

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 519.6, 539.30, 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-353-367

Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами¹

В. И. Горбачев

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vigorby@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается линейное однородное самосопряженное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными интегрируемыми коэффициентами, зависящими от числового параметра (исходное уравнение). Общее решение исходного уравнения находится с точностью до двух произвольных констант с помощью интегральной формулы, ранее предложенной автором статьи. На общее решение накладывается два однородных условия, из которых следует система из двух уравнений для произвольных констант. Требуя, чтобы существовало нетривиальное решение исходного уравнения, получаем сложное нелинейное уравнение относительно числового параметра (спектральное уравнение).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, уравнения с переменными коэффициентами, задача Штурма — Лиувилля, спектральные уравнения.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

В. И. Горбачев. Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 353–367.

¹Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-01-00016а и Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 519.6, 539.30, 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-353-367

**Problems on eigenvalues for ordinary differential equations
of the second order with variable coefficients**

V. I. Gorbachev

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Lomonosov Moscow State University (г. Москва).

e-mail: vigorby@mail.ru

Abstract

In paper the linear homogeneous self-interfaced ordinary differential is considered Second-kind equation with the variable integrable factors depending on the numerical Parametre (input equation). The input equation Common decision is about accuracy to two Arbitrary constants by means of the integral formula, before the paper offered by the author. On the general The solution is superimposed two homogeneous conditions from which the system from two equations follows for Arbitrary constants. Demanding, that there was a nontrivial solution of an input equation, We receive the complicated nonlinear equation for numerical parametre (the spectral equation).

Keywords: Differential equations of the second order, the equation with variable coefficients, a problem Sturm–Liuvill, the spectral equations.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

V. I. Gorbachev, 2021, “Problems on eigenvalues for ordinary differential equations of the second order with variable coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 353–367.

1. Введение

Многие процессы, происходящие в неоднородных телах, в частности в композитах, описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, зависящими от координат. Для выделения единственного решения таких уравнений ставятся граничные и начальные условия. Если уравнение однородно, а граничные и начальные условия также однородные, то такая задача имеет тривиальное, то есть нулевое решение. Однако возможна такая ситуация, когда наряду с тривиальным решением существует и решение отличное от нулевого. Обычно эта ситуация возникает в том случае, когда один, или несколько коэффициентов уравнения зависят от числового параметра λ . Этот же параметр λ может входить и в однородные граничные и начальные условия. В этих случаях могут существовать такие значения параметра λ , при которых задача имеет и ненулевое решение. Такие значения λ называются собственными значениями, а решения уравнения для каждого из собственных значений называются собственными функциями. Описанная общая ситуация называется задачей о собственных значениях [1], [2, стр. 24–32]. В математике такие задачи называются спектральными задачами. Спектральной теории операторов, в том числе дифференциальных операторов, посвящен большой раздел в математической энциклопедии [3, стр. 85–134]. Задачи на определение собственных значений возникают в механике, физике, квантовой механике, в

задачах устойчивости и в других самых разных случаях. Например при попытке найти решение параболических, или же гиперболических уравнений методом разделения переменных. При изучении движения элементарной частицы, находящейся в потенциальном поле. В данной работе мы будем рассматривать самосопряженную задачу о собственных значениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Часто эту задачу называют задачей Штурма-Лиувилля. Теория задачи Штурма-Лиувилля в доступной форме излагается в книгах [4, стр. 546], [5, стр. 568-609], [6, стр. 261]. Обратные задачи Штурма-Лиувилля рассматривались в работе [7].

2. Исходное и сопутствующее уравнения

2.1. Исходное уравнение. Собственные значения и собственные функции.

Рассматривается однородное самосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами — исходное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x, \lambda)u = 0, \quad q(x, \lambda) = h(x) + \lambda \varrho(x), \quad x \in (a, b) \quad (1)$$

Параметр λ — постоянное число. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) — ограниченные интегрируемые функции координаты x . Коэффициент $C(x)$ — положительная, интегрируемая на $[a, b]$ функция, которая также может зависеть от параметра λ . Для уравнения (1) рассматривается краевая задача с однородными условиями

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \quad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — заданные константы. В зависимости от выбора констант $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ из условий (2) получается первая, вторая и третья краевые задачи [4, стр. 546]. Можно также рассматривать задачу Коши, когда на одном краю задаются значение искомой функции $u(x)$ и её первой производной $u'(x)$ — начальные условия.

