

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382

О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики¹

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Ларин Николай Владимирович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Larin220577@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической монохроматической звуковой волны на абсолютно жесткой сфере. Для представления рассеянного поля используется представление в виде интеграла Кирхгофа. Это приводит к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода для определения потенциала скорости в рассеянной волне на поверхности рассеивателя. Показано, что использование квадратурных формул на основе сеток Смоляка позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов, при решении интегрального уравнения и при вычислении рассеянного поля на поверхности сферы и в дальней зоне. Этот метод сравнивался с методом простых ячеек, который учитывает механическую постановку задачи и имеет тот же порядок точности. Оценка точности вычисления давления на поверхности сферы и функции рассеянного поля на основе решения интегрального уравнения проводится путем сравнения с аналитическим решением на основе разложения по сферическим волновым функциям.

Ключевые слова: дифракция, сферические звуковые волны, линейные интегральные уравнения, интерполяция, интерполяционные многочлены, квадратурные формулы, периодизация, сетки Смоляка, параллелепипедальные сетки.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 368–382.

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ 19-41-710005 р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382

**About application of number-theoretic grids
in problems of acoustics**

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Larin Nikolai Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: Larin220577@gmail.com

Abstract

The article discusses spherical diffraction problem monochromatic sound wave absolutely rigid sphere. To represent the scattered field, a representation in the form of a Kirchhoff integral is used. This leads to the need to solve the Fredholm integral equation of the second kind to determine the velocity potential in the scattered wave on the surface of the scatterer. It is shown that the use of quadrature formulas based on number-theoretic grids allows you to reduce the number of calculations for the approximate calculation of integrals, when solving the integral equation and when calculating the scattered field on the surface of the sphere and in the far field. This method was compared with the simple cell method, which takes into account the mechanical formulation of the problem and has the same order of accuracy. Estimation of the accuracy of calculating the pressure on the surface of the sphere and the form-function of the scattered field based on the solution of the integral equation was carried out by comparison with the analytical solution based on the expansion in spherical wave functions.

Keywords: diffraction, spherical sound wave, linear integral equations, interpolation, interpolation polynomials, quadrature formulas, periodization, Smolyak grids, parallelepiped grids.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, N. V. Larin, 2021, "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368–382.

1. Введение

При решении задач акустики широко используется метод интегральных уравнений, основанный на интегральном представлении излучаемого или рассеянного звукового поля в форме

Кирхгофа-Гельмгольца, которая предполагает определение акустического поля вне рассеивателя (излучателя) по известным характеристикам поля на поверхности объекта в виде интеграла по этой поверхности. Для большей части интересных для практики задач дифракции звуковых волн представление рассеянной звуковой волны в форме Кирхгофа-Гельмгольца приводит к необходимости приближенного решения интегральных уравнений относительно потенциала скорости частиц жидкости в рассеянном поле.

Такой подход к решению задач дифракции звука в литературе часто называют методом граничных интегральных уравнений (ВИЕМ) или методом граничных элементов (ВЕМ). Он активно используется исследователями для решения задач о рассеянии звука различными объектами. Например в работе [1] рассматривается итерационная процедура решения задач рассеяния (излучения) звука на основе граничных интегральных уравнений. В работе [2] метод ВИЕМ используется для расчета рассеяния звука от конечного жесткого цилиндра вблизи мягкой границы. Авторами работы [3] выполнен анализ эффекта использования изогометрических граничных элементов при исследовании акустического рассеяния на твердых телах с использованием метода граничных элементов. В монографии [4] изложены принципы использования интегральных уравнений для решения задач излучения и дифракции звука, представлено решение некоторых задач.

Численная реализация метода граничных интегральных уравнений имеет ряд ограничений. Одно из них связано с обеспечением требуемой точности приближенного решения интегрального уравнения. При дискретизации интегрального уравнения для получения удовлетворительной точности возникает необходимость разбиения поверхности, по которой осуществляется интегрирование, на интервалы длиной не более одной десятой длины звуковой волны. Это ограничивает волновые размеры тела, так как порядок системы алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации, не должен быть слишком большим для возможности практических вычислений. Таким образом, возникает проблема построения сетки со сравнительно небольшим числом узлов, чтобы решение задачи с требуемой точностью было пригодно в широком диапазоне волновых размеров тела. В настоящей работе на основе решения эталонной задачи дифракции сферической звуковой волны на абсолютно жесткой сфере производится сравнительный анализ решений интегральных уравнений с помощью классических формул численного интегрирования и формул, построенных на теоретико-числовых сетках.

