уравнения и использовались рассуждения теоретико-числового характера или алгебраический подход Диофанта — Ферма — Эйлера (см. [33]), тем не менее в течение XIX века появился ряд важных работ, отличающихся более общим взглядом на предмет исследования и расширением средств исследования диофантовых уравнений. В этих работах рассматриваются не отдельные типы неопределенных уравнений 3-ей степени вида (2) и (3), а общее однородное уравнение 3-ей степени с тремя неизвестными. В диофантов анализ вводится геометрический язык, причем проблема решения в рациональных числах диофантовых уравнений 3-ей степени не только формулируется геометрически, но и впервые исследуется средствами теории алгебраических кривых. Указанная проблема ставится на новый уровень общности: происходит переход от рассмотрения отдельных рациональных решений уравнения (10) к изучению строения всего множества рациональных точек на кубической кривой. В работе [23] Сильвестр получает первые содержательные результаты на эту тему. Помимо чисто геометрического подхода используется и аналитический аппарат для описания множества рациональных точек на эллиптической кривой (теорема сложения эллиптических интегралов — Якоби, 1835 год; параметризация эллиптической кривой с помощью эллиптических функций — Стори, 1880 год). Именно расширение средств исследования и использование аппарата эллиптических функций приводит к существенному упрощению рассмотрений Сильвестра в работе Стори [29]. Впервые единообразно исследуется структура множества рациональных точек для всех плоских кривых рода 0 и тем самым выясняется важная роль понятия рода кривой при изучении множества рациональных решений диофантовых уравнений.

Таким образом, на протяжении всего XIX века мы видим непрекращающиеся попытки при трактовке диофантовых уравнений выйти за рамки алгебраического подхода Диофанта — Ферма — Эйлера, который почти полностью исчерпал себя уже в творчестве Эйлера. После Лагранжа [11] и Коши [12], пришедших к методам касательной и секущей для неопределенного уравнения 3-ей степени в наиболее общей формулировке (у Лагранжа — только метод касательной), никаких заметных результатов в рамках чисто алгебраического подхода, по-видимому, получено не было. Стоит, однако, отметить, что все рассмотренные нами работы, за исключением, может быть, только статьи Гильберта и Гурвица [31], занимали до некоторой степени изолированное положение в диофантовом анализе XIX века, они непосредственно не стали отправными точками для создания новых направлений в исследовании проблемы о рациональных решениях диофантовых уравнений. В XIX веке происходило, скорее, постепенное накопление отдельных, но весьма важных и ярких результатов, предвосхищавших необходи-