Еще более общими условиями являются, так называемые, нераспадающиеся граничные условия [7]. Самый общий вид, которых можно записать формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u(b) + \beta_{11}u'(a) + \beta_{12}u'(b) &= 0, \\ \alpha_{21}u(a) + \alpha_{22}u(b) + \beta_{21}u'(a) + \beta_{22}u'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

У однородного уравнения (1) с однородными условиями (2), либо (3) всегда существует нулевое решение. Однако могут найтись такие значения параметра λ , при которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее заданным однородным граничным условиям.

Если при заданных однородных условиях существует число λ , при котором решение исходного однородного уравнения (1) отлично от тождественного нуля, то такое λ называется собственным значением, а само решение $u(x, \lambda)$ называется собственной функцией. Задача отыскания собственных значений и собственных функций уравнения (1) с граничными условиями (2) называется задачей Штурма-Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций задачи (1), (2) приведены в [8, стр. 136-140].

2.2. Сопутствующее уравнение и его общее решение.

Рассмотрим функцию $v(x)$, определенную на том же интервале, и которая представляет собой решение однородного уравнения того же типа, что и исходное, но с постоянными коэффициентами $C_0 = \text{const.} > 0$ и $q_0 = \text{const.}$

$$C_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + q_0 v = 0, \quad x \in (a, b) \quad (4)$$

Такое уравнение будем называть сопутствующим уравнением. Общее решение сопутствующего уравнения (2) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\mu_o x} + K_2 e^{-i\mu_o x}, \quad \begin{cases} \mu_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, & q_o > 0, \\ \mu_o = i \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}}, & q_o < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Действительное решение сопутствующего уравнения (4) представляется разными формулами в зависимости от значения коэффициента q_o

$$v(x) = \begin{cases} K_1 \cos \mu_o x + K_2 \sin \mu_o x, & \mu_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}} \quad \text{if } q_o > 0, \\ K_1 x + K_2, & \mu_o = 0 \quad \text{if } q_o = 0, \\ K_1 e^{-\mu_o x} + K_2 e^{\mu_o x}, & \mu_o = \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}} \quad \text{if } q_o < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь K_1 и K_2 — произвольные действительные константы.

3. Интегральная формула.

В работах [9, 10] получена интегральная формула представления решения исходного уравнения (1) через решение сопутствующего уравнения с помощью фундаментальной функции $G(x, \xi)$ исходного уравнения

$$u(x) = v(x) + \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi, \lambda) v(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$, $\tilde{q}(\xi, \lambda) = q_o - q(\xi, \lambda)$. Под фундаментальной функцией исходного уравнения (1) понимается любая функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая следующему фундаментальному уравнению:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + q(x, \lambda) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad x, \xi \in (a, b), \quad (8)$$

где $\delta(x - \xi)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [15, 16].

4. Общее решение исходного уравнения.

Подставим общее решение (5) сопутствующего уравнения в интегральную формулу (7) и получим общее решение исходного однородного уравнения Штурма-Лиувилля (1)

$$u(x) = K_1 A(x, \lambda) + K_2 B(x, \lambda), \quad (9)$$

где K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Функции $A(x, \lambda)$ и $B(x, \lambda)$ также комплексные величины — два линейно независимых решения исходного уравнения

$$\begin{aligned} A(x, \lambda) &= e^{i\mu_o x} + i\mu_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{i\mu_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{i\mu_o \xi} d\xi, \\ B(x, \lambda) &= e^{-i\mu_o x} - i\mu_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-i\mu_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-i\mu_o \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Действительное решение имеет тот же самый вид (9), только K_1 и K_2 — действительные константы. Действительные функции $A(x, \lambda)$ и $B(x, \lambda)$ имеют различный вид в зависимости от знака коэффициента q_0

$$A(x, \lambda) = \begin{cases} \cos(\mu_0 x) - \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin(\mu_0 \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos(\mu_0 \xi) d\xi, & q_0 > 0, \\ x + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) d\xi + \int_a^b \xi G(x, \xi) q(\xi) d\xi, & q_0 = 0, \\ e^{-\mu_0 x} - \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-\mu_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-\mu_0 \xi} d\xi, & q_0 < 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$B(x, \lambda) = \begin{cases} \sin(\mu_0 x) + \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \cos(\mu_0 \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \sin(\mu_0 \xi) d\xi, & q_0 > 0, \\ 1 + \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi, & q_0 = 0, \\ e^{\mu_0 x} + \mu_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{\mu_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{\mu_0 \xi} d\xi, & q_0 < 0. \end{cases} \quad (12)$$

4.1. Замечание о коэффициентах сопутствующего уравнения.