2. О теоретико-числовых сетках

Теоретико-числовые сетки возникают при решении классических задач теоретико-числового метода в приближенном анализе: численное интегрирование и интерполирование функций многих переменных, решение линейных интегральных уравнений, решение дифференциальных уравнений в частных производных. В этой работе нас будут интересовать задачи численного решения линейных интегральных уравнений и построения по полученному решению интерполяционного многочлена, с целью проведения численного эксперимента по применению теоретико-числовых сеток к решению задач акустики.

Теоретико-числовые сетки (см. [8]) можно поделить на два класса, которые для своего оптимального применения требуют периодизации и для которых периодизация не дает эффекта улучшения точности. Наиболее интересны для нас сетки Смоляка и параллелипедальные сетки, так как они при интегрировании периодических функций из класса Коробова E_s^α учитывают класс гладкости α .

Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода и Вольттера описаны, как с применением теоретико-числовых методов [9], [10], так и с применением других методов [11, 12, 13].

Математические вопросы построения интерполяционных многочленов с использованием,

как теоретико-числовых, так и других методов описаны в работах [9, 14, 15, 16, 19].

3. Постановка задачи

Рассмотрим абсолютно жесткую сферу T радиуса a , находящуюся в безграничном пространстве Ω , заполненном идеальной жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c . Пусть из внешнего пространства на тело падает сферическая звуковая волна Ψ_0 , излучаемая точечным источником, расположенным в точке M_0 (рис. 1).

Введем декартову систему координат x, y, z с началом O в центре сферы. В сферической системе координат r, θ, φ , связанной с декартовой соотношениями $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, положение источника определяется координатами $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

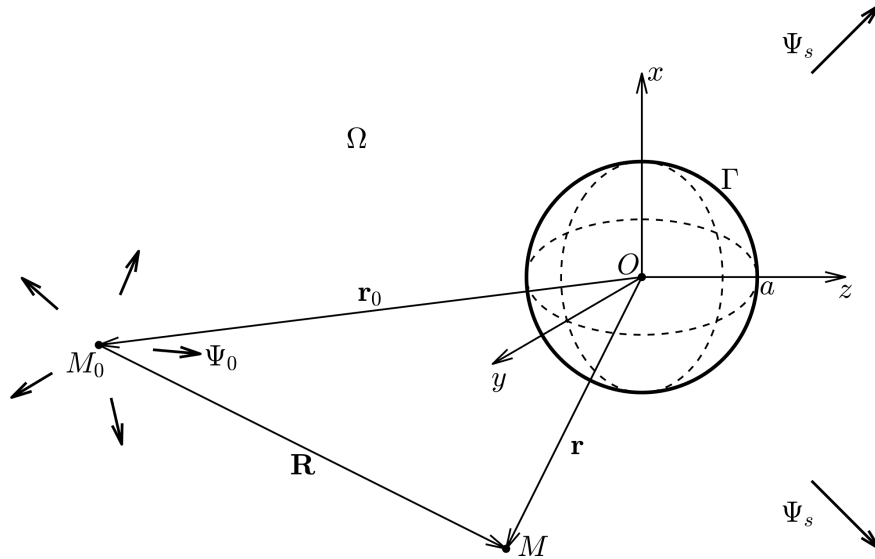


Рис. 1: Геометрия задачи

Потенциал скорости падающей волны запишется в виде

$$\Psi_0 = A \exp[i(kR - \omega t)]/R,$$

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновое число в окружающей жидкости; ω – круговая частота; λ – длина волны; t – время; R – длина вектора $\mathbf{R} = \overline{M_0M}$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0);$$

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения M ; $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки источника M_0 .

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное сферой.

Заметим, что расположение источника можно выбрать так, чтобы задача стала осесимметричной. Однако рассмотрим общий случай произвольного расположения источника, который возникает, например, при рассмотрении рассеяния сферической волны на двух и более телах или в присутствии границ раздела сред.

4. Решение задачи методом интегральных уравнений

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [5]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$ – потенциал скорости полного акустического поля; Ψ_s – потенциал скорости рассеянной волны;

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

– оператор Лапласа в сферической системе координат.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho\omega\Psi.$$

Граничные условия на поверхности Γ сферы заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости $v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего граничному условию (2) и условиям излучения на бесконечности [5].

Согласно методу интегральных уравнений [4] рассеянное телом поле записывается в виде

$$\Psi_s(M) = \int_S \left[\Psi_s(Q) \frac{\partial G(M; Q)}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial \Psi_s(Q)}{\partial \mathbf{n}_1} G(M; Q) \right] dS_1, \quad (3)$$

где M – точка наблюдения, имеющая сферические координаты (r, θ, φ) ; Q – точка на поверхности тела S с координатами (a, θ_1, φ_1) ; G – функция Грина для свободного пространства, удовлетворяющая неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) + k^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1);$$

$\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор точки Q ; $dS_1 = a^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ – элемент поверхности. Индекс 1 в формуле (3) означает, что дифференцирование и интегрирование производится по отношению к переменной r_1 .

