ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.1;539.4:624.07 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-345-352

Интегральная формула в задачах устойчивости неоднородных стержней[1]

В. И. Горбачёв, А. А. Рубан

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vigorby@mail.ru
Рубан Алексей Анатольевич — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: alexeyruban2009@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается неоднородный по длине стержень с переменным поперечным сечением. Стержень сжимается распределенной вдоль оси переменной продольной нагрузкой. В работе рассматривается случай потери устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня, при котором наряду с прямолинейной возможна искривленная форма. Критическое сочетание жесткости и продольной силы устанавливается с помощью интегральной формулы представления решения исходного уравнения устойчивости с переменными коэффициентами через решение такого же уравнения с постоянными коэффициентами. В интегральное представление входит фундаментальное решение исходного уравнения, которое в общем случае находится методом возмущений. Приведен пример составления уравнения для критической нагрузки.

Ключевые слова: упругость, устойчивость, неоднородный стержень, метод осреднения, интегральная формула.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
В. И. Горбачёв, А. А. Рубан. Интегральная формула в задачах устойчивости неоднородных стержней // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 345–352.

[1]Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-01-00016а и Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 539.3:534.1;539.4:624.07 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-345-352

The integral formula in problems of the stability of inhomogeneous rods

V. I. Gorbachev, A. A. Ruban

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vigorby@mail.ru
Ruban Alexey Anatol'evich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: alexeyruban2009@yandex.ru

Abstract

A heterogeneous in length bar with a variable cross-section is considered. The bar is compressed by a variable longitudinal force which is distributed along its axis. The article describes the case of stability loss of the straight form of equilibrium of a bar, when both, linear and curved forms are possible. The critical combination of rigidity and longitudinal force is the result of an integral representation for the solution of the given stability equation with variable coefficients by the aid of the solution of similar equation but with constant coefficients. The integral representation includes the Green function of the given equation which can be obtained by the method of perturbations. The example of compiling of the equation for critical loading is reduced.

Keywords: Elasticity, stability, inhomogeneous rod, average method, the integral formula.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
V. I. Gorbachev, A. A. Ruban, 2021, "The integral formula in problems of the stability of inhomogeneous rods" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 345–352.

1. Введение

В декартовых координатах, выбранных так, как показано на рисунках 1a), 1b), изгиб стержня силой, приложенной на одном конце описывается одним и тем же уравнением второго порядка [1]

$$EJ\frac{d^2u}{dx^2} = -Pu \tag{1}$$

В случае постоянного поперечного сечения уравнение (1) даёт нам известные формулы Эйлера для вычисления критических сил

$$P_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \text{ – случай a)}; \quad P_{\text{кр.}} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2} \text{ – случай b)} \tag{2}$$

Если стержень неоднородный по длине и поперечное сечение переменное, т.е. величины модуля Юнга E и момента инерции J является функцией от координаты $0 \leqslant x \leqslant L$, тогда

задача определения критического значения P становится много сложнее. Ряд частных случаев были рассмотрены ещё в позапрошлом веке Эйлером, Лагранжем, Франком [2, с. 166]. Некоторые задачи были рассмотрены в монографиях Динника [3], Микеладзе [4], Колатца [5]. В том случае, когда момент инерции изменяется скачком задача изучалась Тимошенко [2, 6], Динником, Микеладзе и рядом других авторов. Однако вопрос о влиянии формы поперечного сечения и неоднородности механических свойств на величину критической силы в полной мере ещё не исследован. Предположение о периодичности изгибной жесткости стержня $W(x) \equiv E(x)J(x)$ позволило использовать для решения уравнения устойчивости асимптотический метод Бахвалова-Победри (МБП) [7, 8]. В работах [9, 10], с помощью МБП, получены приближенные аналитические выражения для критической силы при продольном сжатии шарнирно опёртого стержня и стержня, защемлённого на одном конце.

2. Постановка задачи.