Отметим, что в сопутствующем уравнении коэффициенты C_0 и q_0 в рамках указанных ограничений — совершенно произвольные константы.

1. В частности коэффициент q_0 можно принять равным нулю. В этом случае общее решение сопутствующего уравнения является линейной функцией координаты и имеет вид (6).
2. Можно считать, что q_0 есть ненулевая константа не зависящая от λ .
3. Можно предположить, что q_0 есть функция от λ .
4. В работах [9, 10] коэффициенты C_0 и q_0 полагались равными эффективным характеристикам [13, 14] так, что

$$C_0 = \frac{1}{\langle 1/C(x) \rangle}, \quad q_0(\lambda) = \langle q(x, \lambda) \rangle, \quad f_0 \equiv \langle f(x) \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (13)$$

5. Можно положить оба коэффициента C_0 и q_0 равными заданным функциям координаты и параметра λ . В последнем случае общее решение сопутствующего уравнения уже не представляется формулами (5), (6).

6. Формулы для общего решения исходного уравнения будут попроще, когда коэффициент q_0 принимается нулевым, а коэффициент C_0 совпадает с исходным коэффициентом, то есть $C_0 \equiv C(x)$. В этом случае сопутствующее уравнение вместо (2) принимает более простой вид:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dv}{dx} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = K_1 \int_a^x \frac{dy}{C(y)} + K_2$$

7. Однако, самые простые формулы для общего решения исходного уравнения будут в том случае, когда $C_0 = 1/\langle 1/C \rangle$, а $q_0 = 0$. Общее решение исходного уравнения будет, по прежнему определяться по формуле (9), а частные решения будут определяться по формулам (11) и (12) при $q_0 = 0$. Все эти случаи, при подстановке их в интегральную формулу (7), дают два линейно независимых решения, записанных в другой форме и удовлетворяющие исходному уравнению. Который из этих случаев лучше предстоит выяснить.

5. Метод возмущений для определения фундаментального решения исходного уравнения.

Общее решение исходного уравнения находится по формулам (9), если известно фундаментальное решение уравнения (8) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного аналитического решения фундаментального уравнения, в общем случае зависимости коэффициентов от координаты, вряд ли разрешима. Будем искать фундаментальную функцию методом возмущений [11, 12].

5.1. Схема метода возмущений.

В методе возмущений уравнение (8) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + \varkappa q(x, \lambda) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (14)$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным единице. Будем искать решение уравнения (14) в виде ряда по степеням параметра

$$G(x, \xi, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x, \xi) \quad (15)$$

Подставим ряд (15) в уравнение (14), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$[C(x)G'_0(x, \xi)]' + \delta(x - \xi) = 0, \quad [C(x)G'_n(x, \xi)]' + q(x)G_{n-1}(x, \xi) = 0, \quad n > 0 \quad (16)$$

Константы интегрирования уравнений (16) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$G_0(x, \xi) = - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz = - \begin{cases} 0, & x < \xi \\ \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, & x \geq \xi \end{cases} = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)},$$

Здесь $h(x - \xi)$ — единичная обобщенная функция Хевисайда [16]. Далее находим $G_n(x, \xi)$ при $n \geq 1$

$$G_n(x, \xi) = - \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2. \quad (17)$$

Формулу (17) можно записать в виде $n + 1$ кратного интеграла

$$G_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} h(x - \xi) \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)},$$

где

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy.$$

Ряд для фундаментальной функции примет вид (15), в котором $\varkappa = 1$

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, \xi) \quad (18)$$

Нам понадобятся производные по переменным x и ξ от $G_n(x, \xi)$. При $n = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = -\delta(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} - \frac{h(x - \xi)}{C(x)} = -\frac{h(x - \xi)}{C(x)}, \\ \frac{\partial G_0(x, \xi)}{\partial \xi} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = \delta(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} + \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)}\end{aligned}\quad (19)$$

Функция $G_0(x, \xi)$ и её производные входят под интегралы в формулах (7) и (10)–(12). Поэтому слагаемые с δ -функцией Дирака в формулах (19) исчезают из окончательных результатов. При $n > 0$ выражения для производных от $G_n(x, \xi)$ следуют из формулы (17)

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} = (-1)^{n+1} \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} = (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n. \quad (21)$$

5.2. Оценка сходимости фундаментального ряда в общем случае.

