ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-311-344

О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков[1]

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Богатов Егор Михайлович — кандидат физико-математических наук, филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в г. Губкине Белгородской области; Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (г. Старый Оскол).
e-mail: embogatov@inbox.ru
Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).
e-mail: mukhiny@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрены предпосылки и зарождение теории нелинейных интегральных уравнений. Появление этой теории явилось закономерным следствием развития всей математики XVIII-XIX вв. Вместе с тем сильное мотивирующее воздействие оказало возрастание интереса к нелинейным задачам в конце XIX – начале XX в. Непосредственное исследование конкретных нелинейных интегральных уравнений было вызвано актуальной прикладной задачей о фигурах равновесия вращающихся жидких масс, которая, начиная с Ньютона, привлекала внимание значительного числа крупнейших математиков. В первые десятилетия развития теории нелинейных интегральных уравнений культивировались традиционные подходы, использовавшиеся для исследования дифференциальных и алгебраических уравнений, по схеме уравнение-решение. То есть на первом плане находилось *вычисление* и оценка его точности. Сложность и своеобразие нелинейных задач сразу выявили актуальность вопросов *существования и единственности* их решений, что сделало необходимым привлечение других, только создающихся областей математики. Теория интегральных уравнений вообще явилась одним из истоков функционального анализа. Кроме того, обе теории тесно переплетались и в своей эволюции взаимно стимулировали друг друга. В полной мере это относится и к нелинейным интегральным уравнениям, для которых первостепенное значение приобрели качественные методы. На рассматриваемом в настоящей работе этапе имело место параллельное развитие и смешение традиционных методов исследования уравнений и новых подходов качественного характера. На следующем этапе новые подходы вышли на первый план, объединившись с функциональным анализом и топологией.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, уравнение Клеро, уравнение Радо, уравнение Лиувилля, уравнение Ляпунова-Шмидта, уравнение Урысона, уравнение Некрасова, уравнение Гаммерштейна, А. Пуанкаре, Н.Н. Назаров.

Библиография: 98 названий.

Для цитирования:
Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 311–344.

[1]Работа является углублением исследований, проведённых в [6]. Основные её результаты были представлены на XVII международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», секция История и методология математики [7].

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-311-344

On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics[2]

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin

Bogatov Egor Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences, National Research University of Science and Technology "MISIS" in Gubkin town of Belgorod Region; Stary Oskol National Research University of Science and Technology "MISIS" (Stary Oskol).
e-mail: embogatov@inbox.ru
Mukhin Ravil' Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).
e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The paper considers the preconditions and the origin of the theory of nonlinear integral equations. The appearance of this theory was a natural consequence of the development of all mathematics of the XVIII-XIX cc. At the same time, the growing interest in nonlinear problems in the late XIX and early XX centuries had a strong motivating effect. The direct investigation of specific nonlinear integral equations was triggered by an urgent applied problem on the equilibrium figures of rotating liquid masses, which has attracted a significant number of major mathematicians since Newton. In the first decades of the development of the theory of nonlinear integral equations, traditional approaches were cultivated, which were used to study differential and algebraic equations, according to the equation-solution scheme. That is, the foreground was the calculation and assessment of its accuracy. The complexity and originality of nonlinear problems immediately revealed the relevance of questions of the existence and uniqueness of their solutions, which made it necessary to involve other, just emerging areas of mathematics. The theory of integral equations in general was one of the origins of functional analysis. Moreover, both theories were closely intertwined and mutually stimulated each other in their evolution. This fully applies to nonlinear integral equations, for which qualitative methods have become of paramount importance. At the stage considered in this work, there was a parallel development and mixing of traditional methods for studying equations and new approaches of a qualitative nature. In the next phase, new approaches came to the fore, merging with functional analysis and topology.

Keywords: nonlinear integral equations, Clairaut equation, Radau equation, Liouville equation, Lyapunov-Schmidt equation, Urysohn equation, Nekrasov equation, Hammerstein equation, A. Poincaré, N.N. Nazarov.

Bibliography: 98 titles.

For citation:
E. M. Bogatov, R. R. Mukhin, 2021, "On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 311–344.

[2]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-011-00402.

1. Введение

Интегральные уравнения составляют обширную и активно разрабатываемую область современной математики. Они сыграли решающую роль в формировании функционального анализа. Самостоятельное место в теории интегральных уравнений занимают нелинейные уравнения. Их значение особенно усилилось во второй половине XX в., когда нелинейные системы стали привлекать пристальное внимание. Нелинейные интегральные уравнения составляют ядро нелинейных операторных уравнений, исследование которых в немалой степени придаёт математике ее современный вид.

Область нелинейных интегральных уравнений столь обширна, богата глубокими результатами и нетривиальными идеями, что в объеме одной статьи невозможно охватить даже основные положения. Поэтому мы ограничимся здесь начальным этапом, охватывающим, с некоторой долей условности, первые три-четыре десятилетия XX в., когда сложилась эта область.

Интегральные уравнения, начиная с XVIII в., неоднократно появлялись в работах разных математиков. Но это были отдельные, несвязанные между собой задачи. Лишь к концу XIX в. стали вызревать убеждения, что интегральные уравнения составляют самостоятельную сущность, для которой следует выработать общий подход, позволяющий охватить целый, как потом выяснилось, очень обширный класс задач. Наиболее отчетливо выразил эту идею в 1888 г. П. Дюбуа-Реймон [24], которому принадлежит и сам термин «интегральное уравнение».

Основы теории линейных интегральных уравнений были сформулированы на рубеже XIX-XX вв. и это связано с именами целого ряда выдающихся математиков: В. Вольтерры [14]-[17], Э.И. Фредгольма [88], Д. Гильберта [19], Э. Шмидта [92, 93]. По этому поводу Г. Вейль отмечал: «*На территории анализа была открыта золотая жила, которая сравнительно легко поддавалась разработке и которая не скоро должна была истощиться ... Самые настойчивые приступили к атаке на нелинейные интегральные уравнения*» [12]. Логика развития науки обычно следует пути от простого к сложному. Так, к середине XIX в. была построена исчерпывающая теория линейных колебаний. Теория нелинейных колебаний, которая до настоящего времени далека от завершения, является детищем XX в. Но обстоятельства могут сложиться так (чаще всего вследствие запросов со стороны прикладных задач) что привычная логика оказывается нарушенной. Это и произошло с теорией интегральных уравнений и связано с восходящей еще к И. Ньютону проблемой фигур равновесия вращающейся жидкой массы.

А. Эддингтон отмечал, что одна из самых глубоких загадок Вселенной заключается во всеобъемлемости вращения, по-видимому, для всех ее объектов [26]. Отсюда становится ясной актуальность указанной проблемы, ставшей предметом интереса большинства крупнейших математиков XVIII-XIX вв. Проблема равновесия вращающихся жидкостей принадлежит к числу труднейших задач и, как, например, другая широко известная проблема трех тел, по-видимому, неисчерпаема и не имеет общего решения.

2. Первые интегральные уравнения. Работы А. Клеро и Р. Радо

Первый шаг в создании теории интегральных уравнений традиционно связывают с известной работой Н. Абеля о таутохроне (1823) [1] (Г. Бэйтман [9], Е. Хелингер и О. Тёплиц [91], Й. Лютцен [54] и др.) Такой же позиции придерживались ранее и авторы настоящей статьи [6]. Однако в дальнейшем выяснилось, что интегральное уравнение было положено в основу работы А. Клеро "*Геометрия фигуры Земли, основанная на началах гидростатики*" (1743) *на 80 лет раньше* [27].

Клеро ставит задачу найти зависимость, связывающую плотность $\rho(r)$ медленно вращающейся неоднородной жидкой массы в форме сфероида S от сжатия её слоёв $\alpha(r)$ (r — средний радиус S) во второй части главы II своего труда. Предполагая, что наслоения такой массы отличаются от эллипсоидов на величину порядка квадрата её сжатия, и что центробежная сила много меньше силы тяжести, Клеро приходит к уравнению равновесия массы, исходя из равенства нулю равнодействующей силы тяжести и центробежной силы в произвольной точке M поверхности S [28]:

$$\alpha \int_0^r \rho r^2 dr - \frac{1}{5r^2} \int_0^r \rho d\left(r^5\alpha\right) - \frac{r^3}{5} \int_r^1 \rho d\alpha = \frac{\varphi r^3}{2} \int_0^1 \rho r^2 dr \tag{1}$$

где φ — отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, $\varphi = \frac{\omega^2 R}{f(R)}$, ω — угловая скорость вращения жидкости; R — экваториальный радиус; $f(R)$ — интенсивность силы притяжения на расстоянии R от центра.

При известной функции сжатия слоёв сфероида $\alpha = \alpha(r)$ получается линейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\rho = \rho(r)$. Если же известна функция плотности $\rho = \rho(r)$, то уравнение (1) становится линейным интегро-дифференциальным уравнением относительно искомой функции $\alpha = \alpha(r)$. Значение полученных результатов становятся ясными из замечания Н.И. Идельсона “*.... уравнение (1) содержит в себе, с точностью до первой степени величин α и φ, всю теорию неоднородных жидких планет*” [25, с. 325].

Путём дифференцирования и упрощения уравнения (1) Клеро привёл его к виду

$$\left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\alpha}{dr} + \frac{2\alpha}{r^3}\right) \cdot A\left(r\right) = \int_r^1 \rho d\alpha + \frac{5\pi A\varphi}{2}, \tag{2}$$

где $A = A\left(r\right) = \int_0^r \rho r^2 dr$.

Второе дифференцирование дало

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\rho r^2}{A\left(r\right)} \cdot \frac{d\alpha}{dr} + \left(\frac{2\pi r}{A(r)} - \frac{6}{r^2}\right) \cdot \alpha = 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) по предложению И. Тодхантера [86], стали называть *уравнением Клеро.*

Результат Клеро получил широкую известность и дальнейшее развитие у П. Лапласа [31], А.М. Ляпунова [37], Р. Радо. С помощью подстановки $\eta = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dr}$ Радо свёл уравнение (3) к нелинейному (относительно η) дифференциальному уравнению 1-го порядка (уравнение Радо) [80]:

$$D\left(r\frac{d\eta}{dr} + \eta^2 + 5\eta\right) + 2r\frac{dD}{dr}\left(1+\eta\right) = 0 \tag{4}$$

где $D = \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho dr^3$ — средняя плотность сфероида.

Применяя специальный приём, он преобразовал уравнение (4) к виду

$$\frac{d}{dr}[\ r^5\sqrt{1+\eta}\ \cdot D\ ] = \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}[1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10}\ ].$$

После интегрирования в пределах от 0 до r, Радо пришёл к нелинейному интегральному уравнению:

$$r^5\sqrt{1+\eta}D = \int_0^r \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left(1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10}\right) dr. \tag{5}$$

которое носит его имя и является, по-видимому, *первым нелинейным интегральным уравнением.*

Уравнение Радо было использовано А. Пуанкаре в своих лекциях по фигурам равновесия жидкой массы [76], [78], правда, без ссылок на Радо. Пуанкаре вывел из уравнения (5) теоретический предел сжатия Земли δ (точный до величины порядка первой степени сжатия: $\delta \leq \frac{1}{297{,}1}$) [25, с. 331].

3. Задачи математической физики

Помимо запросов со стороны прикладных проблем астрономии и геодезии, интерес к интегральным уравнениям был обусловлен краевыми задачами математической физики (Ж. Фурье (1822) [87], Н. Абель (1826) [1], Р. Мёрфи (1833) [56], Ж. Лиувилль (1837) [51]) .

Лиувилль, в частности, показал, что краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + p^2 y = \varphi(x)$$

может быть сведена к интегральному уравнению вида

$$u\,(x) = f\,(x) + \int_a^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi,$$

которое допускает решение методом «последовательных подстановок» [10].