Рассматривается неоднородный по длине стержень с переменным поперечным сечением. Центры тяжести каждого поперечного сечения расположены на прямой линии. Стержень нагружен переменной по длине продольной нагрузкой, в результате действия которой стержень может перейти из прямолинейного в искривленное состояние. Такая ситуация называется потерей устойчивости.

В декартовых координатах, выбранных так, как показано на рис. 1, изгиб стержня распределенной продольной силой описывается уравнением четвертого порядка [1, стр. 80]:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left[W(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] - T(x)\frac{du}{dx}\right\} = 0\,, \qquad x \in (0, L) \tag{3}$$

Здесь $u(x)$ — прогиб оси стержня в точке с координатой x; $W(x) = E(x)J(x)$ — жёсткость стержня при изгибе; $T(x)$ — осевое усилие в сечении с координатой x в прямолинейном стержне в момент потери устойчивости, вычисляемое по заданной распределенной нагрузке $t(x)$; L — длина стержня; $E(x)$ — модуль Юнга; $J(x)$ — момент инерции сечения.

К уравнению (3) необходимо добавить четыре однородных граничных условия (по два на каждом конце стержня).

Для решения дифференциального уравнения (3) четвертого порядка с переменными коэффициентами используем интегральную формулу представления решения исходного уравнения через решение такого же уравнения, только с постоянными коэффициентами. Впервые такая формула была опубликована в 1991 году в работе [11] применительно к задачам линейной упругости неоднородных тел. В задачах устойчивости неоднородных стержней интегральная формула была использована в работе В.И. Горбачёва и О.Б. Москаленко [12]. В настоящей работе интегральная формула применяется к задачам устойчивости по другому, в отличие от указанной работы.

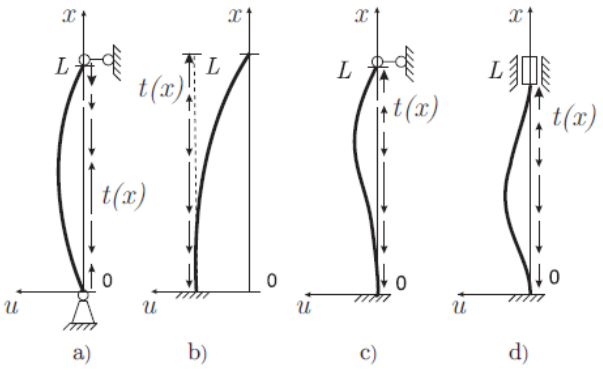

Рис. 1: Устойчивость стержней под действием внешней распределенной нагрузки

2. Интегральная формула. Пусть $G(x, \xi)$ — фундаментальное решение исходного уравнения (3), т.е. любая функция, которая удовлетворяет уравнению вида:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left[W(x)\frac{d^2G}{dx^2}\right] - T(x)\frac{dG}{dx}\right\} = \delta(x-\xi)\,, \tag{4}$$

где $x \in (0, L)$, а $\delta(x-\xi)$ — дельта функция Дирака [13]. Наряду с исходным уравнением с переменными коэффициентами в той же области будем рассматривать дифференциальное уравнения того же типа, что и уравнение (3), но с постоянными коэффициентами:

$$W_{\text{o}} \frac{d^4 v}{dx^4} - T_{\text{o}} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0\,, \qquad x \in (0, L). \tag{5}$$

Такое уравнение будем называть сопутствующим уравнением.

Решение исходного уравнения $u(x)$ и решение сопутствующего уравнения $v(x)$ связаны между собой интегральной формулой, в которую входит также и фундаментальная функция $G(x, \xi)$

$$u(x) = v(x) + \int\limits_0^L \left[W_{\text{o}} - W(\xi)\right] \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial \xi^2} v''(\xi) d\xi + \int\limits_0^L \left[T_{\text{o}} - T(\xi)\right] \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} v'(\xi) d\xi \tag{6}$$

Пусть $L(u)$ и $L_{\text{o}}(v)$ — дифференциальные операторы исходного и сопутствующего уравнений