В общем случае, когда коэффициенты C и q ограниченные функции, можно получить оценку абсолютной величины n -го члена ряда (15). Для этого воспользуемся выражением (17), в соответствии с которым при $x \geq \xi$ получаем:

$$\frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\min}^n}{(2n + 1)! C_{\max}^{n+1}} \leq |G_n(x, \xi)| \leq \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}}$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \left(\frac{x - \xi}{s^*} \right)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sin \frac{x - \xi}{s^*}, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (18) сходится равномерно на всём промежутке $a \leq x \leq b$.

5.3. Особый частный случай.

Пусть $q(x) = \lambda \varrho(x)$, где $\varrho(x) > 0$. В этом случае ряд (18) для фундаментальной функции примет вид:

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_n(x, \xi),$$

где при $n > 0$

$$\begin{aligned}G_n(x, \xi) &= \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} \varrho(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2 = \\ &= (-1)^{n+1} h(x - \xi) \int_{\xi}^x \bar{\psi}(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \bar{\psi}(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)},\end{aligned}$$

$$\bar{\psi} \equiv \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x \varrho(y) dy,$$

а вместо формул (20), (21) получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} &= -(-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x \varrho(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \bar{\psi}(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \bar{\psi}(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \\ \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} &= (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \bar{\psi}(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \bar{\psi}(x_n, \xi) dx_n. \end{aligned}$$

Коэффициент q_o сопутствующего уравнения принимает вид:

$$q_o(\lambda) = \lambda \varrho_o, \quad \varrho_o = \langle \varrho(x) \rangle$$

6. Спектральные уравнения для собственных значений.

Для того, чтобы вывести уравнение для собственного числа λ нужны однородные граничные условия. Общий и самый общий вид этих условий дается формулами (2) и (3). Рассмотрим вначале наиболее простые случаи

6.1. Спектральное уравнение первой краевой задачи.

В случае первой краевой задачи нужно в условиях (2) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда на концах отрезка $[a, b]$ решение исходного уравнения (2) должно быть нулевым, то есть

$$u(a) = u(b) = 0$$

Отсюда и из общего решения исходного уравнения (9) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} K_1 A(a, \lambda) + K_2 B(a, \lambda) = 0 \\ K_1 A(b, \lambda) + K_2 B(b, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Константы K_1 и K_2 будут отличны от нуля, если определитель системы (22) равен нулю. Отсюда получаем спектральное уравнение первой краевой задачи

$$A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(b, \lambda)B(a, \lambda) = 0 \quad (23)$$

6.2. Спектральное уравнение второй краевой задачи.

$$C(x)u'(x) = K_1 C(x)A'(x) + K_2 C(x)B'(x)$$

Однородные граничные условия второй краевой задачи имеют вид:

$$C(a)u'(a) = C(b)u'(b) = 0$$

Из этих условий вытекает система уравнений для констант K_1 и K_2

$$\begin{cases} K_1 C(a)A'(a, \lambda) + K_2 C(a)B'(a, \lambda) = 0 \\ K_1 C(b)A'(b, \lambda) + K_2 C(b)B'(b, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует спектральное уравнение второй краевой задачи

$$[C(x)A'(x, \lambda)]_{x=a} \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=b} - [C(x)A'(x, \lambda)]_{x=b} \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=a} = 0 \quad (24)$$

6.3. Спектральное уравнение смешанной краевой задачи.

В смешанной краевой задаче на конце $x = a$ задаётся нулевое значение функции $u(x)$, а на другом конце — нулевое значение произведения $C(x)u'(x)$

$$u(a) = 0, \quad C(b)u'(b) = 0$$

В результате спектральное уравнение третьей краевой задачи имеет вид:

$$A(a, \lambda) \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=b} - [C(x)A'(x, \lambda)]_{x=b} \cdot B(a, \lambda) = 0$$

6.4. Общее спектральное уравнение в краевой задаче.