В трехмерном случае функция Грина выбирается в виде потенциала точечного источника

$$G(M; Q) = \exp(ikR_1)/R_1,$$

где R_1 – расстояние между точками M и Q ;

$$R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma_1}, \quad \cos \gamma_1 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Для определения рассеянного телом поля $\Psi_s(M)$ необходимо сначала найти поле на поверхности тела $\Psi_s(Q)$. Устремляя точку M на поверхность тела, из (3) получаем [4]

$$\frac{1}{2} \Psi_s(\mathbf{r}_2) = \int_S \left[\Psi_s(\mathbf{r}_1) \frac{\partial G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial \Psi_s(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}_1} G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) \right] dS_1, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_2$ – радиус-вектор точки на поверхности тела.

Из граничного условия (2) имеем

$$\left. \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right|_{r=a}.$$

Тогда интегральное уравнение (4) принимает вид

$$\Psi_s(\mathbf{r}_2) + \int_S \Psi_s(\mathbf{r}_1) K(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) dS_1 = f(\mathbf{r}_2), \quad (5)$$

где

$$K(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = -2 \frac{\partial G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}}; \quad f(\mathbf{r}_2) = -2 \int_S \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) dS_1.$$

Запишем интегральное уравнение Фредгольма второго рода (5) с ядром $K(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)$ и правой частью $f(\mathbf{r}_2)$ в сферической системе координат. Будем иметь

$$\Psi_s(\theta_2, \varphi_2) + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi_s(\theta_1, \varphi_1) K(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) a^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 = f(\theta_2, \varphi_2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} K(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) &= -2 \left. \frac{\partial G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right|_{r_1=r_2=a}; \\ f(\theta_2, \varphi_2) &= -2a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Psi_0(r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1) \right]_{r_1=r_2=a} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1; \\ G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1)|_{r_1=r_2=a} &= \left. \frac{\exp(ikR_1)}{R_1} \right|_{r=a, \theta=\theta_2, \varphi=\varphi_2}; \\ \frac{\partial G(r_2, \theta_2, \varphi_2; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \Big|_{r_1=r_2=a} &= \left[\frac{ikR-1}{R^3} \exp(ikr)(r-r_1 \cos \gamma_1) \right]_{r=a, \theta=\theta_2, \varphi=\varphi_2}; \\ \frac{\partial \Psi_0(r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a} &= \left[A \frac{ikR-1}{R^3} \exp(ikr)(r-r_0 \cos \gamma) \right]_{r=a, \theta=\theta_1, \varphi=\varphi_1}. \end{aligned}$$

Интегралы, стоящие в левой и правой частях уравнения (6) следует понимать в смысле главного значения.

Таким образом, для решение поставленной задачи осуществляется в два этапа. Сначала решается интегральное уравнение (6) и находится функция Ψ_s на поверхности тела $r = a$. Затем по формуле (3) вычисляется рассеянное акустическое поле в пространстве.

Формула (3) в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_s(r, \theta, \varphi) &= a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\Psi_s(a, \theta_1, \varphi_1) \frac{\partial G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Psi_0(r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) \right]_{r_1=a} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля, полагая $kr \gg 1$. Тогда

$$G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1)|_{r_1=a} = \frac{\exp(ikR_1)}{R_1} \approx \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad \theta \frac{\partial G(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a} \approx ik \frac{\exp(ikr)}{r}.$$

В результате из (7) получим следующее выражение для потенциала рассеянной волны

$$\Psi_s = \frac{a}{2r} \exp(ikr) F(\theta, \varphi), \quad (8)$$

где

$$F(\theta, \varphi) = 2a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ik \Psi_s(a, \theta_1, \varphi_1) + \frac{\partial \Psi_0(a, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1} \right] \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \quad (9)$$

5. Дискретизация интегрального уравнения

Для численного решения интегрального уравнения (6) проведем его дискретизацию, воспользовавшись методом ячеек [6].

Разобьем поверхность сферы на ячейки, образованные пересечением меридианов $\theta = \theta_q$ ($q = 1, 2, \dots, N$) и параллелей $\varphi = \varphi_l$ ($l = 1, 2, \dots, L$) с шагами $h_\theta = \frac{\pi}{N}$ и $h_\varphi = \frac{2\pi}{L}$ соответственно. Всего будем иметь $N \times L$ ячеек. Площадь каждой ячейки (q, l) равна

$$S_{ql} = a^2 \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (q = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L).$$

Согласно методу ячеек

$$a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \approx \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L f(\bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l) S_{ql}, \quad (10)$$

где $(\bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)$ – координаты центра ячейки (q, l) ; $\bar{\theta}_q = (\theta_q + \theta_{q+1})/2$; $\bar{\varphi}_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1})/2$. Таким образом, квадратурная формула (10) будет содержать $N \times L$ узлов.