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left[W(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\right] - T(x)\frac{du}{dx}\right\}, \qquad L_{\text{o}}(v) \equiv W_{\text{o}}\frac{d^4 v}{dx^4} - T_{\text{o}}\frac{d^2 v}{dx^2}$$

Покажем, что выражение (6) удовлетворяет исходному уравнению

$$\begin{aligned}
L(u) &= L(v) + \int\limits_0^L \left[W_{\text{o}} - W(\xi)\right] \frac{\partial^2 L(G(x,\xi))}{\partial \xi^2} v''(\xi) d\xi + \int\limits_0^L \left[T_{\text{o}} - T(\xi)\right] \frac{\partial L(G(x,\xi))}{\partial \xi} v'(\xi) d\xi = \\
&= L(v) + \int\limits_0^L \left[W_{\text{o}} - W(\xi)\right] \frac{\partial^2 \delta(x-\xi)}{\partial \xi^2} v''(\xi) d\xi + \int\limits_0^L \left[T_{\text{o}} - T(\xi)\right] \frac{\partial \delta(x-\xi)}{\partial \xi} v'(\xi) d\xi = \\
&= L(v) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^L \left[W_{\text{o}} - W(\xi)\right] \delta(x-\xi) v''(\xi) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^L \left[T_{\text{o}} - T(\xi)\right] \delta(x-\xi) v'(\xi) d\xi = \\
&= L(v) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big\{\left[W_{\text{o}} - W(x)\right] v''(x)\Big\} - \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\left[T_{\text{o}} - T(\xi)\right] v'(x)\Big\} = \\
&= L(v) + W_{\text{o}}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - T_{\text{o}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\left[W(x)v''(x)\right] - T(x)v'(x)\Big\} = \\
&= L(v) + L_{\text{o}}(v) - L(v) = L_{\text{o}}(v) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

3. Общее решение исходного уравнения устойчивости. Для получения общего решения исходного уравнения нужно сначала найти общее решение сопутствующего уравнения (5), которое при $T_{\text{o}} < 0$ имеет вид:

$$v(x) = K_1 \sin \lambda x + K_2 \cos \lambda x + K_3 x + K_4\,, \qquad \lambda \equiv \sqrt{-T_{\text{o}}/W_{\text{o}}} \tag{8}$$

Если это решение подставить в интегральную формулу (6), то получим общее решение исходного уравнения устойчивости (3), определенное с точностью до четырех констант

K_1, K_2, K_3, K_4

$$u(x) = K_1\left[\sin\lambda x - \lambda^2\int\limits_0^L \widetilde{W}(\xi)G''_{\xi\xi}(x,\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi + \lambda\int\limits_0^L \widetilde{T}(\xi)G'_{\xi}(x,\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\right]+$$
$$+K_2\left[\cos\lambda x - \lambda^2\int\limits_0^L \widetilde{W}(\xi)G''_{\xi\xi}(x,\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi - \lambda\int\limits_0^L \widetilde{T}(\xi)G'_{\xi}(x,\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right]+ \qquad (9)$$
$$+K_3\left[x + \int\limits_0^L \widetilde{T}(\xi)G'_{\xi}(x,\xi)\,d\xi\right] + K_4$$

Здесь $\widetilde{W}(\xi) \equiv W_{\text{o}} - W(\xi)$, $\widetilde{T}(\xi) \equiv T_{\text{o}} - T(\xi)$. Кроме этого $G'_{\xi}(x,\xi)$ обозначает первую производную по переменной ξ, а $G''_{\xi\xi}(x,\xi)$ — соответственно вторую производную по ξ.

4. О фундаментальном решении и о коэффициентах сопутствующей задачи. В формулу (9) входит фундаментальное решение исходного уравнения, которое определяется из обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (4) как любое частное решение удовлетворяющее фундаментальному уравнению (4).

Постоянные коэффициенты W_{o} и T_{o} сопутствующего уравнения, как следует из приведенного доказательства (7), могут быть произвольны. Единственное условие, которое следует из физического смысла рассматриваемой проблемы, это $W_{\text{o}} > 0$ и $T_{\text{o}} < 0$. Последнее условие можно трактовать как сжимающие силы в каждом сечении стержня, при которых возможна потеря устойчивости стержня.