Однородные граничные условия общего вида (2) записываются следующими формулами:

$$\begin{cases} K_1 [\alpha_1 A(a, \lambda) + \beta_1 A'(a, \lambda)] + K_2 [\alpha_1 B(a, \lambda) + \beta_1 B'(a, \lambda)] = 0 \\ K_1 [\alpha_2 A(b, \lambda) + \beta_2 A'(b, \lambda)] + K_2 [\alpha_2 B(b, \lambda) + \beta_2 B'(b, \lambda)] = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует спектральное уравнение общего вида

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 A(a, \lambda) + \beta_1 A'(a, \lambda)] [\alpha_2 B(b, \lambda) + \beta_2 B'(b, \lambda)] - \\ & - [\alpha_2 A(b, \lambda) + \beta_2 A'(b, \lambda)] [\alpha_1 B(a, \lambda) + \beta_1 B'(a, \lambda)] = 0 \end{aligned}$$

6.5. Спектральное уравнение в задаче Коши.

В этом случае на левом конце $x = a$ задаются нулевые значения решения исходного уравнения и его производной по координате. В результате чего спектральное уравнение в задаче Коши будет следующим:

$$A(a, \lambda) \cdot [C(x)B'(x, \lambda)]_{x=a} - [C(x)A'(x, \lambda)]_{x=a} \cdot B(a, \lambda) = 0 \quad (25)$$

7. Пример. Уравнение Чебышева.

Рассмотрим уравнение

$$[\sqrt{1-x^2} u']' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} u = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (26)$$

В этом уравнении $C(x) = \sqrt{1-x^2} > 0$, $q(x) = \lambda \varrho(x)$, где $\varrho(x) = 1/\sqrt{1-x^2} > 0$. Общее решение уравнения (26) имеет вид:

$$u(x) = K_1 A(x, \lambda) + K_2 B(x, \lambda) = K_1 e^{i\sqrt{\lambda} \arcsin x} + K_2 e^{-i\sqrt{\lambda} \arcsin x}, \quad \lambda \neq 0, \quad (27)$$

где K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Действительное решение зависит от константы λ

$$u(x) = \begin{cases} K_1 \cos(\sqrt{\lambda} \arcsin x) + K_2 \sin(\sqrt{\lambda} \arcsin x), & \lambda > 0, \\ K_1 \arcsin x + K_2, & \lambda = 0, \\ K_1 e^{-\sqrt{-\lambda} \arcsin x} + K_2 e^{\sqrt{-\lambda} \arcsin x}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь K_1 и K_2 — действительные константы. При нулевых граничных условиях не тривиальное решение уравнения (26) возможно только, если $\lambda > 0$. Положив $\lambda = m^2$, получаем уравнение Чебышева [17, стр.254 № 1140]

$$[\sqrt{1-x^2} u']' + \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}} u = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (29)$$

Частные линейно независимые решения уравнения Чебышева обозначим через

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \cos(m \arcsin x), & B_m(x) &= \sin(m \arcsin x), \\ A'_m(x) &= -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x), & B'_m(x) &= \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(m \arcsin x). \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что в большинстве работ общее решение уравнения Чебышева представляется в другой форме $u(x) = K_1 T_m(x) + K_2 U_m(x)$. Здесь функции $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, $U_m(x) = \sin(m \arccos x)$ при действительных m представляют собой полиномы Чебышева первого и второго рода. Как показано в работе [18, стр. 59], функции $A_m(x)$ и $B_m(x)$ выражаются через полиномы Чебышева $T_m(x)$ и $U_m(x)$

$$A_{2m} = (-1)^m T_{2m}, \quad A_{2m+1} = (-1)^m U_{2m+1}; \quad B_{2m} = (-1)^{m+1} U_{2m}, \quad B_{2m+1} = (-1)^m T_{2m+1}.$$

Для доказательства этих формул нужно всего лишь воспользоваться тождеством $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Детальное исследование уравнения Чебышева дано в книгах [19, 20] и в ряде других книг. Фундаментальное решение уравнения Чебышева было получено в работе [10]

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n+1} = \\ &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sin[m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)]. \end{aligned} \quad (31)$$

7.1. Первая краевая задача.