Суть метода заключалась в том, что решение уравнения

$$u\,(x) = f\,(x) + \int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

ищется в виде

$$u\,(x) = S_n\,(x) + R_n\,(x)\,,$$

где $S_n\,(x) =\ f\,(x) + \int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)f(\xi_1)d\xi_1 d\xi + \ldots +$
$\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K\,(\xi,\xi_1)\ldots\int_a^b K\,(\xi_{n-2},\xi_{n-1})f\,(\xi_{n-1})\,d\xi_{n-1}\ldots d\xi_1 d\xi;$

$$R_n\,(x) = \int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K\,(\xi,\xi_1)\ldots\int_a^b K\,(\xi_{n-1},\xi_n)u\,(\xi_n)\,d\xi_n\ldots d\xi_1 d\xi.\ [10,\text{с.}14]$$

Повышение внимания к интегральным уравнениям произошло после того, как К. Нейману (1861) удалось привлечь теорию потенциала для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа [69]

$$\begin{cases}\Delta v(x) = 0,\ x \in D\\ \quad v|_{\partial D} = F(x).\end{cases} \tag{6}$$

Здесь функция $F(x)$ – однозначна и непрерывна, а область D – ограничена и имеет достаточно гладкую границу ∂D (историко-математические подробности см. в [2]).

Приём Неймана заключался во введении в рассмотрение логарифмического потенциала, что позволило, в случае, когда область D – осесимметрична, свести задачу (6) к интегральному уравнению

$$v\,(x) = \int_0^{2\pi} v\,(a)\eta\,(a,x)\,d\omega_a,$$

где $x \in D;\ \eta\,(a,x)$– известная функция [2, с. 73].

В более поздней своей работе [70] (1878) Нейман решил задачу (6) для выпуклой области D с помощью итерационной процедуры, похожей на процедуру Лиувилля. В основу метода лёг поиск формы потенциала двойного слоя $V(x)$ при неизвестной плотности $\rho(s)$ в виде

$$V(x) = \int_S \rho(s) K(x,s)\, d\sigma,$$

где $S = \partial D; K(x,s) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-s|}\right)$.

Решение задачи (6) было представлено рядом

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_n. \tag{7}$$

Его члены находятся рекуррентно:

$$V_0(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S F(s)\, K(x,s)\, d\sigma, \tag{8}$$

$$V_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S V_{n-1}(s)\, K(x,s)\, d\sigma. \tag{9}$$

Для указанных выше областей Нейман доказал сходимость ряда (7) при $|\lambda| \le 1$. Заметим, что соотношение (9) является дискретным аналогом линейного интегрального уравнения

$$V(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S V(s)\, K(x,s)\, d\sigma.$$

Обратим внимание на то, что в этом интегральном уравнении параметр отсутствует.

По-видимому, первым, кто ввёл параметр в интегральное уравнение, был Г. Шварц. В 1885 г. он опубликовал большую работу по теории минимальных поверхностей [95], в которой была рассмотрена краевая задача

$$\Delta w + \xi g w = 0, \tag{10}$$

$$w|_{\partial D} \equiv 1 \tag{11}$$

где функция $g = g(x)$ положительна и непрерывна в области D.

Осуществляя поиск решения (10)-(11) в виде ряда

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n w_n, \tag{12}$$

где $w_0 \equiv 1$, $\;w_n|_{\partial D} \equiv 0$, $n \ge 1$, Шварц использовал решение задачи

$$\begin{cases} \Delta w + f = 0 \\ \;\; w|_{\partial D} \equiv 0 \end{cases}$$

в интегральной форме

$$w(M) = \frac{1}{2\pi}\iint_D f(P)\, G(M,P)\, dx.$$

Здесь $G(M,P)$ – функция Грина.

Это позволило ему дать явную формулу для нахождения w_n:

$$w_n(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_D g\,(P) w_{n-1}\,(P)\, G\,(M,P)\, dx.$$

Доказательство сходимости ряда (12) было дано при малых $|\xi|$. В его основе лежало неравенство, носящее теперь имя Шварца (подробности см., например, в [23, Гл. III, §1].

Задачи с параметром получили распространение после выхода работы А. Пуанкаре (1897) [75]. При изучении колебаний мембраны он ввёл в (10) комплексный параметр и показал, что $u(s)$ является мероморфной функцией этого параметра. Это был очень важный шаг, он явился логическим продолжением бифуркационной тематики Пуанкаре (см., например, [57, Гл.I, § 1]). Как неоднократно было замечено в различных областях математики, с введением параметра, с более общих позиций, задача решения не только интегральных, но и их обобщения — операторных уравнений, упрощается. Меняется и сама постановка задачи, в частности, вопросы существования и единственности решений в зависимости от параметра. Конструктивное значение приобретает и проблема неединственности решений.

Переход от двумерных уравнений математической физики к интегральным уравнениям был осуществлён в работе Э. Пикара (1890) посредством функции Грина. В своей работе [71] он распространил метод последовательных приближений на линейные и нелинейные интегральные уравнения. Скорее всего, интерес Пикара к подобным уравнениям был обусловлен участием в конкурсе Гёттингенского научного общества на интегрирование квазилинейного уравнения Лиувилля:

$$\Delta u = ke^u, \tag{13}$$

где $u = u(x,y); (x,y) \in \Omega \subset R^2, k = 1$ [77, с. 236].

Лиувилль использовал уравнение (13) в работах по дифференциальной геометрии ещё в середине XIX в. В частности, в работе [52] он показал, что на поверхности S постоянной кривизны $\pm\frac{k}{2}$ $(k > 0)$ с метрикой

$$ds^2 = \lambda(\alpha,\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

где α и β – это так называемые «изотермальные» координаты поверхности, функция λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 ln\lambda}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 ln\lambda}{\partial\beta^2} = \mp\, k\lambda,$$

которое переходит в уравнение

$$u''_{\alpha\alpha} + u''_{\beta\beta} = \mp\, ke^u \tag{14}$$

Вернёмся к работе Пикара [71], в которой долгое время развиваемый многими математиками метод последовательных приближений обрел относительно завершенную форму (она примечательна еще тем, что является одной из первых, где проведено аналитическое исследование нелинейного интегрального уравнения).

Используя функцию Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0,\ u = u(x,y)$ в области Ω, Пикар рассмотрел переход от уравнения (13) к интегральному уравнению

$$u\,(x,y) = -k \iint_\Omega \left(e^{u(\xi,\eta)} G\,(\xi,\eta,x,y)\right) d\xi d\eta, \tag{15}$$

где $k \in R$. Для доказательства его разрешимости, по аналогии с методом Шварца, им была построена рекуррентная последовательность

$$u_n = -k \iint_\Omega \left(e^{u_{n-1}} G(\xi,\eta,x,y)\right) d\xi d\eta \tag{16}$$

и доказана её сходимость.

4. Нелинейное уравнение фигур равновесия в теории Ляпунова

Исследования фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, были выполнены в магистерской диссертации А. М. Ляпунова (1884) [36] и мемуаре А. Пуанкаре (1885) [37]. Но в них (как и у Клеро) вся теория была также развита не дальше первого приближения. У Пуанкаре фигуры равновесия получались наложением на эллипсоид слоя переменной толщины ζ, которая предполагалась малой по сравнению с размерами эллипсоида, что позволяло пренебрегать высшими степенями ζ. Затем выяснялись условия, при которых деформированная таким образом фигура может быть фигурой равновесия. В теории отсутствовали доказательства существования фигур равновесия, отличных от эллипсоидальных. Замечательно, что вопрос о существовании фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, привёл Пуанкаре к понятию бифуркации, которое является фундаментальным для всей нелинейной проблематики: "Формы равновесия рассматриваемой системы задаются уравнениями:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0,$$

которые будут иметь ряд реальных решений, и когда y [*переменный параметр*, Е.Б., Р.М.] будет меняться непрерывным образом, эти решения сами будут меняться непрерывно, формируя различные линейные ряды равновесных форм. Кроме того, может случиться, что одна и та же форма равновесия принадлежит двум или более линейным рядам. Тогда это форма бифуркации. Действительно, при значении y, бесконечно близком к значению, соответствующему этой форме, можно найти две формы равновесия, которые бесконечно мало отличаются от формы бифуркации. Также может случиться, что при изменении y существуют два линейных ряда действительных форм равновесия, которые начинают смешиваться, а затем исчезают, потому что корни уравнений равновесия становятся мнимыми. Соответствующая форма равновесия будет тогда называться предельной формой"А. Пуанкаре (1888) [74].

Перейдём к характерным особенностям нелинейных интегральных уравнений. Главная из них заключается в неединственности их решений. Например, в различных прикладных задачах известно тривиальное решение, и требуется найти другое, представляющее интерес нетривиальное решение. Часто можно свести задачу к виду

$$\varphi = F(\varphi, \lambda) \tag{17}$$

где нелинейный интегральный оператор $F(\varphi, \lambda)$ зависит от числового параметра λ. Особый интерес представляют критические значения λ, когда разветвляются или сливаются несколько решений. Из-за большой сложности в исследовании задачи часто приходится ограничиваться случаем *малых* решений.

Другая особенность: проблема выявления зависимости решений (17) от параметра λ . Если уравнение (17) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$, будут ли существовать решения при λ, близких к λ_0 и какова их зависимость от λ?

Все эти вопросы были рассмотрены Ляпуновым в цикле работ, посвящённых фигурам равновесия вращающихся жидкостей [38]-[46] (1903-1916). Он привёл требуемое доказательство существования неэллипсоидальных фигур равновесия и дал решение сложнейшего вопроса об устойчивости грушевидных фигур равновесия ([57, Гл. I, § 1]; [6, §2]).

В первой из работ "*Исследование по теории фигуры небесных тел*" [37] (1903) Ляпунов доказал существование фигур равновесия жидких масс, близких к шарообразным. Он рассмотрел несжимаемую жидкую неоднородную массу плотности ρ, вращающуюся вокруг оси OX в предположении, что ρ возрастает от поверхности к центру и конечна. Тогда поверхности постоянного давления будут и поверхностями постоянной плотности, то есть на каждой поверхности уровня будут выполняться условия

$$\rho = Const; U = Const,$$

где U — потенциал силы тяжести.

Для характеристики всего семейства Ляпунов ввёл параметр a, так что

$$\rho = \rho(a);\ U = U(a).$$

При этом $\rho(a)$ считается известной функцией, тогда как зависимость *U(a)* предстоит определить (это и является главной целью задачи). В качестве параметра Ляпунов принял радиус сферы, объём которой равен объёму, ограниченному рассматриваемой (неизвестной) поверхностью.

Пусть (x, y, z) — координаты точки на поверхности уровня; взяв начало координат в центре тяжести вращающейся массы, Ляпунов соотнёс точки поверхности уровня с точками сферы с координатами a, θ, φ и положил

$$\begin{cases} x \ = \ a\,(1+\zeta)\cos\theta \\ y \ = \ a\,(1+\zeta)\sin\theta\cos\varphi \\ z = \ a\,(1+\zeta)\sin\theta\sin\varphi \end{cases} \tag{18}$$

так что

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,(1+\zeta\ )^2\,, 0 \le a \le A.$$

Здесь ζ есть искомая функция параметра a и сферических координат θ, φ, характеризующая отклонение данной поверхности уровня от *сферы* радиуса a. Ляпунов предположил, что при малой скорости вращения эта поверхность останется близкой к сфере: $\zeta \ll 1$.