мое наступление нового этапа в развитии диофантова анализа. Начало этому этапу и положил мемуар А. Пуанкаре [1], в котором был дан эскиз построения диофантова анализа, точнее, той его части, в которой идет речь о рациональных решениях диофантовых уравнений, на фундаменте алгебраической геометрии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques // J. Math. Pures Appl. 1901. Ser. 5. Vol. 7. P. 161–233. (Русский перевод: Пуанкаре А. Об арифметических свойствах алгебраических кривых // Избранные труды. Т.2. М., 1972. С. 901–960.)
2. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: Наука, 1984 (переизд.: М.: ЛЕНАНД, 2015).
3. Hofmann J. E. Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung // Arch. Hist. Exact Sci. 1961. Vol.1, №2. P. 122–159.
4. Weil A. Number Theory. An Approach through History: from Hammurapi to Legendre. Boston, etc.: Birkhäuser, 1983 (reprint. Boston: Birkhäuser, 2007).
5. Лавриненко Т. А. Неопределенные уравнения в работах Л. Эйлера и математиков XIX века. : дис. канд. физ. -мат. наук: 07.00.10. М., 1984. 166 с.
6. Лавриненко Т. А. Диофантовы уравнения в работах Л. Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. М.: Наука, 1988. С. 153–165.
7. Euler L. Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersbourg, 1770 (reprint. Stuttgart, 1959). (Также в: Leonhardi Euleri Opera omnia, ser. 1. V. 1. P. 209–498. Lipsiae et Berolini, 1911.).
8. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. V. 1.
9. Лавриненко Т. А. Реконструкции методов получения четырех формул из неопубликованных рукописей Эйлера по диофантову анализу // История и методология естественных наук. Вып. XXXII. Математика, механика. М.: Изд-во Московского университета, 1986. С. 111–120.
10. Лавриненко Т. А. Решение неопределенных уравнений 3-й и 4-й степеней в поздних работах Эйлера // Историко-математические исследования. Вып.27. М., 1983. С. 67–79.
11. Lagrange J. L. Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante // Nouveaux Mémoires de l'Ac. royale des sc. et belle-lettre de Berlin, 1777. (Также в: Lagrange J. L. Oeuvres. Paris, 1869. T. 4. P. 377–398.).
12. Лавриненко Т. А. Методы решения неопределенных уравнений в рациональных числах в XVIII–XIX веках // Историко-математические исследования. Вып.28. М., 1985. С. 202–223.
13. Cauchy A. Sur la resolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers // Cauchy A. Exercices de mathématiques. Paris, 1826. (Также в: Cauchy A. Ouevres complètes (II). Paris, 1887. T.6. P. 286–315.).
14. Jacobi C. De Usu Theoriae Integralium Ellipticorum et Integralium Abelianorum in Analysisi Diophantea // Crelle Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1835. V. 13. P. 353–355. (Также в: Jacobi C. Gesammelte Werke. Berlin, 1882. Bd. 2. S. 53–55.).

15. Башмакова И. Г. Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре) // Историко-математические исследования. 1975. Вып. 20. С. 104–124 (на англ. языке: Bashmakova I. G. Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré // *Historia Mathematica*. 1981. V. 8, №4. P. 393–416.).
16. Newton I. *Mathematical Papers*. Vol.4 / Ed. D.T. Whiteside. Cambridge, 1971.
17. Sylvester J. J. An Account of a Discovery in the Theory of Numbers Relative to the Equation $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$ // *Philosophical Magazine*. 31(1847). P. 189–191. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.1. Cambridge Univ. Press. P. 107–109.).
18. Sylvester J. J. On the Equation in Numbers $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$, and Its Associate System of Equations // *Phil. Mag.* 31(1847). P. 293–296. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.1. Cambridge Univ. Press. P. 110–113.).
19. Sylvester J. J. On the General Solution (in Certain Cases) of the Equation $x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$ & c. // *Phil. Mag.* 31(1847). P. 467–471. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.1. Cambridge Univ. Press. P. 114–118.).
20. Sylvester J. J. Recherches sur les solutions en nombres entiers positifs ou négatifs de l'équation cubique homogène à trois variables // *Annali di scienze matematiche e fisiche*. 7 (1856). P. 398–400. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.2. Cambridge Univ. Press. P. 63–64.).
21. Sylvester J. J. Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree // *Phil. Mag.* 16(1858). P. 116–119. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.2. Cambridge Univ. Press. P. 107–109.).
22. Parshall K. *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
23. Sylvester J. J. On Certain Ternary Cubic-Form Equations // *Amer. J. Math.* 2 (1879), p. 280–285 and p. 357–393; 3 (1880), p. 58–88 and p. 179–189. (Также в: Sylvester J. J. *Collected Mathematical Papers*. V.3. Cambridge Univ. Press. P. 312–391.).
24. Lucas É. Sur l'Analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 (Sylvester) // *Nouv. ann. math.* 2e série, 17. 1878. P. 507–514.
25. Lavrinenko T. A. Solving an Indeterminate Third Degree Equation in Rational Numbers. Sylvester and Lucas // *Revue d'Histoire des Mathématiques (Société Mathématique de France)*. 2002. T.8, №1. P. 67–111.
26. Лавриненко Т. А., Михно Г. А. О введении групповой структуры на множестве точек кубики и решении диофантовых уравнений // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2014. №4. С. 95–104.
27. Parshall K., Rowe D. *The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*. // Providence: American Mathematical Society, 1994.
28. Cooke R., Rickey F. W. E. *Story of Hopkins and Clark* // *A Century of Mathematics in America. Part III* / ed. *Peter Duren*. Providence: American Mathematical Society, 1989. P. 29–76.
29. Story W. E. On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve // *Amer. J. Math.* (3) 1880. P. 356–387.