Спектральное уравнение (23) в первой краевой задаче имеет вид:

$$\begin{aligned} &A_m(-1) \cdot B_m(1) - A_m(1) \cdot B_m(-1) = \\ &= \cos(m \arcsin(-1)) \sin(m \arcsin(1)) - \cos(m \arcsin(1)) \sin(m \arcsin(-1)) = \\ &= \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} + \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = 2 \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = \sin(m\pi) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Итак, любое целое число m является собственным числом первой краевой задачи для уравнения Чебышева.

7.2. Вторая краевая задача.

Во второй краевой задаче спектр будет таким же как и в первой краевой задаче. В самом деле, из (24) и (30) получаем:

$$\begin{aligned} &(CA'_m)_{x=-1} \cdot (CB'_m)_{x=1} - (CA'_m)_{x=1} \cdot (CB'_m)_{x=-1} = \\ &= 2m^2 \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = m^2 \sin(m\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (33)$$

то есть, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7.3. Смешанная краевая задача.

В случае смешанной краевой задачи для уравнения Чебышева спектральное уравнение будет следующим:

$$\begin{aligned} & A_m(-1) \cdot (CB'_m)_{x=1} - (CA'_m)_{x=1} \cdot B_m(-1) = \\ & = m \left[\cos(m \arcsin(-1)) \cos(m \arcsin(1)) - [-\sin(m \arcsin(1))] \sin(m \arcsin(-1)) \right] = \\ & = m \left[\cos^2 \frac{m\pi}{2} - \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] = m \cos(m\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (34)$$

7.4. Задача Коши.

Аналогичный спектр будет и в задаче Коши. Спектральное уравнение (25) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & A_m(-1) \cdot (CB'_m)_{x=-1} - (CA'_m)_{x=-1} \cdot B_m(-1) = \\ & = \cos \frac{m\pi}{2} \cdot m \cos \frac{m\pi}{2} - m \left(-\sin \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \left(-\sin \frac{m\pi}{2} \right) \\ & = m \left[\cos^2 \frac{m\pi}{2} - \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] = m \cos(m\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2k+1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (35)$$

8. Приближенные спектральные уравнения для уравнения Чебышева.

Для нахождения приближенного общего аналитического решения уравнения Чебышева воспользуемся формулой (31). Вместо полного ряда для фундаментального решения исходного используем частичную сумму

$$\begin{aligned} G^{(I)}(x, \xi) &= \sum_{n=0}^I G_n(x, \xi) = -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\arcsin x - \arcsin \xi \right)^{2n+1}, \\ \frac{\partial G^{(I)}(x, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \left(\arcsin x - \arcsin \xi \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулы (11) и (12) при $q_0 > 0$, получим (подробности в работе [10]):

$$A_{m(I)}(x) = \underbrace{\cos \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n}}_{\rightarrow 0 \text{ if } I \rightarrow \infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n}}{(2n)!}}_{\rightarrow \cos(m \arcsin x) \text{ if } I \rightarrow \infty}, \quad (36)$$

$$B_{m(I)}(x) = \underbrace{\sin \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1}}_{\rightarrow 0 \text{ if } I \rightarrow \infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\rightarrow \sin(m \arcsin x) \text{ if } I \rightarrow \infty}. \quad (37)$$

Отметим, что $A_{m(I)}(x)$ — четные функции, а $B_{m(I)}(x)$ — нечетные, то есть

$$A_{m(I)}(-x) = A_{m(I)}(x), \quad B_{m(I)}(-x) = -B_{m(I)}(x).$$

Кроме этого, из формул (36) и (37) видно, что при любом $0 \leq I \leq \infty$ на концах интервала $(-1, 1)$ выполняются равенства

$$A_{m(I)}(-1) = A_{m(I)}(1) = \cos \frac{m\pi}{2}, \quad B_{m(I)}(-x) = -B_{m(I)}(x) = -\sin \frac{m\pi}{2}.$$

Это означает, что для уравнения Чебышева спектральные уравнения в случае приближенных решений (36) и (37) совпадают с соответствующими спектральными уравнениями для точных решений. Видимо это особенность уравнения Чебышева.

Отбросим в формулах (36) и (37) первую часть быстро стремящуюся к нулю в любой точке области определения и примем за приближенное решение остаток, который стремится к точному решению уравнения Чебышева, то есть

$$A_{m(I)}(x) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} (m \arcsin x)^{2n}, \quad B_{m(I)}(x) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (m \arcsin x)^{2n+1}.$$

8.0.1. Первая краевая задача. Приближенное решение.