Используя равенство

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2)$$

где V — потенциал силы притяжения, $\frac{\omega^2}{2}\,(y^2+z^2)$ — потенциал центробежных сил, ω – угловая скорость вращения, и выполнив ряд преобразований (см. [55, с. 118]), Ляпунов пришёл к уравнению вида

$$\int_0^A \rho\left(a'\right)^2 da' \int_S \left(1+\left(\varsigma'\right)\right)^2 \left(1+\frac{\partial(a'\varsigma')}{\partial a'}\right)\frac{d\sigma'}{\Delta} + \frac{\omega^3}{2g}a^2\left(1+\varsigma^2\right)\sin^2\theta = F(a). \tag{19}$$

Здесь g – постоянная всемирного тяготения; Δ — расстояние между переменной точкой $P'(r', \theta', \varphi')$ внутри жидкости и фиксированной точкой $P(r, \theta, \varphi)$; $F(a)$ — заданная функция; интегрирование во втором интеграле производится по поверхности единичной сферы *S*.

Уравнение (19) представляет собой *нелинейное* интегро-дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции ζ. Для его исследования Ляпунов разлагал функцию ζ в ряд по степеням малого параметра ε (отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе жидкой планеты):

$$\zeta \ = \ \zeta_1\varepsilon + \zeta_2\varepsilon^2 + ... + \ \zeta_n\varepsilon^n \ + \ ..., \tag{20}$$

при этом $\zeta_i = \zeta_i(a, \cos\theta)$ [55, с. 125].

После ряда преобразований, среди которых было разложение функций ζ_i в ряды по сферическим функциям, Ляпунов пришёл к уравнению Клеро

$$z\int_0^a \rho a^2 da - \frac{1}{5a^2}\int_0^a \rho\frac{\partial(a^5 z)}{\partial a}da - \frac{a^3}{5}\int_0^A \rho\frac{\partial z}{\partial a}da = -\frac{Ma^3}{15A^3} \tag{21}$$

где M — масса жидкой планеты.

Используя решение уравнения (21), Ляпунов доказал сходимость ряда (20) при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ [55, с. 142].

В работе «*Об одной задаче Чебышева*» (1905) Ляпунов дал решение одной из труднейших задач – *доказательства существования неэллипсоидальных фигур равновесия жидкой массы и об их устойчивости.* Он перешёл от эллипсоида Якоби с полуосями $\sqrt{p+1}, \sqrt{p+q}$, $\sqrt{p}(q < 1)$, для которого известна приведённая величина угловой скорости вращения Ω_0, к параметрическим уравнениям поверхности жидкой массы

$$x = \sqrt{p + \ \zeta + 1} \sin\theta \cos\psi,$$
$$y = \sqrt{p + \ \zeta + q} \sin\theta \sin\psi,$$
$$z = \sqrt{p + \ \zeta},$$

где $\zeta(\theta, \psi, a)$ – искомая функция, характеризующая отклонение поверхности фигуры равновесия от исходного эллипсоида, a - параметр, при изменении которого получаются разные фигуры равновесия и $\zeta(\theta, \psi, a)$ равномерно стремится к нулю при $a \to 0$. Новые фигуры равновесия, по предположению Ляпунова, должны соответствовать приведённой угловой скорости $\Omega = \frac{\omega}{2\pi g\rho}$ с тем, чтобы выполнялось условие

$$\Omega = \Omega_0 + \eta,$$

где $|\eta| \ll 1$.

Для функции ζ Ляпунов получил нелинейное интегральное уравнение, ставшее фундаментом всей его теории [55, с. 216]

$$R(\theta, \psi) H(\theta, \psi) \zeta(\theta, \psi) - \int_S \frac{H'(\theta', \psi')\, \zeta'(\vartheta', \psi')\, d\sigma'}{D(\theta, \psi, \theta', \psi')} = \frac{\Delta}{2} W + C, \tag{22}$$

где $W = \eta \cdot (p + \cos^2\psi + q\sin^2\psi + \zeta)\sin^2\theta + U_2 + U_3 + \ldots,$
U_n — однородная интегро-степенная форма относительно функции ζ;
R, H и Δ — заданные функции;
D — расстояние между точками эллипсоида $\zeta(\theta, \psi)$ и $\zeta'(\theta', \psi')$;
S – поверхность единичной сферы; C – постоянная.

Решение уравнения (22) представляло исключительные трудности. Оно было найдено Ляпуновым в виде ряда (20), в котором величина ε определялась по формуле

$$\varepsilon^\lambda = |\eta|\,; \lambda \in \mathbb{N}.$$

Это дало возможность свести задачу к системе рекуррентных линейных интегральных уравнений. Сходимость полученного ряда доказывалась построением соответствующих мажорант [55, с. 216].

Для исследования устойчивости полученных фигур равновесия Ляпунов задействовал функции Ламе $E_{ns}(\mu)$, $E_{ns}(\nu)$ аргументов μ, ν являющихся эллиптическими координатами точки на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{p+1} + \frac{y^2}{p+q} + \frac{z^2}{p} = 1.$$

Функции Ламе представляют собой полную ортонормированную систему; их произведения $E_{ns}(\mu)E_{ns}(\nu)$ являются линейными комбинациями элементарных сферических функций $Y_{n,s}(\theta, \psi)$ $(s = 0, 1, \ldots 2n)$ порядка n [84, с. 411].

Ляпунов определил, что новые фигуры равновесия, отличные от эллипсоидов, получаются только в том случае, когда соответствующее (22) однородное интегральное уравнение имеет одно или несколько нетривиальных решений. В своей диссертации [36], [38] он продемонстрировал, что это выполняется для счётного числа эллипсоидов Маклорена и Якоби E_k, с определённым соотношением осей. При этом от каждой эллипсоидальной фигуры E_k, соответствующей последовательности функций $\left\{\zeta_i^{(k)}\right\}$, могут ответвляться *неэллипсоидальные* фигуры равновесия $\hat{E}_k$, соответствующие другой последовательности функций $\left\{\varsigma_i^{(k)}\right\}$. Для эллипсоидов Маклорена возможность ответвления была определена Ляпуновым при $\lambda \geq 2$ некоторыми условиями на величину числа α_1, входящего в определение ζ_1:

$$\zeta_1 = \alpha_1 \tau,$$

где τ выражается через функции Ламе [55, с. 227].

В последующем Ляпунов детально изучил бифуркации, установил сходимость применяемых разложений и со всей строгостью исследовал вопрос об устойчивости новых фигур равновесия.

Подчеркнём, что Ляпунов получил свои результаты ещё до того, как теория *линейных* интегральных уравнений обрела более или менее сложившуюся форму. Стоит также отметить, что результаты Ляпунова получили известности в Европе [85], [48, с. 255].

Много усилий по систематизации и популяризации идей Ляпунова и Пуанкаре, связанных с нахождением фигур равновесия жидкостей, было приложено Л. Лихтенштейном в 1920-х гг. Он доказал ряд новых теорем существования и устойчивости в теории равновесия однородных и неоднородных жидкостей, опираясь на результаты Э. Шмидта (см. ниже), методы теории потенциала и теории функций комплексного переменного и прочитал в 1928 г. курс лекций по космогоническим гипотезам, который был опубликован в 1933 г. [50]. При этом исходным пунктом в изложении Лихтенштейна было некоторое интегро-дифференциальное уравнение, которое можно рассматривать, как обобщение фундаментального уравнения Ляпунова (22).

5. Развитие математического аппарата теории ветвления. Работа Э. Шмидта

В исследованиях интегральных уравнений в Геттингене заметное место принадлежит ученику Гильберта Э. Шмидту. В его работах [92]-[93] теория линейных интегральных уравнений Гильберта получила относительное завершение. А вот третья часть его мемуаров, вышедшая после опубликования статей Ляпунова [36]-[40], была отведена уже нелинейным уравнениям [94]. Здесь Шмидт построил теорию ветвления малых решений, уделяя главное внимание самому математическому аппарату (Шмидт только упоминает проблему равновесия вращающейся жидкости и приводит пример бифуркации). Неизвестно, был ли Шмидт знаком с работами Ляпунова, но так или иначе он на них не ссылается. Шмидт рассмотрел те же самые уравнения, что и Ляпунов, но в несколько более общем виде:

$$u(x) - \int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds = f(x) + \int_a^b K_1(x,s)\,v(s)\,ds - \sum_{m+n\geq 2} U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} \tag{23}$$

или, в символической форме,

$$\mathfrak{B}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = 0, \tag{24}$$

что предвосхищает операторную запись в последующих исследованиях нелинейных интегральных уравнений.

В уравнении (23) $x \in (a, b)$;

$$U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n_i} \int_a^b \cdots \int_a^b K^{(j)}\left(x, s_1, \ldots, s_i\right) u^{\alpha_0}(x) u^{\alpha_1}\left(s_1\right) \ldots u^{\alpha_i}\left(s_i\right) \times \\ \times v^{\beta_0}(x) v^{\beta_1}\left(s_1\right) \ldots v^{\beta_i}\left(s_i\right) ds_1 \ldots ds_i; \quad (25)$$

$\alpha_k, \beta_k (k = 0, \ldots, i)$ – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_i = m;\ \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_i = n;$

$f, v,\ K, K_1, K^{(j)}$ – заданные непрерывные функции своих аргументов.

Подобные уравнения стали впоследствии называть уравнениями Ляпунова-Шмидта [90].

Слагаемые в правой части равенства (25) называются *интегро-степенными членами.* В зависимости от конечности или бесконечности числа членов $U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}$ мы имеем дело с *интегро-степенной формой* или с *интегро-степенным рядом.* Предполагается, что при малых $|u|, |v|$ интегро-степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

Простейшим примером уравнения (23) может служить следующее уравнение [53, § 1]

$$u(x) + \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = v(x) + \sum_{m+n>1} a_{mn} u^m(x)\, v^n(x).$$

Для исследования разрешимости уравнения (23) «в малом» Шмидт рассматривает его, как уравнение с известной правой частью и применяет к нему теорию Фредгольма [89] о представлении решений линейного уравнения посредством резольвенты (разрешающего ядра) $R(x, t)$. Здесь необходимо выделить два случая, в зависимости от того, является ли оператор

$$Au = \int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds.$$

обратимым, или нет.

По аналогии с матричными уравнениями вида

$$BX = F, \text{ где } B = I - A, \quad (26)$$

$X \in \mathbb{R}^n,\ F \in \mathbb{R}^n$; $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, эти случаи будут соответствовать тому, что

a) *rang* $B = n$ означает, что уравнение (26) имеет единственное решение;

b) *rang* $B < n$ означает, что уравнение (26) может иметь множество решений.

Рассмотрим эти случаи.

1. *Единица не является собственным значением линейного интегрального оператора A.*

Здесь теория Фредгольма даёт возможность преобразовать уравнение (23) к виду [11, с. 18]

$$u(x) = -U_{01}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} - \int_a^b R(x, t)\, U_{01}\begin{pmatrix} t \\ u, v \end{pmatrix} dt + \\ + \sum_{m+n \geq 2} \left[-U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} - \int_a^b R(x, t)\, U_{mn}\begin{pmatrix} t \\ u, v \end{pmatrix} dt \right] \quad (27)$$

$U_{01}\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix}$ — сумма первых двух слагаемых в правой части (17); $R(x,t)$ – резольвента[3] интегрального уравнения $u = Au + f(x)$.

Обозначая через $P_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix}$ выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части (27), Шмидт преобразует последнее уравнение к виду

$$u\,(x) = P_1\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + P_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u,v \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Интегро-степенной ряд в правой части (28), сходится абсолютно и равномерно при малых $|u|, |v|$.

Равенство (27) можно трактовать, как аналог бесконечной системы уравнений

$$x_k = a_k t + f_k(t, x_1 x_2, \dots) \quad k = 1, 2, \dots \tag{29}$$

где f_k – функция бесконечного числа переменных вида:

$$f_k(x_1 x_2, \dots) = c + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i + \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} x_i x_j + \dots \tag{30}$$

Уравнение (29) было изучено Х. фон Кохом (1899) [29]. Он показал, что если все коэффициенты при переменных в (29) равномерно ограничены, то для малых t эта система разрешима, причём её решение представляется в виде степенного ряда по переменной t *(принцип обращения ряда)*.