Введем следующие обозначения:

$$p_{ql} = \Psi_s(\bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l), \theta K_{ijql} = K(\bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_j; \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l), \theta f_{ij} = f(\bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_j).$$

Тогда на основании формулы (10) запишем дискретный аналог интегрального уравнения (6)

$$p_{ij} + \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \alpha_{ijql} p_{kl} = f_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, L), \quad (11)$$

где

$$\alpha_{ijql} = K_{ijql} S_{ql}; \theta f_{ij} = -2 \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \frac{\partial \Psi_0(a, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} G(a, \bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_j; a, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l) S_{ql}.$$

Система (11) есть система $N \times L$ линейных алгебраических уравнений с $N \times L$ неизвестными p_{ql} ($q = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L$).

При численной реализации в точках сингулярности $(\theta_1 = \theta_2, \varphi_1 = \varphi_2)$ значения функций $g_1(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) = G(a, \theta_2, \varphi_2; a, \theta_1, \varphi_1)$ и $g_2(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) = \frac{\partial G(a, \theta_2, \varphi_2; a, \theta_1, \varphi_1)}{\partial r_1}$ принимались равными среднему

$$g_j(\theta_2, \varphi_2; \theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g_j(\theta_1 + \varepsilon, \varphi_1 + \varepsilon; \theta_1, \varphi_1) + g_j(\theta_1 - \varepsilon, \varphi_1 - \varepsilon; \theta_1, \varphi_1) + g_j(\theta_1 + \varepsilon, \varphi_1 - \varepsilon; \theta_1, \varphi_1) + g_j(\theta_1 - \varepsilon, \varphi_1 + \varepsilon; \theta_1, \varphi_1)] \quad (j = 1, 2),$$

что, по существу, позволяет выделить главные значения интегралов, присутствующих в (6).

После нахождения из системы (11) величин p_{ql} ($q = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L$) для определения рассеянного акустического поля в произвольной точке пространства и в дальней зоне поля из формул (7) и (9) получаем

$$\Psi_s(r, \theta, \varphi) = \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \left[p_{ql} \frac{\partial G(r, \theta, \varphi; r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} + \frac{\partial \Psi_0(r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} G(r, \theta, \varphi; r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l) \right]_{r_1=a} S_{ql}, \quad (12)$$

$$F(\theta, \varphi) = \frac{2}{a} \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^L \left[ik p_{ql} + \frac{\partial \Psi_0(r_1, \bar{\theta}_q, \bar{\varphi}_l)}{\partial r_1} \right]_{r_1=a} S_{ql}. \quad (13)$$

6. Построение теоретико-числовой сетки

Практика показывает, что для обеспечения достаточной для практического применения точности вычисления интегралов, входящих в выражения (6), (7), (9), (10), методом ячеек требуется вычисления подынтегральных функций в десятках тысяч точек. Поэтому актуальной является задача выбора эффективного метода приближенного вычисления интегралов такого вида.

Для решения этой задачи перспективными представляются использование теоретико-числовых сеток, в частности в этой работе остановимся на двумерных сетках Смоляка, как наиболее простых для реализации. Квадратурная формула по этим сеткам для функций из класса $E_2^\alpha(C)$ на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \frac{1}{2^q} \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu}, \frac{k_2}{2^{q-\nu}}\right) - \\ &- \frac{1}{2^{q-1}} \sum_{\nu=1}^{q-2} \sum_{k_1=0}^{2^\nu-1} \sum_{k_2=0}^{2^{q-1-\nu}-1} f\left(\frac{k_1}{2^\nu}, \frac{k_2}{2^{q-1-\nu}}\right) - R_{N^{(1)}(q)}[f], \end{aligned} \quad (14)$$

где q – параметр сетки, натуральное число большее двух; $N^{(1)}(q)$ – количество точек сетки Смоляка с учетом их кратности.

При этом для остаточного члена в (14) справедлива оценка

$$\|R_{N^{(1)}(q)}[f]\|_{E_2^\alpha} \leq \frac{4\zeta(\alpha)2^{2\alpha}q}{2^{q\alpha}} = O\left(\frac{\ln^{\alpha+1} N^{(1)}(q)}{(N^{(1)}(q))^\alpha}\right).$$

В работе [17] показано, что просуммировав веса в (14) и используя каноническое представление двумерных сеток Смоляка без повторяющихся узлов, можно сократить количество узлов квадратурной формулы в 4 раза.

Интегралы из выражений (6), (7), (9), (10) вычисляются по поверхности сферы и имеют вид

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (15)$$

где функция $F(\theta, \varphi)$ периодическая по θ с периодом 2π , и не периодическая по φ .