Материал стержня может быть периодически неоднородным. Периодическими могут быть поперечное сечение, а также продольные нагрузки в стержне. В этом случае, как следует из метода Бахвалова-Победри

$$T_{\text{o}} = \big\langle T\big\rangle\,, \qquad W_{\text{o}} = \frac{1}{\big\langle 1/W\big\rangle}\,, \qquad \big\langle T\big\rangle \equiv \frac{1}{L}\int\limits_0^L T(x)dx \qquad (10)$$

В общем случае $W(x)$ и $T(x)$ — произвольные интегрируемые функции, определенные в области $0 \leqslant x \leqslant L$.

5. Уравнение критического состояния. Произвольные константы K_1, K_2, K_3, K_4, входящие в формулу (9) должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить четырем однородным граничным условиям. В результате получается система четырёх однородных уравнений относительно четырёх констант. Из условия существования нетривиального решения этой системы получается *уравнение критического состояния*, т.е. функциональное уравнение для переменной жесткости и переменного продольного усилия, при которых стержень потеряет устойчивость.

В качестве примера рассмотрим более простой случай стержня переменной жесткости при постоянном продольном усилии $T = -P = const.$, а $t(x) = -P\delta(x-L)$. Таким образом, на конце $x = L$ задана постоянная сжимающая сила по величине равная P и вместо схематического рисунка 1 получаем рисунок 2.

В этом случае $\widetilde{T} = 0$, $\lambda = \sqrt{P\big\langle 1/W\big\rangle}$ и формула (10) для общего решения исходного уравнения приобретает более простой вид:

$$u(x) = K_1\Big[\sin\lambda x - \lambda^2\varphi_1(\lambda,x)\Big] + K_2\Big[\cos\lambda x - \lambda^2\varphi_2(\lambda,x)\Big] + K_3x + K_4\,; \qquad (11)$$

$$\varphi_1(\lambda,x) \equiv \int\limits_0^L \widetilde{W}(\xi)G''_{\xi\xi}(x,\xi)\sin\lambda\xi d\xi\,, \qquad \varphi_2(\lambda,x) \equiv \int\limits_0^L \widetilde{W}(\xi)G''_{\xi\xi}(x,\xi)\cos\lambda\xi d\xi\,.$$

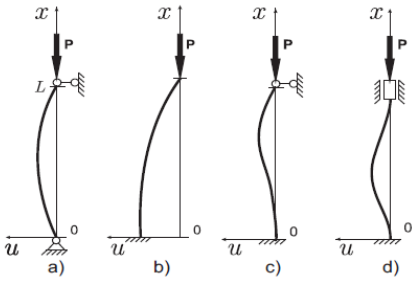

Рис. 2: Устойчивость стержня при действии консервативной продольной силы на конце $x = L$

Рассмотрим, например, шарнирно опертый стержень (рис. 2а). Удовлетворяя условиям $u(0) = u(L) = 0$, $u''(0) = u''(L) = 0$ получаем *уравнение критического состояния*. Вначале рассмотрим последние два условия для вторых производных, которые эквивалентны нулевым изгибающим моментам в концевых сечениях стержня в момент потери устойчивости

$$\begin{cases} K_1\varphi_1''(\lambda,0) + K_2\big[1+\varphi_2''(\lambda,0)\big] = 0\,, \\ K_1\big[\sin\lambda L + \varphi_1''(\lambda,L)\big] + K_2\big[\cos\lambda L + \varphi_2''(\lambda,L)\big] = 0\,. \end{cases}$$

Нетривиальное решение уравнения устойчивости получим если определитель этой системы уравнений равен нулю, то есть

$$\varphi_1''(\lambda,0)\big[\cos\lambda L + \varphi_2''(\lambda,L)\big] - \big[1+\varphi_2''(\lambda,0)\big]\big[\sin\lambda L + \varphi_1''(\lambda,L)\big] = 0\,.$$