Приближенное спектральное уравнение первой краевой задачи для дифференциального уравнения Чебышева получается из точного спектрального уравнения (23) при замене в нём $A(x, \lambda) \rightarrow A_{m(I)}(x)$, $B(x, \lambda) \rightarrow B_{m(I)}(x)$

$$A_{m(I)}(-1)B_{m(I)}(1) - A_{m(I)}(1)B_{m(I)}(-1) = 0 \quad (38)$$

Отсюда и из условий симметрии находим:

$$A_{m(I)}(1) \equiv A_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n}, \quad B_{m(I)}(1) \equiv A_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (38) приводит к уравнению $2A_{m(I)}(1)B_{m(I)}(1) = 0$, из которого получаем два уравнения для приближенных собственных значений

$$A_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n} = 0, \quad B_{(I)}(m) = \sum_{n=0}^I \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{m\pi}{2}\right)^{2n+1} = 0. \quad (39)$$

Решение уравнений (39) будем искать графически, построив графики зависимости от m .

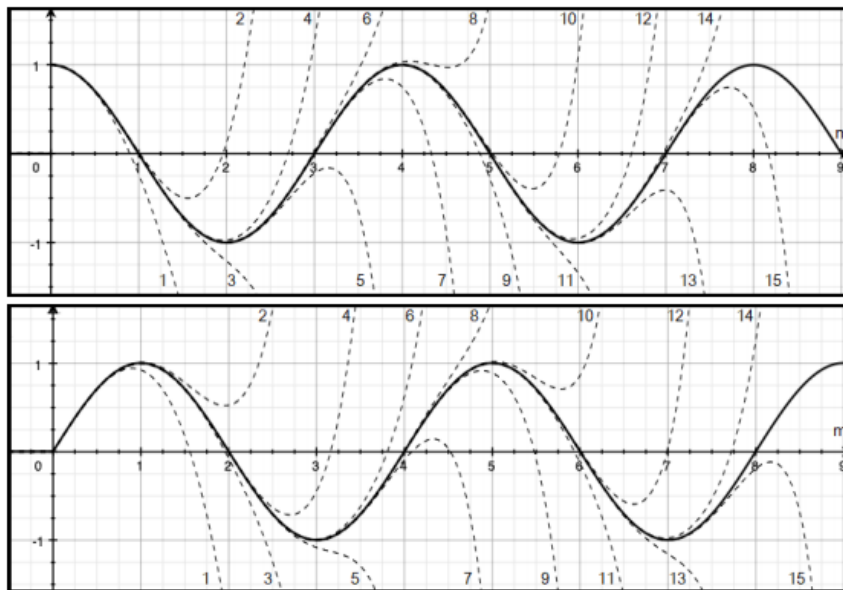


Рис. 1: Графики точных и приближенных решений спектральных уравнений для уравнения Чебышева при различных значениях параметра I — числа слагаемых в суммах (39).

Точные спектральные кривые $A(m) = \cos \frac{m\pi}{2}$ и $B(m) = \sin \frac{m\pi}{2}$ представлены на графиках сплошной линией, а графики $A_{(I)}(m)$ и $B_{(I)}(m)$ приближенных спектральных кривых изображены штрихами и помечены числами от 1 до 15. Они соответствуют числу I удержанных членов сумм (39). Точки пересечения кривых с осью абсцисс являются собственными числами: точными или же приближенными, соответственно. Из первого уравнения (39) находятся нечетные собственные положительные числа $m = 1, 3, \dots$, а из второго — четные положительные числа $m = 0, 2, 4, \dots$. К каждому из этих положительных собственных чисел, согласно условиям симметрии, нужно добавить отрицательные собственные значения.

Такая простая картина спектральных кривых получается именно для уравнения Чебышева. Если бы мы оставили в формулах (36) и (37) члены стремящиеся к нулю, то приближенные спектральные уравнения полностью совпали бы с точными спектральными уравнениями (29) первой краевой задачи. В других случаях такое совпадение вряд ли возможно.

9. Заключение.