Рассмотрим функцию

$$F_1(\theta, \varphi) = \begin{cases} F(\theta, \varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ F(\theta, 2\pi - \varphi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}, \quad F(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}(F_1(\theta, \varphi) + F_1(\theta, 2\pi - \varphi)). \quad (16)$$

Функция $F_1(\theta, \varphi)$ решает задачу простейшей периодизации. Вопросы периодизации функций подробно рассмотрены в монографии Н. М. Коробова [18]. В отличие от изложенных в монографии способов простейшей периодизации (16), позволяет решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода путем сведения к системе линейных уравнений без дополнительных конструкций.

Путем введения новых переменных

$$x_1 = \frac{\theta}{2\pi}, \quad x_2 = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (17)$$

интеграл типа (15) приводится к форме интеграла, стоящего в левой части (14). Действительно из (17) следует, что $d\theta = 2\pi dx_1$, $d\varphi = 2\pi dx_2$. Тогда интеграл (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \varphi) d\theta d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 F_1(2\pi x_1, 2\pi x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $f(x_1, x_2) = 2\pi^2 F_1(2\pi x_1, 2\pi x_2)$.

Заметим, что решение интегрального уравнения при фиксированном r дает нам приближенное значение функции $\Psi(r, \theta, \varphi)$ и ее производной по нормали к поверхности тела $\frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}$. При построение интерполяционного многочлена по тригонометрической системе базисных функций описанных в статье [17] получаем конечный ряд Фурье по сеткам Смоляка, который решает задачу аппроксимации функции $\Psi(r, \theta, \varphi)$ и ее производной по нормали $\frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}$.

Отметим также, что при решении задачи квадратурные формулы по сеткам Смоляка (14) можно заменить квадратурными формулами по параллелепипедальным сеткам (см. [18]):

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{ak}{N}\right\}\right) + R_N(f), \quad (19)$$

где a — оптимальный коэффициент, N — количество узлов параллелепипедальной сетки. Наиболее хорошие сетки получаются, если a равно $n-1$ числу Фибоначчи, а N равно n числу Фибоначчи. Использование базисных тригонометрических функций из работы [19] позволяет построить многочлен решающий задачу Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетке для исходной задачи.

7. Нахождение точного решения задачи

Для сравнения точности решений интегральных уравнений, полученных с помощью классических квадратурных формул и с использованием теоретико-числовых сеток воспользуемся строгим решением задачи.

Для получения точного аналитического решения осуществим разложение сферической волны по сферическим волновым функциям [7]

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= Aik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \\ &\quad \times \begin{cases} j_n(kr) h_n(kr_0), & \theta r_0 > r, \\ j_n(kr_0) h_n(kr), & \theta r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n ; $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода степени n порядка m ; δ_{0m} — символ Кронекера.

Учитывая условия излучения на бесконечности [5], функцию Ψ_s будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (21)$$

Подставляя разложения (20) и (21) в граничное условие (2), находим коэффициенты A_{nm}

$$A_{nm} = -ik(2 - \delta_{0m})(2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} h_n(kr_0) P_n^m(\cos \theta_0) \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)}. \quad (22)$$

Для нахождения функции Ψ_s на поверхности тела Γ следует в (20) положить $r = a$

Дальнее поле рассеяния определяется по формуле (8), в которой выражение для $F(\theta, \varphi)$ получим, воспользовавшись асимптотической формулой для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [7]

$$h_n(kr) \approx (-i)^{n+1} \frac{\exp(ikr)}{kr} \quad (kr \gg 1). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21), находим

$$F(\theta, \varphi) = \frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-i)^{n+1} A_n P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (24)$$

8. Численные исследования

Исследуем распределение потенциала рассеянной волны на поверхности тела и в дальней зоне поля, и проведем сравнительный анализ $\Psi_s(a, \theta, \varphi)$ и $|F(\theta, \varphi)|$, найденных на основе решения интегральных уравнений с использованием двух видов сеток и точного решения.

Были проведены расчеты диаграмм направленности рассеянного поля на поверхности тела и в дальней зоне при волновых размерах тела ka , равных 1, 3 и 5. Полагалось, что радиус сферы $a = 1$; расстояние от источника $r_0/a = 20$; $\theta_0 = \pi$, $\varphi_0 = 0$ – источник находится на отрицательной полуоси z .

На рис. 2-7 представлены результаты расчетов нормированного давления $p' = |p/(i\rho\omega\Psi_0(O))|$ на поверхности сферы и диаграмм рассеянного поля в дальней зоне $|F(\theta, \varphi)|$ в сечении $\varphi = 0, \pi$ для трех значений ka . Сплошной линией на графиках показаны зависимости для расстояния до источника $r_0/a = 20$. Штриховой линией для сравнения показаны зависимости для расстояния до источника $r_0/a = 100$, которые практически совпадают с решениями для случая плоской волны ($r_0 \rightarrow \infty$).