Распространяя принцип обращения степенных рядов[4] на интегро-степенные ряды, Шмидт ищет решение уравнения (28) также в виде ряда

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \tag{31}$$

доказывая методом мажорант, что он сходится и является настоящим решением уравнения (23). Оказывается, что при достаточно малых $|v|$ других решений уравнение (23) не имеет.

Рассмотрение другого случая (ему соответствует необратимость оператора B из (26)), даёт, как в классической задаче о неявных функциях [22, гл. I, § 3] ветвление решений.

2. *Единица является n-кратным собственным значением оператора A.*

В этом случае имеется n ортонормированных собственных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. Следуя Шмидту [94], рассмотрим сначала случай $n = 1$. Согласно теории Фредгольма, тогда единица будет простым собственным значением оператора B_1 сопряжённого к A.

$$B_1 u = \int_a^b C(x,t) u(t) dt.$$

Если $\psi_1\,(x)$ – собственная функция оператора B_1, соответствующая собственному значению $\lambda = 1$, то оператор A_1, заданный выражением

$$A_1 u\,(x) = \int_a^b \left(C\,(x,t) - \psi_1(x)\varphi_1(t)\right) u\,(t)\, dt$$

не имеет число 1 среди своих собственных значений.

[3] То есть $u\,(x) = f\,(x) + \int_a^b R\,(x,t)\, f\,(t)\, dt$.

[4] Шмидт не ссылается на Коха в своей работе, однако её влияние на исследования Шмидта прослеживается довольно чётко [91, с. 1484, сноска 338].

Это позволяет свести задачу к предыдущей, вводя в рассмотрение новое ядро $E(x,t) = C(x,t) - \psi_1(x)\varphi(t)$. Тогда уравнение (23) можно переписать в виде

$$u(x) - \int_a^b E(x,s)\,u(s)\,ds = \xi\psi_1(x) - U_{01}\binom{x}{u,v} - \sum_{m+n\geq 2} U_{mn}\binom{x}{u,v} \tag{32}$$

где

$$\xi = \int_a^b \varphi_1(t)u(t)dt. \tag{33}$$

Используя уже развитую технику, Шмидт получает уравнение

$$u(x) = \left(\psi_1(x) + \int_a^b \Gamma(x,s)\,\psi_1(s)ds\right)\xi - U_{01}\binom{x}{u,v} - \int_a^b \Gamma(x,s)\,U_{01}\binom{s}{u,v}ds - \\ - \sum_{m+n\geq 2}\left[U_{mn}\binom{x}{u,v} + \int_a^b \Gamma(x,s)\,U_{mn}\binom{s}{u,v}ds\right], \tag{34}$$

где $\Gamma(x,s)$ – резольвента оператора с ядром $E(x,s)$.

Решение уравнения (34) Шмидт ищет в виде

$$u(x) = \sum_{m+n\geq 1} \xi^m V_n^m \binom{x}{v}, \tag{35}$$

где $V_n\binom{x}{v}$ – интегро-степенная форма степени n по v.

Так же, как и в первом случае, доказывается, что при каждом фиксированном ξ (как параметре) и при достаточно малых величинах $|u|, |v|$ уравнение (34) имеет единственное решение, представленное в виде (35).

Для определения возможных значений ξ нужно подставить $u(x)$ из (35) в (33), при этом получится *уравнение разветвления*

$$\xi = \sum_{m+n\geq 1} \xi^m \int_a^b \varphi_1(s) V_n^m \binom{s}{v} ds. \tag{36}$$

Шмидт показал, что в правой части уравнения (36) отсутствуют первые степени ξ, следовательно, в общем случае оно имеет не единственное решение. Какой бы малой по модулю не была функция $v(x)$, число решений уравнения (32) определяется числом решений уравнения разветвления (36). Таким образом, можно получить информацию о числе и виде всех нетривиальных малых решений уравнения (23), то есть полностью решить задачу об их *бифуркациях*.

Шмидтом была осуществлена *редукция* нелинейного интегрального уравнения, решением которого являются функции из *бесконечномерного* пространства, к нелинейному алгебраическому уравнению в *конечномерном* пространстве, решением которого являются вещественные числа. Подчеркнём, что данный метод (редукция Шмидта, как впрочем, и подход Ляпунова) применим только к *малым* решениям уравнения (23) и только *локально*, в малой окрестности тривиального решения.

Шмидт рассмотрел также случай, когда кратность собственного значения оператора A больше 1, и исследовал разрешимость уравнений вида (25), в которых формы $U_{mn}\binom{x}{..}$ зависят от большего числа функциональных аргументов $u(x), v(x), w(x), \ldots$ Он показал, что его методы остаются справедливыми и в этих случаях.

Подводя итог, можно сказать, что Шмидт успешно перенёс методы нелинейных систем алгебраических уравнений на нелинейные интегральные уравнения путём обобщения закона Пюизё [79] о разветвлении решений нелинейных систем уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y) = 0, i = 1, \ldots, n$$

где y – параметр, при условии, что $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$.

Отметим, что у интегральных уравнений оказалась «счастливая судьба», они с самого начала привлекли пристальное внимание в таком центре мировой математики, каким был тогда Гёттинген. И основополагающая работа Шмидта находилась в русле исследований самого Гильберта. Не последнее значение имело то, что Шмидт питался его идеями, следовал ценностям и традициям, культивируемым в гёттингенской школе.

6. Интегральные уравнения Урысона и Некрасова

Заметная веха в истории нелинейных интегральных уравнений связана с работами представителей московской школы – математика П. С. Урысона и механика А. И. Некрасова.

Ещё Пикаром широко использовалось сведение краевых задач

$$\begin{cases} y'' + f(x, y) = 0 \\ y(a) = A; y(b) = B \end{cases}$$

к нелинейным интегральным уравнениям вида

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, (y(s)) \, ds + \varphi(x).$$

При этом условия на функцию $f(x, y)$ были следующими [72, p. 129-138]: предполагалось, что

- $f(x, 0) = 0$;
- $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по *y;*
- $f'_y > 0$ и убывает при любом $y > 0$.

Урысону удалось изучить значительно более общее уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s)) ds + \varphi(x), \ \lambda > 0 \tag{37}$$

Здесь его интересовали более глубокие вопросы, чем те, которые решались Пикаром и его учениками Г. Брату, Т. Лалеску и др. [6, § 4]. Это были вопросы так называемой “*положительной разрешимости*[5]” уравнения (37) и его спектральных свойств. Используя в качестве основного инструмента метод последовательных приближений, Урысон доказал теорему о существовании положительных решений уравнения (37) в предположении, что $K(x, y, 0) = 0$ и что производная $K'_u(x, y, u)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает с возрастанием $u \, (u \geq 0)$. Он также показал, что *положительные собственные функции оператора* A_0, *порождённого интегральным выражением в правой части* (37), *существуют при условии, что значения* λ *принадлежат некоторому интервалу* $(\lambda_P; \lambda_Q)$, *где числа* λ_P и λ_Q *- это наибольшие собственные значения определённых линейных интегральных операторов* P *и* Q.

[5] Мотивацией рассмотрения положительных решений матричных и интегральных уравнений были, во многом, задачи алгебры малых колебаний упругих континуумов. Подробности и историю вопроса см. в [5].

Каждому $\mu \in (\mu_P, \mu_Q)$ *соответствует единственное положительное решение* $y(x, \mu)$ [97, с. 240].

Эта работа Урысона опередила своё время и не была оценена его современниками по достоинству. Лишь более, чем через 30 лет, после выхода сборника его трудов [97]-[98], результаты Урысона оказались широко востребованными и легли в основу теории нелинейных положительных операторов в банаховых пространствах с конусом (см. [5]). Они явились отправной точкой для развития ряда методов в теории нелинейных операторных уравнений в 1950-х годах [30]. Кроме того, эти результаты помогли решить ряд задач нелинейной механики, как, например, задачу потери устойчивости в некоторых системах [4].

Перейдём к работам А.И. Некрасова, специалиста по нелинейной механике и ученика Н.Е. Жуковского. Некрасов разработал нелинейную теорию волн на поверхности тяжёлой жидкости, посвятив этому шесть статей [60]-[61]; [63]-[66] (1921-1928).

В своей работе «О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга» (1921) [63], он обобщил результаты Т. Леви-Чивиты [32] и А. Вилля [13], придя к нелинейному интегральному уравнению урысоновского типа.

Следуя методу Вилля, Некрасов свёл задачу к отысканию двух сопряжённых тригонометрических рядов $g(\theta)$ и $h(\theta)$, между которыми имелось следующее соотношение

$$g^{'}(\theta) = -\frac{\pi\lambda}{2} e^{-h(\theta)} \sin\theta\,(1 - \sin\theta)\,, \tag{38}$$

где $\lambda > 0$ — некоторая постоянная [68, с. 55].

Это соотношение привело Некрасова к нелинейному интегральному уравнению[6]

$$h\,(\theta) = F(\theta) + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-h(\varepsilon)}\right] \frac{(1 + 2\sin\varepsilon - \cos 2\varepsilon)}{4} \ln\left|\frac{tg\frac{\varepsilon-\theta}{2}}{tg\frac{\varepsilon+\theta}{2}}\right| d\varepsilon, \tag{39}$$

где $F(\theta)$ – некоторая известная функция, $\theta \in (0, \pi)$ – полярный угол.

Решение уравнения (39) Некрасов представляет рядом по степеням λ, сходящимся при $\lambda < \lambda_0$ (при этом числу λ_0 соответствует дуга окружности, ограничивающей препятствие, равная 20°).

Решая плоские задачам теории волн [63]-[66], Некрасов также эксплуатировал идею, идущую от Вилля: область, занятая одной волной конформно отображается внутрь единичного круга так, что свободная поверхность жидкости соответствует границе этого круга. При этом опять возникают тригонометрические ряды $g(\theta)$ и $h(\theta)$ и соотношение между ними вида (38), что, в конечном итоге, даёт следующее уравнение

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\Phi\,(\varepsilon)}{1 + \mu\int_0^{\varepsilon}\sin\Phi\,(\alpha)\,d\alpha} K(\varepsilon, \theta) d\varepsilon, \tag{40}$$

где μ – параметр, $K\,(\varepsilon, \theta) = ln\left|\frac{1-\cos(\varepsilon-\theta)}{1-\cos(\varepsilon\,+\,\theta)}\right|$;
$\Phi(\theta)$ — угол наклона касательной к профилю волны установившегося вида [68, с. 225].

Для волн малой амплитуды ($\sin\Phi \approx \Phi$) уравнение (40) переходит в линейное интегральное уравнение вида

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon) ln\left|\frac{1\; - \;\cos(\varepsilon - \theta)}{1 - \cos(\varepsilon + \;\theta)}\right| d\varepsilon \tag{41}$$

Некрасов показал, что если параметр μ принадлежит промежутку $[0, \mu_1^*]$, где μ_1^* — первое собственное значение уравнения (41), то установившиеся волны отсутствуют. Математический

[6]Это, как видим, частный случай уравнения Урысона.

смысл этого результата состоит в том, что первое собственное значение линеаризованного интегрального уравнения является бифуркационным значением исходного (нелинейного) интегрального уравнения[7].