Рассмотрена классическая задача Штурма-Лиувилля для однородного самосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от постоянного параметра. Показано, что с помощью интегральной формулы, полученной ранее автором, можно выписать общее решение уравнения, содержащее две произвольные константы. Выписаны различные возможные однородные краевые и начальные условия, из которых, в принципе, должны определяться ненулевые значения этих констант. Для различных однородных условий получен общий вид спектральных уравнений для собственных значений параметра, входящего в коэффициенты исходного уравнения. Основная трудность при применении интегральной формулы заключается в поиске фундаментального решения исходного уравнения. Точное аналитическое решение фундаментального уравнения возможно лишь в редких случаях. Поэтому необходимо в дальнейшем разработать процедуру численного решения фундаментального уравнения.

Автор благодарен доценту кафедры механики композитов, кандидату физико-математических наук Бедновой Веронике Борисовне за помощь при оформлении графического материала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука: 1968. 503 с.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука: 1969. 526 с.
3. Математическая энциклопедия. Т.3 Коо-Од. Гл.ред. Виноградов И. М. М.: Советская энциклопедия: 1982. 1183 с.
4. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова Думка: 1974. 744 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
6. Камке Н. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука: 1971. 576 с.
7. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М.: Изд-во МГУ, 1984. 182 с.
8. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Серия — Курс высшей математики и математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 254 с.

9. Gorbachev V.I. About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, №7. P. 969-980.
10. Горбачев В. И. Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник. Vol. 20, №4. P. 108-123.
11. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
12. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
13. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненные процессы в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука: 1972. 496 с.
16. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир: 1978. 518 с.
17. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Росвузиздат, 1962. 292 с.
18. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. Перевод с французского Н.Я. Виленкина. М.: Наука 1963. 103 с.
19. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука: главная редакция физико-математической литературы, 1979. 416 с.
20. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука 1964. 344 с.

REFERENCES

1. Kollats L. Zadachi na sobstvennye znacheniya. M.: Nauka, 1968. 503 s.
2. Najmark M. A. Linejnye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 526 s.
3. Matematicheskaja ensiklopedia. V.3 Koo-Od. Gl. red. Vinogradov I.M. M.: Sovetskaja ensiklopedia: 1982. 1183 s.
4. Fil'chakov P. F. Spravochnik po vysshej matematike. Naukova Dumka, Kiev, 1974. 744 s.
5. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. Uravneniya v chastnyh proizvodnyh matematicheskoy fiziki. Vysshaya shkola, Moskva, 1970. 710 s.
6. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nyim uravneniyam. M.: Nauka, 1971. 576 s.
7. Sadovnichij V. A., Sultanaev YA. T., Ahtyamov A. M. Obratnye zadachi SHturma-Liuvillya s neraspadayushchimisya kraevymi usloviyami. M.: Izd. MGU, 2009. 182 s.
8. Tikhonov A. N., Vasiljeda A. B., Sveshnikov A. G. Differencial'nii uravneniya. Seriya — Kurs visshey matematiki i matematicheskoy fiziki. M.: FIZMATLIT. 2005. 254 c.

9. Gorbachev V.I. About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, №7. P. 969-980.
10. Gorbachev V. I. Primenenie integral'nyh formul dlya resheniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka s peremennymi koefficientami, Chebishevskiy sbornik **20** (4), 2019. P 108–123.
11. Lomakin V.A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU, 1976. 367 s.
12. Najfe A. H. Metody vozmushchenij. M.: Mir, 1976. 456 s.
13. Bahvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednennye processov v periodicheskikh sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s.
14. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd-vo MGU, 1984. 336 s.
15. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1972. 496 s.
16. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike. M: Mir, 1978. 518 s.
17. Matveev N. M. Sbornik zadach i uprazhnenij po obyknovennym differencial'nyh uravneniyam. M.: Rosvuzizdat, 1962. 292 s.
18. Kampe de Fer'e ZH., Kempbell R., Pet'o G., Fogel' T. Funkcii matematicheskoy fiziki. Spravochnoe rukovodstvo. (Perevod s francuzskogo N.YA. Vilenkina). M.: Nauka 1963. 103 s.
19. Suetin P.K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. M.: Nauka: glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979. 416 s.
20. Yanke E., Emde F., Lyosh F. Special'nye funkcii. M.: Nauka 1964. 344 s.

Получено 29.04.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.