Значения, представленные на графиках, получены на основе решения интегральных уравнений с использованием двух видов сеток для случая, когда отличия p' и $|F(\theta)|$ от соответствующих значений в точном решении не превышают $\varepsilon_0 = 0.001$ по абсолютной величине.

На рис. 2 (как и на рис. 4, 6, также представляющих распределение p') пунктирной линией изображена окружность единичного радиуса, которая может трактоваться с одной стороны как сечение поверхности Γ , на которой рассчитывается p' , а с другой – как нормированное значение p_0 на этой поверхности, которое очень близко к единице.

Как видно, влияние сферичности фронта падающей волны (конечности расстояния до источника) в основном проявляется в диапазонах углов θ близких к 0 и π . Но если для распределения давления p' это влияние почти одинаково выражено в обоих этих диапазонах, то в диаграммах $|F(\theta)|$ влияние сферичности падающей волны наиболее выражено в теневой области (в окрестности $\theta = \pi$), а в диапазонах углов θ близких к 0 это влияние не превышает 1-2%.

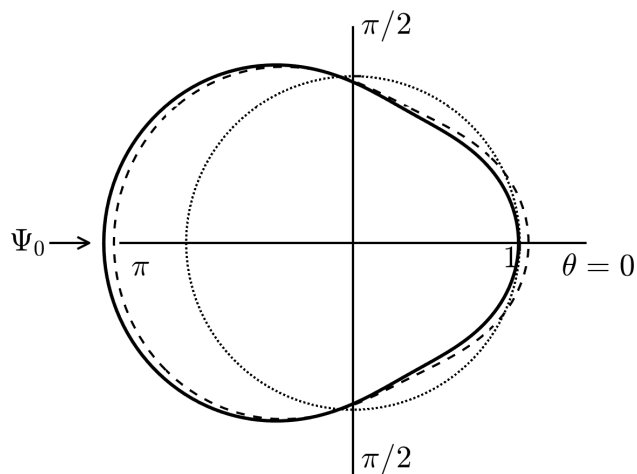


Рис. 2: Распределение давления p' на поверхности T при $ka = 1$

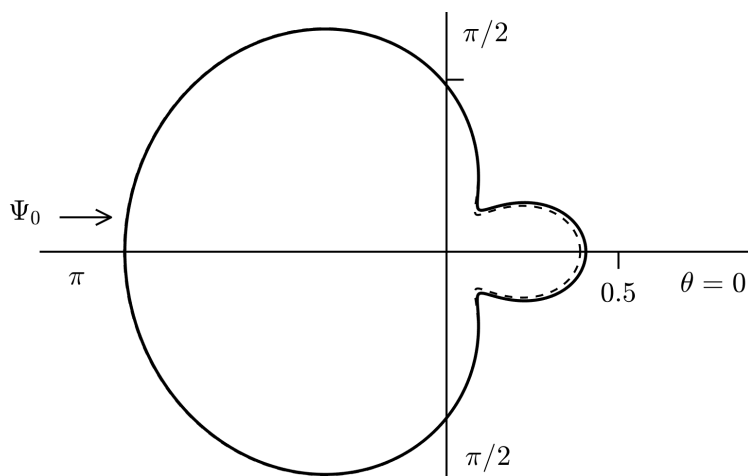


Рис. 3: Диаграмма $F(\theta)$ рассеянного поля в дальней зоне при $ka = 1$

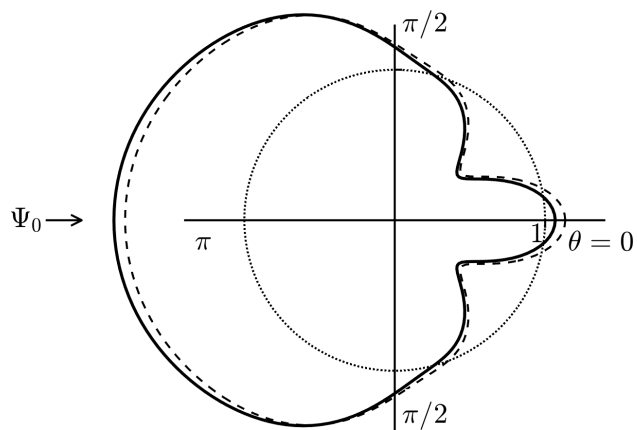