Для исследования уравнения (40) Некрасов разработал самостоятельную теорию [64]-[65], в которой рассматрел нелинейное интегральное уравнение вида[8]:

$$f(x) = \lambda \int_a^b f(y) K(x, y)\, dy + \varepsilon\lambda \int_a^b R[\lambda,\ y,\ f(y)]\ K(x,\ y) dy \tag{42}$$

здесь $K(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\cdot\varphi_n(y)}{\lambda_n}$, $\{\varphi_i(x)\}$ - некоторая система ортонормированных на отрезке $[a, b]$ функций; λ_i- собственные значения однородного уравнения Фредгольма, получающееся из (42) при подстановке $\varepsilon = 0$.

Разрешимость уравнения (42) была доказана Некрасовым на основе разложения искомой функции в ряд и использовании метода мажорант. Однако, в отличие от своих предшественников (Ляпунова и Шмидта) Некрасов решил исходное нелинейное интегральное уравнение *непосредственно* (не используя редукцию задачи к решению преобразованного функционального уравнения).

Поскольку основные результаты теории нелинейных интегральных уравнений Некрасова были опубликованы в малоизвестных журналах, они не получили широкой известности в то время ни в России, ни, тем более, за рубежом. Но они остались актуальными и 30 лет спустя; в 1951 году на эту тему была им опубликована монография [67], за которую Некрасов получил Сталинскую премию [82, с. 154].

7. Исследования Л. Лихтенштейна

К началу 1930-х гг. нелинейные интегральные уравнения обрели своё место в математике и в их исследованиях самое видное место занял метод последовательных приближений. Здесь можно заметить, что сам метод получил мощный стимул для своего развития в виде потребности решения нелинейных задач, но это уже тема для отдельного рассмотрения. В дальнейших исследованиях нелинейных интегральных уравнений заметное место принадлежит Л. Лихтенштейну, который рассматривал разные методы доказательства разрешимости уравнения Ляпунова — Шмидта «*в малом*» [49].

Он исходил из интегро-степенной формы, как функционала $\Phi(u) = \sum_{m+n\geq 2} U_{mn} \begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}$ и применил к доказательству сходимости последовательных приближений к решению уравнения (25) вариант метода *сжимающих отображений* (предложенный С. Банахом в 1922 г. в его диссертации [8]).

Полагая $\left| U_{mn} \begin{pmatrix} x \\ 1, 1 \end{pmatrix} \right| = B_{mn}$ и рассматривая степенной ряд относительно положительных η и ζ, как функцию двух переменных

$$F(\eta, \zeta) = \sum_{m+n\geq 2} B_{mn} \eta^m \zeta^n, \tag{43}$$

Лихтенштейн заметил, что при достаточно малых $d, d_1 (\eta \leq d; \zeta \leq d_1$ ряд (43) сходится. Тогда при $|u(x)| \leq \eta$, $|v(x)| \leq \zeta$ получится

[7]Эта тема получила развитие в последующем в работах многих математиков (см„ например, [11]).

[8]Специальный случай уравнения, введённого через 8 лет после Некрасова и носящего сейчас название “*уравнение Гаммерштейна*” (см. ниже, § 7).

$$\sum_{m+n\geq 2}\left|U_{mn}\begin{pmatrix}x\\u,v\end{pmatrix}\right|\leq F(\eta,\zeta). \tag{44}$$

Относительно функции $F(\eta,\zeta)$ предполагается её непрерывная дифференцируемость до 2-го порядка включительно, а также выполнение условий:

$$F(0,0)=F'_\eta(0,0)=F'_\zeta(0,0)=0.$$

Это является важным шагом, поскольку данные условия представляются менее ограничительными по сравнению с условиями Шмидта – равномерная сходимость левой части уравнения (44) *не обязательна.*

Опираясь на формулу Тейлора Лихтенштейн получил оценку $|\Phi(u_1)-\Phi(u_2)|$ при малых η,ζ [49, с. 14]:

$$max|\Phi\left(u_1\right)-\Phi\left(u_2\right)|\leq l(\eta+\ \zeta)\max|u_2\left(x\right)-u_1\left(x\right)|, l=Const.$$

Последнее неравенство даёт возможность применить к решению уравнения (23) метод сжимающих отображений при условии, что $|v(x)|\leq\eta\leq d_1<1$.

Поиск решения был осуществлён методом последовательных приближений по правилу

$$u_k\left(x\right)=U_0\left(x,v\right)-\sum_{m+n\geq 2}U_{mn}\begin{pmatrix}x\\u_{k-1},v\end{pmatrix}, k=2,3,4,\dots.$$

где $u_1\left(x\right)=U_0\left(x,v\right)$.

Когда единица не является собственным значением оператора A, малое решение $u(x)$ уравнения (23) будет единственным; оно разлагается в интегро-степенной ряд вида (31) и стремится к нулю при $v\to 0$.

В случае, когда единица является собственным значением оператора A, Лихтенштейн полагал $v\left(x\right)=\lambda V(x)$, и показал, что при достаточно малых $|\lambda|\,,\ |\xi|$ найдётся такое число $\omega>0$, что при $|u(x)|\leq\omega$ правая часть уравнения (34) удовлетворяет условиям теоремы Банаха о сжимающих отображениях. Тогда это уравнение имеет единственное (непрерывное) решение, которое также может быть найдено методом последовательных приближений. Опираясь далее на некоторые идеи Ляпунова, Лихтенштейн продемонстрировал, что здесь число малых непрерывных решений уравнения (23) (стремящихся к нулю при $v\to 0$), совпадает с числом малых решений уравнения разветвления.

В работе Лихтенштейна наметился поворот к новому подходу – использовании методов формирующегося функционального анализа, который в скором времени станет одной из основ всей нелинейной проблематики.

8. Исследования А. Гаммерштейна, М. Голомба и Н. Н. Назарова

Задачу Дирихле для полулинейных дифференциальных уравнений вида

$$L(y)=f(x,y),\ y(a)=y_0;\ y(b)=y_1, \tag{45}$$

где L — линейный симметричный дифференциальный оператор 2-го порядка, можно свести (см. [83, § 2]) к нелинейному интегральному уравнению вида:

$$y(x)=\int_a^b K(x,s)f(s,(y(x))ds. \tag{46}$$

Важный вклад в их изучение внёс А. Гаммерштейн, ученик Э. Ландау (уравнение (46) вошло в обиход математиков, *как уравнение Гаммерштейна.*). Гаммерштейн использовал нетрадиционный подход к доказательству их разрешимости, основанный на вариационной трактовке уравнения (46). Данный подход заключался в замене исходной задачи на эквивалентную задачу минимизации функционала $H(y)$, построенного по правой части (46), в подходящем функциональном пространстве E (этот метод был впервые применён к решению нелинейных краевых задач вида (45) Л. Лихтенштейном (1915) [47]). При этом, как показал В. Ритц (1909) [81], более удобно бывает сначала решать задачу минимизации H на конечномерном подпространстве E, натянутом на n собственных функций линеаризованной задачи, а затем переходить к пределу по $n \to \infty$.

Гаммерштейн продемонстрировал, что для уравнения (46) конечномерный вариант минимизации выглядел так

$$H_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j c_j^2 - \int_a^b F(x, \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x))dx \to min,$$

где $F(x,y) = \int_0^y f(x,v)dv$;

$\{\varphi_i(x)\}$ — ортогональная система собственных функций, соответствующих собственным значениям λ_i линейной задачи:

$$y\,(x) = \lambda \int_a^b K\,(x,s)\,y(s)ds, \tag{47}$$

причём $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$.

Вводя ограничения на рост $F(x,y)$ по переменной y [18, с. 131], Гаммерштейн показал, что функционал H_n ограничен снизу, поэтому он достигает минимального значения при некотором наборе

$$C^{(n)} = (c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}) \in \mathbb{R}^n.$$

Этот набор порождает последовательность функций $\{y_n(x)\}$, члены которой определяются по следующей формуле

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)}\varphi_i(x) \tag{48}$$

При этом y_n сходится равномерно на $[a,b]$ к решению y уравнения (46).

При исследования ветвления решений уравнения (46) Гаммерштейн, опираясь на теорему Гильберта-Шмидта (о представлении элементов гильбертова пространства в виде ряда по собственным функциям интегрального оператора), пришёл к системе с бесконечным числом неизвестных:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f\left(x, \sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j(x)\right)\varphi_m\,(x)dx \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Гаммерштейн показал, что система (49) имеет, по крайней мере, одно решение, если функция $f(s,y)$ непрерывна по обеим переменным и удовлетворяет определённым ограничениям на рост [21]. Кроме того, он сформулировал и доказал ряд условий на функцию $f(s,y)$, при которых уравнение (46) имеет *единственное* решение. Одним из таких условий является, к примеру, условие монотонного неубывания функции $f(x,y)$ по y $\forall\ x \in [a,b]\,,\ y \in \mathbb{R}$.

Случай, когда решение (46) не обладает единственностью, а функция $f(x,y)$ представима в виде сходящегося при $x \in [a,b]$ ряда:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x)\,y^n,$$

Гаммерштейн рассмотрел более подробно.

Считая, что при $\lambda=\lambda_0$ уравнение

$$y(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\,f(s,(y(x))\,ds=0 \qquad (50)$$

имеет решение $u_0(x)$, такое, что λ_0 является простым собственным значением линеаризованного уравнения

$$\varphi(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,y)\,f_u(u_0(y),y)\,\varphi(y)\,dy=0$$

он подставил в уравнение (50) $\lambda=\lambda_0+\mu$; $u=u_0+v$. Получилось следующее

$$\begin{gathered}v(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,y)\,f_u(u_0(y),y)\,v(y)\,dy+\\ +\mu\int_a^b K(x,y)\,[f(u_0(y),y)+v(y)]dy+\\ +(\lambda_0+\mu)\int_a^b K(x,y)\left[\frac{v^2(y)}{2!}f_{uu}(u_0(y),y)+\frac{v^3(y)}{3!}f_{uuu}(u_0(y),y)+\ldots\right]dy=0 \qquad (51)\end{gathered}$$

Этому уравнению соответствовало уравнение разветвления вида

$$\sum_{m=2}^{\infty}L_m\xi^m+\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k A_{mk}=0, \qquad (52)$$

где L_m, A_{mk} – постоянные. На основе уравнения (52) Гаммерштейн дал ответ на вопрос о числе малых решений уравнения (51) [18, с. 165].

Кроме того, Гаммерштейн исследовал задачу о числе вещественных решений уравнения (51), стремящихся к нулю при $\mu\to 0$ для ряда отдельных случаев. В частности, когда номер n первого отличного от нуля коэффициента L_m в (52) – чётный и $sign\ (L_nA_{01})=-1$, то при $\lambda>\lambda_0$ появляются два новых вещественных решения (51), которые непрерывно ответвляются от $u_0(x)$. Если же $sign\ (L_nA_{01})=+1$, то при $\lambda<\lambda_0$ имеется два вещественных решения, которые сливаются в $u_0(x)$ в точке λ_0. Разобраны также и другие случаи [18, с. 166-168].

Продолжая исследования Гаммерштейна, один из его учеников – М. Голомб – доказал значимую, с методологической точки зрения, теорему (1935) [19, § 5]:

Пусть $K(x,y)$ – непрерывное, симметричное, положительно определённое в области $0\le x,y\le 1$ ядро, а функция $f(y,u)$ непрерывна по $y\in(0,1)$ и для конечных значений u, причём $f(y,0)=0$.

Тогда уравнение

$$u(x)=\int_a^b K(x,y)f(y,u(y))\,dy \qquad (53)$$

имеет, по крайней мере, одно вещественное собственное значение λ_0, которому соответствует нетривиальное решение $u_0(x)$.