30. Clebsch A. Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung // Crelle J. für die r. und ang. Math.. 63(1864).
31. Hilbert D., Hurwitz A. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null // Acta Mathematica. 1890. V. 14. P. 217–224.
32. Noether M. Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen // Math. Annalen. 23(1884). S. 311–358.
33. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers. V.2: Diophantine Analysis. Washington, 1920 (reprint. Bronx (Chelsea), 1971).

REFERENCES

1. Poincaré, J. H. 1901, “Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5e série, 7, pp. 161–233.
2. Bashmakova, I. G. & Slavutin, E. I. 1984, *History of Diophantine Analysis from Diophantus to Fermat*, Nauka, Moscow (reprint. 2015, LENAND, Moscow) (in Russian)
3. Hofmann, J. E. 1961, “Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung”, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 1, pp. 122–159.
4. Weil, A. 1983, *Number Theory. An Approach through History: from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, etc. (reprint. 2007, Birkhäuser, Boston).
5. Lavrinenko, T. A. 1984, *Indeterminate equations in the works of L. Euler and mathematicians of the 19th century. Dissertation*, Moscow, 166 p. (in Russian)
6. Lavrinenko, T. A. 1988, “Diophantine Equations in L. Euler’s Works”, in *The Development of Leonard Euler’s Ideas and Modern Science*, Nauka, Moscow, pp. 153–165 (in Russian).
7. Euler, L. 1770, *Vollständige Anleitung zur Algebra, Zweyter Teil*, Petersbourg (reprint. 1959, Stuttgart); 1911, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser.1, vol. 1, Lipsiae et Berolini, pp. 209–498.
8. Euler, L. 1862, *Opera postuma mathematica et physica*, Vol. 1, Petropoli.
9. Lavrinenko, T. A. 1986, “Reconstructions of methods for obtaining four formulas from unpublished Euler manuscripts on Diophantine analysis”, *Istoriya i metodologiya estestvennih nauk*, vol. XXXII, pp. 111–120 (in Russian).
10. Lavrinenko, T. A. 1983, “Solving of Indeterminate Equations of Third and Fourth Degrees in the Late Euler’s Works”, *Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya*, vol. 27, pp. 67–79 (in Russian).
11. Lagrange, J. L. 1777, “Sur quelques problèmes de l’analyse de Diophante”, *Nouveaux mémoires de l’Académie royale des sciences, et belles-lettres de Berlin*, 1777; Lagrange, J. L. 1869, *Oeuvres*, vol. 4, Gauthiers-Villars, Paris, pp. 377–398.
12. Lavrinenko, T. A. 1985, “On Methods of Solving Indeterminate Equations in Rational Numbers in the 18th–19th centuries”, *Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya*, vol. 28, pp. 202–223 (in Russian).
13. Cauchy, A.–L. 1826, *Exercices de mathématiques*, Paris; Cauchy, A.–L., 1887, *Oeuvres complètes* (II) 6, Paris, pp. 286–315.