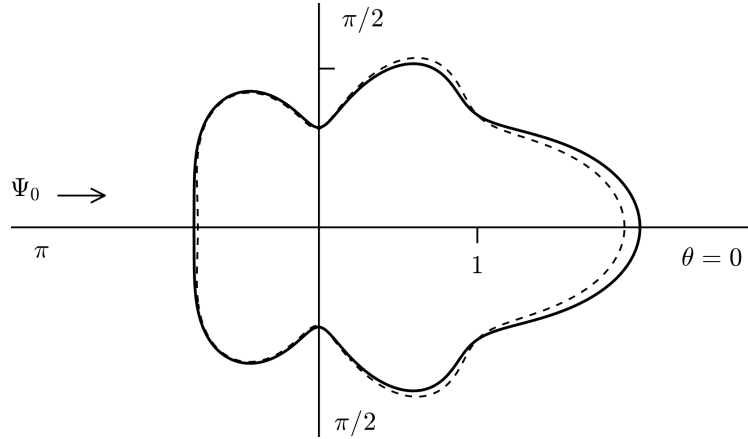
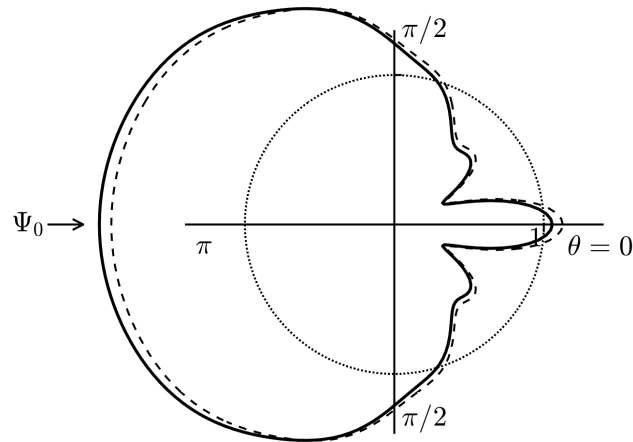
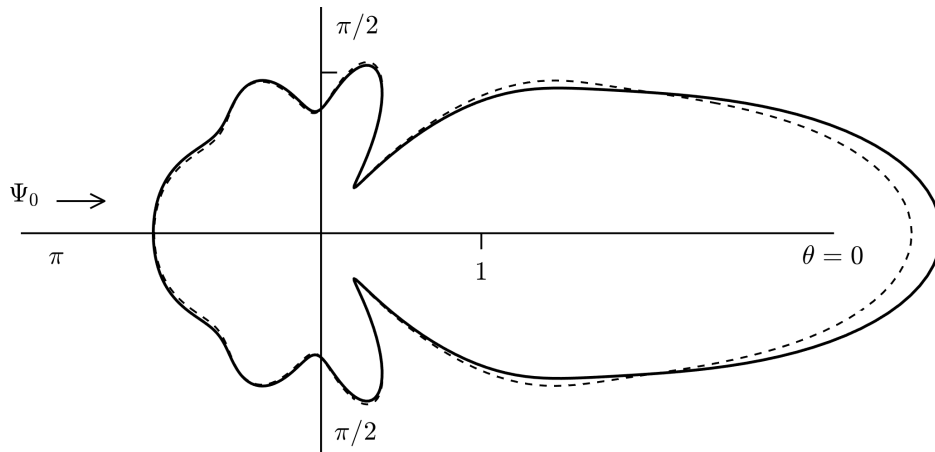


Рис. 4: Распределение давления p' на поверхности T при $ka = 3$

9. Заключение

Сравнение двух схем приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении не превышающей ε_0 по абсолютной величине при использовании

Рис. 5: Диаграмма $F(\theta)$ рассеянного поля в дальней зоне при $ka = 3$ Рис. 6: Распределение давления p' на поверхности T при $ka = 5$ Рис. 7: Диаграмма $F(\theta)$ рассеянного поля в дальней зоне при $ka = 5$

схемы вычисления интегралов на основе сеток Смоляка (по формулам (18), (14)) можно получить сокращение числа вычислений подинтегральной функции от 15% при $ka = 5$ до 20-25% при $ka = 1$.

В данной работе для двумерного случая приводится новый способ простейшей периодизации функций на квадрате, который легко переносится на s -мерный случай, в том числе и

для полностью непериодических функций. Дальнейшее развитие данного метода заключается в переносе на простейшие геометрические многомерные объекты, в том числе треугольники и тетраэдры, используемые в методе конечных элементов. Научный интерес вызывает получение точных оценок для проверки гипотезы о качестве нового типа параллелепипедальных сеток для непериодических функций на разных областях интегрирования.