Из теоремы Голомба следует, что *при некоторых естественных предположениях о ядре нелинейных интегральных уравнений вида (46) неотъемлемым свойством их решений будет* *способность ветвиться при достижении параметра λ порогового (бифуркационного) значения.*

Некоторые важные задачи математической физики (задачи нелинейной теплопроводности [49, Гл. II, §2]; описание движения реальных сжимаемых жидкостей [33]) сводятся к уравнениям более общим, чем уравнение Гаммерштейна:

$$u(x)=\int_a^b H(x,y,u(y))dy \tag{54}$$

Такие уравнения (уравнения Урысона) стали предметом исследований Н. Н. Назарова, ученика В.А. Стеклова. Назаров рассматривал нелинейные задачи на собственные значения для уравнений (53) и (54) в пространстве непрерывных функций (1941) [38], предполагая, как и Гаммерштейн, что они разрешимы при некотором $\lambda=\lambda_0$, которому соответствует собственная функция $u(x)=u_0(x)$ и что в окрестности этого решения справедливо разложение

$$H\left(x,y,u_0\left(x\right)+v\right)=\sum_{k=0}^{\infty}H_k\left(x,y\right)v^k, \tag{55}$$

где ряд (55) сходится при $|v|\le r$.

Аналогичное предположение делалось и для $H(x,y,u)\equiv K(x,y)f(y,u(y))$.

При сделанных ограничениях Назаров свёл уравнение (54) к уравнению

$$v\left(x\right)-\lambda_0\int_a^b H_1\left(x,y\right)v(y))\,dy= \\ =\int_a^b\left[\mu\left(H_0+H_1v\right)+\left(\mu+\lambda_0\right)\left(H_2v^2+H_3v^3+\ldots\right)\right]dy$$

и представил его малые решения в виде рядов по целым или дробным степеням параметра μ. Коэффициенты этих рядов были определены рекуррентно из бесконечной системы уравнений, а их сходимость установлена путём построения мажорант [58, Гл. II §1-2].

Одной из важных задач в исследовании уравнения (54) является задача о продолжении близкого к нулю решения, полученного для малых значений параметра λ, на всю плоскость переменной λ. Здесь Назаров изучил следующие случаи [59, § 3]:

1. λ_0 не является собственным значением ядра $H_1(x,y)=\frac{\partial H(x,y,u_0(y))}{\partial u_0(y)}$. В этом случае решение уравнения (54) продолжается по параметру λ однозначно.
2. λ_0 — собственное значение ядра $H_1(x,y)$ кратности 1. Назаров показал, что здесь возможны 3 случая:
   а. вещественное продолжение решения $u_0(x)$ по параметру λ *невозможно*;
   б. вещественное продолжение решения $u_0(x)$ по параметру λ *возможно, единственно* и представляется в виде ряда по целым или дробным степеням параметра μ;
   в. вещественное продолжение решения $u_0(x)$ по параметру λ *возможно, но неединственно.* Каждое продолжение представляется в виде ряда по целым или дробным степеням параметра μ.

Результаты Назарова позволили судить о существовании решения уравнений вида (53), (54) в окрестности параметра λ_0 – точки разрешимости этих уравнений. Впоследствии оказалось, что эти результаты можно распространить на операторные уравнения

$$u = \lambda F(u),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $F : X \to X$ – аналитический оператор; X – комплексное банахово пространство [3].

Работой Назарова завершается первый этап развития нелинейных интегральных уравнений, когда доказываемые теоремы существования и ветвления решений носили *локальный* характер. Для описания *всей совокупности* решений требовалась другая идеология.

9. Заключение

Рубеж XIX-XX вв. является весьма примечательным в истории математики. Начавшаяся в XIX в. реформа математического анализа культивировала идеологическую атмосферу с другими канонами математической строгости и необходимости установления границ и обоснования истинности каждого утверждения. Такая атмосфера способствовала формированию базисных областей - теории множеств и теории функций действительного переменного, которые легли в основу грандиозного здания современной математики. Глубокое обобщение и синтез алгебры, анализа и геометрии привели к созданию двух главных ветвей современной математики - топологии и функционального анализа. Всё это явилось необходимым условием для исследования нелинейных операторных уравнений, частным случаем которых являются нелинейные интегральные уравнения.

Создание теории интегральных уравнений, как отдельной области математики, пришлось на то время, когда ещё только складывались новые взгляды на решение уравнений (и не только интегральных) и формировался новый инструментарий. Поэтому на начальном этапе подход к интегральным уравнениям во многом оставался традиционным: уравнение - решение, точное или приближённое, аналитическое или численное. Разделение начального и последующего этапов следует понимать в логическом отношении, а не в хронологическом, да и то, больше как тенденцию. Мы отчётливо видим, как с самого начала нелинейные интегральные уравнения предстали во всей сложности в проблеме фигур равновесия вращающихся жидкостей. Это был практически совершенно новый объект исследования, для изучения которого пришлось во многом использовать те методы, которые имелись в наличии. Одновременно складывались новые представления и новые подходы. Только при ретроспективном взгляде всё это может выглядеть чем-то последовательным. Как всегда бывает в действительности, новые идеи переплелись со старыми представлениями, бывали и отступления, тупиковые ситуации, медленное продвижение вперёд. Всё это имело место в истории нелинейных интегральных уравнений. С самого начала главным выяснившимся отличием от привычной линейной ситуации явилась неединственность решения. Стало ясно позднее, приставка *не*, как в случае с понятием *нелинейного уравнения*, является не просто отрицанием, а имеет глубокий конструктивный смысл. Особое значение приобрели теоремы существования и единственности. Усиление интереса к этому вопросу связано с ещё одним источником: с проблемой турбулентности, являющейся одной из самых острых нерешённых задач, доставшихся в наследство XXI веку. Так Ж. Лере был поставлен вопрос: если в начальный момент времени $t = t_0$ имеется регулярное решение уравнений Навье-Стокса, то будет ли сохраняться регулярность решений на всём временном интервале? Лере предполагал, что в трёхмерном случае достижению турбулентного режима отвечает разрушение решений, и время существования регулярных решений конечно [33]-[35]. Все эти вопросы до настоящего времени остаются без ответа.

Ещё предстояло понять, что в исследовании нелинейных интегральных уравнений основное место займут *качественные* методы, необходимые инструменты придут из функционального анализа и топологии, а сама теория интегральных уравнений существенно обогатит эти области математики. Оказалось, что качественное поведение решений во многом выявит все существенные особенности решений, что нелинейные операторные уравнения различных типов имеют много общего. Требовалось время для осознания кажущегося простым, но в действительности нетривиального шага - перехода от интегрального уравнения к общему операторному уравнению, что давало возможность привести в действие мощные методы новых областей математики. Но это уже является следующим этапом истории нелинейных интегральных уравнений и предметом отдельного исследования.

Авторы выражают признательность В.П. Богатовой за помощь в переводе первоисточников с немецкого языка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N.H. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // Magazin Naturvidensk, Vol. 1 (1823), pp. 55–68.

2. Archibald T. From attraction theory to existence proofs: the evolution of potential-theoretic methods in the study of boundary-value problems, 1860-1890 // Revue d'histoire des mathématiques. 1996. – Vol. 2. – Iss. 1. – pp. 67-93.

3. Ахмедов К. Т. Аналитический метод Некрасова–Назарова в нелинейном анализе // Успехи математических наук, Том 12:4(76) (1957), С. 135–153.

4. Бахтин И.А., Красносельский М.А. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жёсткости // Доклады АН СССР, Том 105, № 4 (1955). С. 621-624

5. Богатов Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского // Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика, Физика, 2020. Т. 52, № 2, С. 105-127.

6. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Из истории нелинейных интегральных уравнений *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2016. Т. 24. № 2, С. 77-114.

7. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. О ранней истории нелинейных интегральных уравнений / Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII междунар. конф., (23-26 сентября 2020). - Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2020. с. 321-325.

8. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals // Fundamenta Mathematicae, 3 (1922), p. 133—181.

9. Bateman, H. Report on the history and present state of the theory of integral equations // British Association for the Advancement of Science, Vol. 80 (1910), pp. 345-424.

10. Bôcher M. An introduction to the study of integral equations. Cambridge, the University Press 1909. 78 p.

11. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие // Успехи математических наук, Том 17:2(104) (1962), С. 13–75.

12. Weyl H. David Hilbert and his mathematical work // Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 50 (1944), Iss. 9, pp. 612-654.

13. Villat H. Sur la résistance des fluides // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. – 1911. – V. 28. – p. 203-311.

14. Volterra, V. Sulla inversione degli integrali definiti // Tip. della R. Accademia dei Lincei, 1896. Vol. 5, pp. 177-185.

15. Volterra, V. Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti // Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 25, (1897), pp. 139-178.

16. Volterra, V. Sopra un problema di elettrostatica // Nuovo Cimento, Vol. XVI (1884), pp. 49-57.

17. Volterra V. Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles. Gauthier Villars, Paris, 1913. 180 p.

18. Hammerstein A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta mathematica. Vol. 54 (1930), pp. 117–176.

19. Hilbert D. Grundziige einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgieichimgen. – Leipzig, Berlin: B. G. Teubner, 1912. 320 p.

20. Golomb, M. Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen // Mathematische Zeitschrift, Vol. 39 (1935). pp. 45-75.

21. Golomb, M. Review of the article "*Hammerstein, A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen". Jahrbuch Database URL: `http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165\&type=pdf` (дата обращения 19.10.2020)

22. Golubitsky M., Schaeffer D. G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. I. Springer, New York (1985). 475 p.

23. Dieudonné J. History of functional analysis / North-Holland publishing company. Amsterdam - 1981. - 316 p.

24. Du Bois-Reymond, P. Bemerkungen über $\Delta z = 0$ // Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 103 (1888), S. 204-229.

25. Идельсон Н.И. Комментарии к книге А. Клеро «Теория фигуры Земли» в кн. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1947. С. 260-355.

26. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures: a brief historical account from the 17th through the 20th century// arXive: 1409.1823 (2014).

27. Clairaut A. C. Théorie de la figure de la terre: tirée des principes de l'hydrostatique. – chez David Fils, libraire, 1743. – Vol. 668, 305 p.

28. Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1947. 364 с.

29. Koch, H. von. Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées // Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. 27 (1899): p. 215-227.

30. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962, 394 с.

31. Laplace, P. Traité de mécanique céleste, Livre III. Paris : Duprat, 1802. 382 p.

32. Levi-Civita T. Sulla resistenza d'attrito // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 23 (1907), p. 1-37.

33. Leray, J. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 12 (1933): pp.1-82.

34. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta mathematica. 1934. – Vol. 63. – pp. 193-248.

35. Leray, J. Essai sur les mouvements plans d'un fluide visqueux que limitent des parois // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 13 (1934): pp. 331-418.

36. Ляпунов А.М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости (Магистерская диссертация). СПб, Типография Академии наук, 1884, XV+109 с.

37. Liapunoff A.M. Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 8-me Série. 1903. Vol. 14, no. 7, pp. 1-37.

38. Liapounoff A.M. Sur la stabilite des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide anime d'un mouvement de rotation // The Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2 ser., Vol. 6 (1904), pp. 5-116.

39. Liapounoff A. Sur un probléme de Tchebycheff // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg, Vol. 17 (8^{me} Serie), no. 3 (1905). pp. 1-31

40. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude generale du probleme // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1906. IV+225 p.

41. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figures d'equilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1909. IV+203 p.

42. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1912. IV+228 p.

43. Liapunoff, A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide, homogène, douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre // St.-Psb. Imprim. de l'Acad. des Sc., 1914. IV+112 p.

44. Liapounoff A. Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides d'un liquide homogène en rotation // Извeстія Императорской Академіи Наукъ. VI серія, 10:3 (1916), pp. 139–168.

45. Liapounoff A. Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d'un liquide homogène. Première partie // Извeстія Императорской Академіи Наукъ. VI серія, 10:7 (1916), pp. 471–502.