Или

$$\sin(\lambda L+\vartheta) = \frac{\varphi_1''(\lambda,L) + \varphi_1''(\lambda,L)\,\varphi_2''(\lambda,0) - \varphi_1''(\lambda,0)\,\varphi_2''(\lambda,L)}{\sqrt{\big[\varphi_1''(\lambda,0)\big]^2 + \big[1+\varphi_2''(\lambda,0)\big]^2}}\,, \tag{12}$$

где

$$\vartheta = \arcsin\frac{\varphi_1''(\lambda,0)}{\sqrt{\big[\varphi_1''(\lambda,0)\big]^2 + \big[1+\varphi_2''(\lambda,0)\big]^2}}\,.$$

Правая часть уравнения (12) меньше единицы, следовательно оно разрешимо.

3. Заключение

Разработана методика приближенного решения исходного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Эта методика основана на интегральной формуле представления решения уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами. Предполагается, что у исходного и сопутствующего уравнений одинаковые области определения и одинаковые входные данные. В интегральном представлении существенную роль играет фундаментальное решение исходного уравнения, которое находится методом возмущений в виде бесконечного ряда. Исследована сходимость этого ряда. Члены ряда, в общем случае, представляют собой многократные интегралы возрастающего порядка. В результате общее решение исходного уравнения представлено через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение. Ограничивая число членов фундаментального ряда получаем приближенное аналитическое решение исходного уравнения. Получена оценка точности приближенного решения в зависимости от выбора сопутствующих коэффициентов и от числа удержанных членов фундаментального ряда. Предложенная методика проверена на примере уравнения Чебышева, имеющего общее точное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов// М.: Наука, 1979. 560 с.

2. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Часть 2// М.: 1956. 470 с.

3. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем// М.: ОНТИ, 1935. 183 с.

4. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений// М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 291 с.

5. Колатц Л. Задачи на собственные значения// М/: Наука, 1968". 503 с.

6. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Часть 2// М.: 1956. 470 с.

7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осредненние процессов в периодических среда// М.: Наука, 1984 352 с.

8. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов// М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

9. Горбачёв В. И., Москаленко О. Б. Об устойчивости стержней с переменной жесткостью // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2010. — № 6. — С. 65–69.

10. Горбачёв В. И., Москаленко О. Б. Устойчивость прямого стержня с переменной жесткостью// Изв. РАН МТТ, 2011. № 4. 181–192.

11. Горбачёв В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. 61–76.

12. Горбачёв В. И., Москаленко О. Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2012. № 1. 41–47.

13. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М: Мир, 1978. 518 с.

REFERENCES

1. Feodos'ev V. I. Soprotivlenie materialov, M.: Nauka, 1979. 560 s.

2. Timoshenko S. P. Soprotivlenie materialov. CHast' 2, M.: 1956. 470 s.

3. Dinnik A. N. Ustojchivost' uprugih sistem, M.: ONTI, 1935. 183 s.

4. Mikeladze SH. E. Novye metody integrirovaniya differencial'nyh uravnenij, M.-L.: GITTL, 1951. 291 s.

5. Kolatc L. Zadachi na sobstvennye znacheniya, M.: Nauka, 1968. 503 s.

6. Timoshenko S. P. Soprotivlenie materialov. CHast' 2, M.: 1956. 470 s.

7. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennie processov v periodicheskih sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s.

8. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd-vo MGU, 1984. 336 s.

9. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of bars with variable rigidity, Moscow University Mechanics Bulletin. — 2010. — Vol. 65, no. 6. — P. 147–150.

10. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of a straight bar of variable rigidity, Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, no. 4. — P. 645–655.

11. Gorbachev V. I. Metod tenzorov Grina dlya resheniya kraevyh zadach teorii uprugosti neodnorodnyh sred, Vychislitel'naya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. 1991. № 2. 61–76.

12. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of bars with variable rigidity compressed by a distributed force, — 2012. — Vol. 67, no. 1. — P. 5–10.

13. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike. M: Mir, 1978. 518 s.

Получено 01.06.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.