В прикладном плане использование теоретико-числовых сеток может обеспечить повышение эффективности процедуры вычисления интегралов при решении задач дифракции (излучения) звуковых волн на основе представления акустического поля в форме Кирхгофа-Гельмгольца.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. M. Rao. An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
2. J. A. Fawcett. Scattering from a finite cylinder near an interface // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 136, issue 2, pp. 485–493.
3. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz, B. Shanker. Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
4. Е. Л. Шендеров. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
5. Е. Л. Шендеров. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
6. Н. Н. Калиткин. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
7. Е. А. Иванов. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. - Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
8. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176
9. Н. М. Коробов. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961, т. 60, с. 195–210.
10. Ю. Н. Шахов. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // Докл. АН СССР, 1961, т. 136, вып. 6, с. 1302–1305.
11. M. Z. Geçmen, E. Çelik. Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials. // Math Meth Appl Sci., 2021, т. 44, с. 11166–11173.
12. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al. Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces. // Adv Differ Equ, 2021, 358 (2021).
13. S. C. Buranay, M. A. Özarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // Mathematics, 2021, т. 9, 1193.
14. В. А. Быковский. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках. // Докл. АН СССР, 1988, 302:1, с. 11–13.

15. Y. Kolomoitsev, J. Prestin. Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators // *Journal of Approximation Theory*, 2021, т. 270, 105631.
16. S. C. Buranay, M. A. Özarslan, S. S. Falahhesar. Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators // *Mathematics*, 2021, т. 9, 1193.
17. Н. Н. Добровольский. Отклонение двумерных сеток Смоляка // *Чебышевский сборник*, 2007, т. 8, вып. 1, с. 110–152.
18. Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
19. Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, О. В. Андреева, Н. В. Зайцева. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // *Чебышевский сборник*, 2004, т. 5. Вып. 1. с. 122–143.

REFERENCES

1. S. M. Rao, 2011, “An iterative method to solve acoustic scattering problems using a boundary integral equation”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 130, issue 4, pp. 1792–1798.
2. J. A. Fawcett, 2014, “Scattering from a finite cylinder near an interface”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 136, issue 2, pp. 485–493.
3. A. M. A. Alsnayyan, J. Li, S. Hughey, A. Diaz and B. Shanker, 2020, “Efficient isogeometric boundary element method for analysis of acoustic scattering from rigid bodies”, *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 147, issue 5, pp. 3275–3284.
4. E. L. Shenderov, 1989, *Sound emission and scattering*, [Izluchenie i rasseianie zvuka], Leningrad, Shipbuilding.
5. E. L. Shenderov, 1972, *Wave problems of hydroacoustics*, [Volnovye zadachi gidroakustiki], Leningrad, Shipbuilding.
6. N. N. Kalitkin, 1978, *Numerical methods* [CHislennyye metody], Moscow, Nauka.
7. E. A. Ivanov, 1968, *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*, [Difrakciya elektromagnitnyh voln na dvuh telah], Minsk: Science and Technology.
8. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, “On classical number-theoretic nets”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.
9. N. M. Korobov, 1961, “Application of number-theoretical sieves to integral equations and interpolation formulas”, *Collection of articles. To the 60th anniversary of academician Mikhail Alekseevich Lavrent'ev*, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 60, pp. 195–210.
10. Yu. N. Shakhov, 1961, “The approximate solution of Volterra equations of the second kind by the method of iterations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 136, issue 6, pp. 1302–1305.
11. M. Z. Geçmen, E. Çelik, 2021, “Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations with Hosoya polynomials”, *Math Meth Appl Sci.*, vol. 44, pp. 11166–11173.
12. W. Shatanawi, N. Mlaiki, D. Rizk, et al., 2021, “Fredholm-type integral equation in controlled metric-like spaces”, *Adv Differ Equ*, 358 (2021).

13. S. C. Buranay, M. A. Özarslan, S. S. Falahhesar, 2021, “Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified Bernstein–Kantorovich Operators”, *Mathematics*, 9, 1193.
14. V. A. Bykovskii, 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integral lattices”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 302:1, pp. 11–13.
15. Yu. Kolomoitsev, J. Prestin, 2021, “Approximation properties of periodic multivariate quasi-interpolation operators”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 270, 105631.
16. P. Dencker, W. Erb, Yu. Kolomoitsev, T. Lomako, 2017, “Lebesgue constants for polyhedral sets and polynomial interpolation on Lissajous–Chebyshev nodes”, *Journal of Complexity*, vol. 43, pp. 1–27.
17. N. N. Dobrovol’skii, 2007, “Discrepancy of two-dimensional Smolyak grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol 8, no 1, pp. 110–152
18. N. M. Korobov, 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennoi analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]*, 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
19. N. M. Dobrovol’skii, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation” [Mnogomernaya teoretiko-chislovaya Fur’e interpoliatsiya], *Chebyshevskii sbornik*, vol 5, no 1, pp. 122–143

Получено 04.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.