46. Liapounoff A. Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d'un liquide homogène. Seconde partie // Извeстія Императорской Академіи Наукъ. VI серія, 10:8 (1916), pp. 589–620.

47. Lichtenstein, L. Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung // Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 145 (1915), pp. 24–85.

48. Lichtenstein, L. Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze an-ziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze // Mathematische Zeitschrift 1 (1918): p. 229-284

49. Lichtenstein, L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen / Julius Springer, Berlin, 1931. 164 p.

50. Lichtenstein L. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Springer, Berlin 1933, 201 p.

51. Liouville J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, 1837. – Vol. 2. – pp. 16-35.

52. Liouville, J. Sur le theoreme de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, Notes IV de J. Liouville a ouvrage Applications de Analyse a la Geometrie par G. Monge, Paris, Bachelier Ed., 1850. pp. 583-600.

53. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости / Перевод с нем. Под ред. Г. Н. Дубошина. М.: Наука, 1965. 252 с.

54. Lützen J. Integral equations / Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, 2 vols. ed. Grattan-Guinness I. Baltimore : Johns Hopkins University Press, 2003. p. 385-394.

55. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Т. III. М.-Л. Изд-во АН СССР, 1959 г. 376 с.

56. Murphy, R. On the inverse method of definite integrals, with physical applications // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 4 (1833), pp. 353–408.

57. Мухин Р.Р. Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950--1980-е годы. Изд. 2-е, стереотип. М.: Изд-во URSS. 2018. 320 с.

58. Назаров Н.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. - Труды Среднеазиатского государственного университета. Серия V-а, Математика. Вып. 33., Ташкент, 1941. с. 1-79.

59. Назаров Н.Н. Методы решения нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Труды Среднеазиатского государственного университета. Серия 6, физико-математические науки. Ташкент, 1945. С. 3-14.

60. Некрасов, А. И. О волне Стокса // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института, Вып. 2 (1919), с. 81-89.

61. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института, Вып. 3 (1921), с. 52-65.

62. Некрасов, А. И. О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга // Известия Иваново- Вознесенского политехнического института, Вып 5. (1922), с. 3-19.

63. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости // Научные известия Академического центра НКП, сб. 3 (1922), Физика, с. 128-138.

64. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида, гл.2. О нелинейных интегральных уравнениях // Известия Иваново- Вознесенского политехнического института, Вып. 6 (1922), с. 155-171.

65. Некрасов, А. И. О нелинейных интегральных уравнениях с постоянными пределами // Известия Физического института и института биологической физики, Вып. 2 (1922), с. 221-238.

66. Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости (конечной глубины) // Тр. Всеросс. математ. съезда 1927 г. в Москве. М.-Л., 1928. с. 258-262.

67. Некрасов, А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости / М. : Изд-во АН СССР, 1951. – 96 с.

68. Некрасов, А. И. Собрание сочинений, Т. 1. Отв. ред. Я.И. Секерж-Зенькович. М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 444 с.

69. Neumann C. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung:...= 0 // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1861. – Vol. 59. – pp. 335-366.

70. Neumann C. Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential // Mathematische Annalen, Vol. 13 (1878), pp. 255–300.

71. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, 1890. – Vol. 6. – pp. 145-210.

72. Picard E. Traité d'Analyse, t. III. Gauthier-Villars. Paris, 1896. 568 p.

73. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // *Acta mathematica*, Vol. 7 (1885), *no. 1*, pp. 259-380.

74. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation // Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 106 (1888), pp. 1571-1574.

75. Poincaré H. La méthode de Neumann et le probleme de Dirichlet //Acta mathematica, 1897. – Vol. 20. – pp. 59-142.

76. Poincaré H. Figures d'équilibre d'une masse fluide: leçons professées à la Sorbonne en 1900. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 211 p.

77. Пуанкаре А. Фуксовы функции и уравнение $\Delta u = e^u$. В кн. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах.Т. III. Математика. М.: Наука 1974. с. 235-309.

78. Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 208 с.

79. Puiseux, V. Recherches sur les fonctions algébriques // Journal of Mathématiques Pures et Appliquées, 1re série, t. 15, (1850): pp. 365-480.

80. Radau, R.R. Remarques sur la théorie de la figure de la Terre // Bulletin astronomique, t. II (1885), pp. 157-161.

81. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 135 (1909), pp. 1–61.

82. Секерж-Зенькович, Я. И. Александр Иванович Некрасов (к семидесятипятилетию со дня рождения), Успехи математических наук, Том 15:1(91) (1960), С. 153–162.

83. Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.-М.: Объединённое научно-техническое издательство, 1936. 124 с.

84. Смирнов В.И. Очерки научных трудов Ляпунова / Ляпунов А.М. Избранные труды. Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. С.341-450.

85. Смирнов В. И., Юшкевич А. П. Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом // Историко-математические исследования, М., 1985. – Т. 29. – С. 265-284.

86. Todhunter I. A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth: From the Time of Newton to that of Laplace. In 2 Volumes. Vol. II. London, Macmillan, 1873. 508p.

87. Fourier J. B. J. Théorie analytique de la chaleur. Paris, F. Didot, 1822. 639 p.

88. Fredholm, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta mathematica, Vol. 27 (1903), pp. 365—390.

89. Fredholm I. Les équations intégrales linéaires // CR Congrés des Math. tenua Stockholm 1909. – 1909. pp. 92-100.

90. Хведелидзе Б.В. Уравнения Ляпунова-Шмидта / Математическая энциклопедия в пяти томах. Ред. И.М. Виноградов. Т.3. М., 1982. С. 473-474.

91. Hellinger E. und Toeplitz O. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort von E. Hilb. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1928. S. 1335- 1616.

92. Schmidt, E.. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener // Mathematische Annalen, Vol. 63 (1907), pp. 433–476.

93. Schmidt, E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Mathematische Annalen, Vol. 64 (1907), pp. 161-174.

94. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Mathematische Annalen – 1908. – Vol. 65, pp. 370-399.

95. Schwarz H.A. Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung (Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass) // Acta societatis scientiarum Fennicae, 15 (1885). pp. 315–362

96. Урысон П. С., Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Математический сборник, 31:2 (1923), С. 236–255.

97. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. Прим. и ступит. статья П.С. Александрова, т. 1, М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 514 с.

98. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. Прим. и ступит. статья П.С. Александрова, т. 2, М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 480 с.

REFERENCES

1. Abel, N.H. 1823, "Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies", *Magazin Naturvidensk.,* vol. 1, pp. 55–68. Abel, N.H. 1823, "Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies", Magazin Naturvidensk., vol. 1, pp. 55–68.

2. Archibald, T. 1996, "From attraction theory to existence proofs: the evolution of potential-theoretic methods in the study of boundary-value problems, 1860-1890", *Revue d'histoire des math.*, vol. 2, no. 1, pp. 67-93.

3. Akhmedov, K. T. 1957, "The analytic method of Nekrasov–Nazarov in non-linear analysis", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 12:4, no.76, pp. 135–153.

4. Bakhtin, I.A., Krasnosel'skii M. A. 1955, "On the problem of longitudinal bending of a rod of variable stiffness", Moscow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 105 (4), pp. 621-624.

5. Bogatov, E.M. 2020, "On the history of the positive (1900s-1960s) and the contribution of M.A. Krasnosel'skii", *Scientific bulletin of BelSU. Ser. Appl. Mat., Phys.,* vol. 52, no. 2, pp. 105-127.

6. Bogatov, E.M., Mukhin, R.R. 2016, " About the history of nonlinear integral equations", *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, Vol. 24 (2), pp. 77-114.

7. Bogatov, E.M., Mukhin, R.R., 2020, "On the early history of nonlinear integral equations", Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. *Materials XVII Int. conf., Tula, TGPU im. L.N. Tolstogo,* pp. 321-325.

8. Banach, S. 1922, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals", *Fund. Math.* Vol. 3, pp. 133—181.

9. Bateman, H. 1910, "Report on the history and present state of the theory of integral equations", *British Ass. for the Adv. of Sci.,* Vol. 80, pp. 345-424.

10. Bôcher, M. 1909, *An introduction to the study of integral equations,* The University Press, Cambridge, 78 p.

11. Vainberg, M. M., Trenogin, V. A. 1962, "The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of non-linear equations and their further development", *Russian Math. Surveys*, Vol. 17:2, pp. 1–60.

12. Weyl, H. 1944, "David Hilbert and his mathematical work", *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 50, Iss. 9, pp. 612-654.

13. Villat, H. 1911, "Sur la résistance des fluides", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér*, Vol. 28, pp. 203-311.

14. Volterra, V. 1896, "Sulla inversione degli integrali definiti", *Tip. della R. Accademia dei Lincei*, Vol. 5, pp. 177-185.

15. Volterra, V. 1897, "Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti", *Ann. Mat. Pura Appl.* Vol. 25, pp. 139-178.

16. Volterra, V. 1884, "Sopra un problema di elettrostatica", *Nuovo Cimento*, Vol. XVI, pp. 49-57.

17. Volterra, V. 1913, *Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles.* Gauthier Villars, Paris, 180 p.

18. Hammerstein, A. 1930, “Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen”, *Acta math.,* Vol. 54, pp. 117–176.

19. Hilbert, D. 1912, *Grundziige einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgieichimgen*, B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 320 p.

20. Golomb, M. 1935, “ Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungs-systeme und allgemeinen Funktionalgleichungen”, *Math. Zeitschrift*, Vol. 39, pp. 45-75.

21. Golomb, M. (1934) Review of the article “*Hammerstein, A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen“. Jahrbuch Database Available at: `http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch/?id=66165\&type=pdf` (accessed 19 October 2020)

22. Golubitsky, M., Schaeffer, D. G. 1985, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. I.* Springer, New York, 475 p.

23. Dieudonné J.1981, *History of functional analysis*, North-Holland publishing company, Amsterdam, 316 p.

24. Du Bois-Reymond, P.1888, “ Bemerkungen über $\Delta z = 0$”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 103, pp. 204-229.

25. Idelson, N.I. 1947, “Comments to the book by A. Clairaut "Theory of the Earth’s Figure“”, in Teorija figury Zemli, osnovannaja na nachalah gidrostatiki [The theory of the figure of the Earth, based on the principles of hydrostatics], Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, pp. 260-355.

26. Iurato, G. 2014, “The dawning of the theory of equilibrium figures: a brief historical account from the 17th through the 20th century”, *History and Philosophy of Physics*, Available at *https://arxiv.org/abs/1409.3858v2.*

27. Clairaut, A. C. 1743, *Théorie de la figure de la terre: tirée des principes de l’hydrostatique*, chez David Fils, libraire, Vol. 668, 305 p.

28. Clairaut, A. 1947, *Teorija figury Zemli, osnovannaja na nachalah gidrostatiki* [The theory of the figure of the Earth, based on the principles of hydrostatics], Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, 364 p.

29. Koch, H. von. 1899, “Sur les fonctions implicites définies par une infinité d’équations simultanées”, *Bull. Soc. Math. Fr.,* Vol. 27, pp. 215-227.

30. Krasnosel’skii, M. A. 1964, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen, 381 p.

31. Laplace, P. 1802, *Traité de mécanique céleste*, *Livre III.* Duprat, Paris, 382 p.

32. Levi-Civita, T. 1907, “Sulla resistenza d’attrito”, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, Vol. 23 (1), pp. 1-37.

33. Leray, J. 1933, “Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’Hydrodynamique”, *J. Math. Pures Appl*, Vol. 12, pp.1-82.

34. Leray J. 1934, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, *Acta math.*, Vol. 63, pp. 193-248.

35. Leray, J. 1934, “Essai sur les mouvements plans d’un fluide visqueux que limitent des parois”, *J. Math. Pures Appl*, Vol. 13, pp. 331-418.