14. Jacobi, C. G. J. 1835, “De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianorum in analysi diophantea”, *J. reine angew. Math.*, vol. 13, pp. 353–355; Jacobi C. 1882, *Gesammelte Werke*, Bd. 2, Berlin, S. 53–55.
15. Bashmakova, I. G. 1975, “Arithmetic of algebraic curves (from Diophantus to Poincaré)”, *Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya*, vol. 20, pp. 104–124 (in Russian); Bashmakova, I. G., 1981, “Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré”, *Historia Mathematica*, vol. 8, no. 4, pp. 393–416 (in English).
16. Newton, I. 1971, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol.4, Whiteside, D. T. (ed.), Cambridge.
17. Sylvester, J. J. 1847, “An Account of a Discovery in the Theory of Numbers Relative to the Equation $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$ ”, *Philosophical Magazine*, 31, pp. 189–191; Sylvester, J. J. 1904, *Collected Mathematical Papers*, 1, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 107–109.
18. Sylvester, J. J. 1847, “On the Equation in Numbers $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$, and Its Associate System of Equations”, *Phil. Mag.*, 31, pp. 293–296; Sylvester, J. J. 1904, *Collected Mathematical Papers*, 1, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 110–113.
19. Sylvester, J. J. 1847, “On the General Solution (in Certain Cases) of the Equation $x^3 + y^3 + Az^3 = Mxyz$ &c.”, *Phil. Mag.*, 31, pp. 467–471; Sylvester, J. J. 1904, *Collected Mathematical Papers*, 1, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 114–118.
20. Sylvester, J. J. 1856, “Recherches sur les solutions en nombres entiers positifs ou négatifs de l’équation cubique homogène à trois variables”, *Annali di scienze matematiche e fisiche*, 7, pp. 398–400; Sylvester, J. J. 1908, *Collected Mathematical Papers*, 2, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 63–64.
21. Sylvester, J. J. 1858, “Note on the Algebraical Theory of Derivative Points of Curves of the Third Degree”, *Phil. Mag.*, 16, pp. 116–119; Sylvester, J. J. 1908, *Collected Mathematical Papers*, 2, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 107–109.
22. Parshall, K. H. 1998, *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letter*, Oxford University Press, Oxford.
23. Sylvester, J. J. 1879/80, “On Certain Ternary Cubic-Form Equations”, *Amer. J. Math.*, 2, pp. 280–285 and 357–393; 3, pp. 58–88 and 179–189; Sylvester, J. J., *Collected Mathematical Papers*, 3, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 312–391.
24. Lucas, É. 1878, “Sur l’analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 (Sylvester)”, *Nouv. ann. math.*, 2e série, 17, pp. 507–514.
25. Lavrinenko, T. A. 2002, “Solving an Indeterminate Third Degree Equation in Rational Numbers. Sylvester and Lucas”, *Revue d’Histoire des Mathématiques (Société Mathématique de France)*, t.8, no. 1, pp. 67–111.
26. Lavrinenko T. A. & Михно Г. А., 2014, “On the introduction of a group structure on a cubic and solving Diophantine equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, no. 4, pp. 95–104 (in Russian).
27. Parshall, K. H. & Rowe, D. E. 1994, *The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876–1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*, American Mathematical Society, Providence.

28. Cooke, R. & Rickey, V. F. 1989, “W. E. Story of Hopkins and Clark”, in Duren (Peter) et al., eds., *A Century of Mathematics in America – Part III*, American Mathematical Society, Providence, pp. 29–76.
29. Story, W. E. 1880, “On the Theory of Rational Derivation on a Cubic Curve”, *Amer. J. Math.*, 3, pp. 356–387.
30. Clebsch, R. F. A. 1864, “Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 63, pp. 94–121.
31. Hilbert D. & Hurwitz A. 1890, “Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null”, *Acta Mathematica*, V. 14, P. 217–224.
32. Noether M. 1884, “Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen”, *Math. Annalen*, 23, S. 311–358.
33. Dickson, L. E. 1920, *History of the Theory of Numbers, vol. 2: Diophantine Analysis*, Carnegie Institute of Washington, Washington (reprint. 1971, Chelsea, New York).

Получено 10.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.