36. Liapunoff, A.M. 1884, *Ob ustojchivosti jellipsoidal’nyh form ravnovesija vrashhajushhejsja zhidkosti* [On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating fluid] (Master’s thesis). Printing house of the Academy of Sciences, St. Petersburg, XV+109 p.

37. Liapunoff, A.M. 1903, “Recherches dans la théorie de la figures des corps célestes”, *Memoires de l’Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg.* 8-me Série, Vol. 14, no. 7, pp. 1-37.

38. Liapounoff, A.M. 1904, “Sur la stabilite des figures ellipsoidales d’équilibre d’un liquide anime d’un mouvement de rotation”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.,* 2 ser., Vol. 6, pp. 5-116.

39. Liapounoff, A. 1905, “Sur un probléme de Tchebycheff”, *Memoires de l’Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg*, Vol. 17 (8^{me} Serie), no. 3, pp. 1-31.

40. Liapunoff, A.M. 1906, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. I partie. Etude generale du probleme”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.*, IV+225 p.

41. Liapunoff, A.M. 1909. “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. II partie. Figures d’equilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.,* IV+203 p.

42. Liapunoff, A.M. 1912, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. III partie. Figures d’équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.,* IV+228 p.

43. Liapunoff, A.M. 1914, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoides d’une masse liquide, homogène, douée d’un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d’équilibre”, *St.-Psb. Imprim. de l’Acad. des Sc.,* IV+112 p.

44. Liapounoff, A. 1916, “Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d’équilibre dérivées des ellipsoides d’un liquide homogène en rotation”, *Izvestija Imperatorskoj Akademii Nauk*, VI ser., Vol. 10:3, pp. 139–168.

45. Liapounoff, A. 1916, “Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d’équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d’un liquide homogène. Première partie”, *Izvestija Imperatorskoj Akademii Nauk*, VI ser., Vol. 10:7, pp. 471–502.

46. Liapounoff, A. 1916, “Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d’équilibre dérivées des ellipsoides dans le cas d’un liquide homogène. Seconde partie”, *Izvestija Imperatorskoj Akademii Nauk*, VI ser., Vol. 10:8, pp. 589–620.

47. Lichtenstein, L. 1915, “Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung”, *J. Reine Angew. Math.,* Vol. 145, pp. 24–85.

48. Lichtenstein, L. 1918, “Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze an-ziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze”, *Math. Zeitschrift*, Vol. 1, pp. 229-284.

49. Lichtenstein, L. 1931, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen*, Julius Springer, Berlin, 164 p.

50. Lichtenstein, L. 1933, *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.* Springer, Berlin 1933, 201 p.

51. Liouville, J. 1837, "Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable ", *J. Math. Pures Appl.*, Vol. 2, pp. 16-35.

52. Liouville, J. 1850, "Sur le theoreme de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, Notes IV de J. Liouville a ouvrage Applications de Analyse a la Geometrie par G. Monge", Bachelier Ed., Paris, pp. 583-600.

53. Lichtenstein, L. 1965, *Figury ravnovesija vrashhajushhejsja zhidkosti* [Equilibrium figures of a rotating fluid] Translated from German. Ed. G. N. Duboshin. Nauka, Moscow, 252 p.

54. Lützen, J. 2003, "Integral equations", Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, ed. Grattan-Guinness I., Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp. 385-394.

55. Lyapunov, A.M. 1959, *Collected Works.* Vol. III. Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 376 p.

56. Murphy, R. 1833, "On the inverse method of definite integrals, with physical applications", *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 4, pp. 353–408.

57. Mukhin, R.R. 2018, *Ocherki po istorii dinamicheskogo haosa: Issledovanija v SSSR v 1950--1980-e gody* [Essays on the History of Dynamic Chaos: Research in the USSR in the 1950s-1980s. 2nd edition, stereotyped, URSS, Moscow, 320 p.

58. Nazarov, N.N. 1941, "Nonlinear integral equations of Hammerstein's type", *Acta Universitatis Asiae Mediae*, ser. V-a, Mathematicae, Fasciculus 33, pp. 1-79.

59. Nazarov, N.N. 1945, "Metody reshenija nelinejnyh integral'nyh uravnenij tipa Gammershtejna" [Methods for solving nonlinear integral equations of Hammerstein type], *Acta Universitatis Asiae Mediae,* new ser., Fasciculus 6, pp. 3-14.

60. Nekrasov, A.I. 1919, "O volne Stoksa" [About Stokes wave], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 2, pp. 81-89.

61. Nekrasov, A.I. 1921, "O volnah ustanovivshegosja vida" [About steady-state waves], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 3, pp. 52-65.

62. Nekrasov, A.I., 1922, "O preryvnom techenii zhidkosti v dvuh izmerenijah vokrug prepjatstvija v forme dugi kruga" [Discontinuous flow of fluid in two dimensions around an obstacle in the form of an arc of a circle], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 5, pp. 3-19.

63. Nekrasov, A.I. 1922, "O volnah ustanovivshegosja vida na poverhnosti tjazhjoloj zhidkosti" [On steady-state waves on the surface of a heavy liquid], *Nauchnye izvestija Akademicheskogo centra NKP*, Vol. 3, Physics, pp. 128-138.

64. Nekrasov, A.I. 1922, "O volnah ustanovivshegosja vida, gl.2. O nelinejnyh integral'nyh uravnenijah" [On steady-state waves, Ch. 2. On nonlinear integral equations], *Izvestija Ivanovo-Voznesenskogo politehnicheskogo instituta*, Iss. 6, pp. 155-171.

65. Nekrasov, A.I. 1922, "O nelinejnyh integral'nyh uravnenijah s postojannymi predelami" [Nonlinear integral equations with constant limits], *Izvestija Fizicheskogo instituta i instituta biologicheskoj fiziki,* Iss. 2, pp. 221-238.

66. Nekrasov, A.I. 1928, “O volnah ustanovivshegosja vida na poverhnosti tjazhjoloj zhidkosti (konechnoj glubiny)” [On steady-state waves on the surface of a heavy liquid (finite depth)], *Proceedings of the All-Russian. Math. Congress of 1927 in Moscow*, Moscow-Leningrad, pp. 258-262.

67. Nekrasov, A.I. 1951, *Tochnaja teorija voln ustanovivshegosja vida na poverhnosti tjazheloj zhidkosti* [Exact theory of steady-state waves on the surface of a heavy liquid], Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, 96 p.

68. Nekrasov, A.I. 1961, *Collected Works, Vol. 1* . Executive editor Ya.I. Sekerzh-Zenkovich, Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Moscow, 444 p.

69. Neumann, C.1861,“ Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung:...= 0”, *J. Reine Angew. Math.*,Vol. 59, pp. 335-366.

70. Neumann, C. 1878, “ Untersuchungen über das Logarithmische und Newton’sche Potential”, *Math. Annalen*, Vol. 13, pp. 255–300.

71. Picard, E. 1890, “ Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives ”, *J. Math. Pures Appl*, Vol. 6, pp. 145-210.

72. Picard, E. 1896, *Traité d’Analyse, t. III.* Gauthier-Villars. Paris, 568 p.

73. Poincaré, H. 1885, “ Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation ”, *Acta math.*, Vol. 7, *no. 1*, pp. 259-380.

74. Poincaré, H. 1888, “ Sur l’équilibre d’une masse hétérogène en rotation”, *CR*, Vol. 106, pp. 1571-1574.

75. Poincaré, H. 1897, “La méthode de Neumann et le probleme de Dirichlet”, *Acta math.*, Vol. 20, pp. 59-142.

76. Poincaré, H. 1902, *Figures d’équilibre d’une masse fluide: leçons professées à la Sorbonne en 1900*, Gauthier-Villars, Paris, 211 p.

77. Poincaré, H. 1974, “Fuksovy funkcii i uravnenie $\Delta u = e^u$” [Fuchsian functions and equation $\Delta u = e^u$], In Poincaré A. *Selected Works in Three Volumes. Vol. III. Mathematics.* Nauka, Moscow, pp. 235-309.

78. Poincaré, H. 2000, *Figury ravnovesija zhidkoj massy* [Figures of equilibrium of liquid mass], Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, Izhevsk, 208 p.

79. Puiseux, V. 1850, “Recherches sur les fonctions algébriques”, *J. Math. Pures Appl.*, 1re série, t. 15, pp. 365-480.

80. Radau, R.R. 1885, “Remarques sur la théorie de la figure de la Terre”, *Bull. astronom.*, t. II, pp. 157-161.

81. Ritz, W. 1909, “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik”, *J. Reine Angew. Math.*,Vol. 135, pp. 1–61.

82. Sekerzh-Zen’kovich, Ya. I. 1960, “Aleksandr Ivanovich Nekrasov (on the 75th anniversary of his birth)”, *Uspekhi Mat. Nauk,* Vol. 15:1(91), pp. 153–162.

83. Smirnov, N.S. 1936, *Vvedenie v teoriju nelinejnyh integral’nyh uravnenij*, [Introduction to the theory of nonlinear integral equations], ONTI, Moscow-Leningrad, 124 p.

84. Smirnov, V.I. 1948, *Ocherki nauchnyh trudov Ljapunova* [Essays on Lyapunov's scientific works], In Lyapunov A.M. Selected Works. Izd-vo Akademii Nauk SSSR, Leningrad, pp.341-450.

85. Smirnov, V.I., Yushkevich, A.P. 1985, Perepiska A.M. Ljapunova s A. Puankare i P. Djujemom [Correspondence of A.M. Lyapunov with A. Poincaré and P. Duhem], *Ist.-Mat. Issled.,* Vol. 29, pp. 265-284.

86. Todhunter, I.1873, *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth: From the Time of Newton to that of Laplace.* In 2 Volumes. Vol. II., Macmillan, London, 508 p.

87. Fourier, J. B. J. 1822, *Théorie analytique de la chaleur*, F. Didot, Paris, 639 p.

88. Fredholm, I. 1903, "Sur une classe d'équations fonctionnelles", *Acta math.*, Vol. 27, pp. 365—390.

89. Fredholm, I. 1909, "Les équations intégrales linéaires", *CR Congrés des Math. tenua Stockholm 1909*, pp. 92-100.

90. Khvedelidze, B.V. 1982, "Uravnenija Ljapunova-Shmidta" [Lyapunov-Schmidt equations], Matematicheskaja jenciklopedija v pjati tomah. Vol. 3. Ed. I.M. Vinogradov, Moscow, pp. 473-474.

91. Hellinger, E. & Toeplitz, O. 1928, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Mit einem Vorwort von E. Hilb, Verlag B. G. Teubner, Leipzig - Berlin, pp. 1335- 1616.

92. Schmidt, E.1907, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener", *Math. Annalen*, Vol. 63, pp. 433–476.

93. Schmidt, E. 1907, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung", *Math. Annalen*, Vol. 64, pp. 161-174.

94. Schmidt, E. 1908, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen", *Math. Annalen*, Vol. 65, pp. 370-399.

95. Schwarz, H.A.1885 "Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung (Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass)", *Acta societatis scientiarum Fennicae*, Vol. 15. pp. 315–362.

96. Urysohn, P. 1923, "Sur une classe déquations intégrales non lineaires", *Mat. Sb.*, Vol. 31:2, pp. 236–255.

97. Urysohn, P.S. 1951, *Trudy po topologii i drugim oblastjam matematiki* [Transactions in topology and other areas of mathematics. Notes and introductory article by P.S. Alexandrov], Vol. 1, GITTL, Moscow-Leningrad, 514 p.

98. Urysohn, P.S. 1951, *Trudy po topologii i drugim oblastjam matematiki.* [Transactions in topology and other areas of mathematics. Notes and introductory article by P.S. Alexandrov], Vol. 2, GITTL, Moscow-Leningrad, 480 p.

Получено 31.10.20 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.