ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-256-297

Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных¹

А. В. Родионов

Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В данной работе построен новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Данный метод является обобщением и развитием метода В. С. Рябенского — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток. Также найдена погрешность данного метода. В случае использования бесконечной последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будет иметь место достаточно быстрая сходимость.

Кроме того предложен вариант построения оптимальных сеток в двумерном случае. Он основан на приближении алгебраических решёток целочисленными. В двумерном случае построенные таким образом решётки всегда будут давать обобщенные параллелепипедальные сетки. При этом имеются простые способы оценки качества полученных сеток. Один такой способ, основанный на использовании гиперболического параметра, рассмотрен в данной работе.

Ключевые слова: конечные поля, квадраты, суммы.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. В. Родионов. Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 256–297.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_p_a.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-256-297

Some number-theoretic methods for solving partial derivatives

A. V. Rodionov

Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: rodionovalexandr@mail.ru***Abstract**

In this paper, a new method is constructed for solving partial differential equations using a sequence of nested generalized parallelepiped grids.

This method is a generalization and development of the V. S. Ryaben'kii and N. M. Korobov method for the approximate solution of partial differential equations for the case of using arbitrary generalized parallelepiped grids for integer lattices. The error of this method was also found. In the case of using an infinite sequence of nested generalized parallelepiped grids, a fairly fast convergence will take place.

In addition, a variant of constructing optimal grids in the two-dimensional case is proposed. It is based on the integer approximation of algebraic lattices. In the two-dimensional case, the grids constructed in this way will always give generalized parallelepiped grids. Moreover, there are simple ways to assess the quality of the resulting meshes. One such method, based on the use of a hyperbolic parameter, is considered in this paper.

Keywords: finite fields, squares, sums.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, 2021, "Some number-theoretic methods for solving partial derivatives", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 256–297.

1. Введение**1.1. Актуальность темы исследования и степень ее разработанности**

Данная работа посвящена применению теоретико-числового метода к решению дифференциальных уравнений в частных производных.

Сам метод берёт своё начало в 1956 году, когда в Математическом институте АН СССР под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова начал работать семинар, целью которого была разработка новых многомерных квадратурных формул вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \sum_{k=1}^N \rho_k f(M_k) - R_N[f], \quad (1)$$

где $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1, 2, \dots, N$) — сетка, с помощью которой производится численное интегрирование, ρ_k — веса, а $R_N[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Необходимость новых методов была обусловлена тем, что в случае больших размерностей использование равномерных сеток затруднено, а метод Монте-Карло не может обеспечить достаточную точность.

В результате работы семинара были получены многомерные квадратурные формулы с ретико-числовыми сетками.

Для оценки погрешности квадратурных формул Н. М. Коробовым был введён класс функций $E_s^\alpha(C)$ ($\alpha > 1$). Функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит этому классу, если она имеет период равный единице по каждой из переменных и для коэффициентов Фурье этой функции $C(m_1, \dots, m_s)$ выполняется оценка

$$C(m_1, \dots, m_s) \leq \frac{|C|}{(\bar{m}_1 \cdot \dots \cdot \bar{m}_s)^\alpha},$$

где $\bar{m} = \max(|x|, 1)$. В случае, если значение константы C не имеет значения, класс обозначается E_s^α .

Первыми сетками, полученными в ходе работы семинара были неравномерные сетки. Такая сетка имеет вид

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N.$$

В случае использования неравномерных сеток с N равном квадрату простого числа для погрешности квадратурной формулы (1) справедлива оценка $|R_N[f]| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Заметим, что метод Монте-Карло также обеспечивает эту оценку с вероятностью, близкой к единице, однако неравномерные сетки эту оценку гарантируют. При этом у неравномерных сеток обнаруживается недостаток по сравнению с равномерными. Дело в том, что для погрешности квадратурных формул с равномерной сеткой выполняется оценка $|R_N[f]| = O\left(N^{-\frac{\alpha}{s}}\right)$, и их точность тем выше, чем больше значение α , то есть чем больше гладкость интегрируемой функции. В то время как точность квадратурных формул с неравномерной сеткой от гладкости функции не зависит.

Дальнейшее развитие теоретико-числового метода привело к появлению сеток, обладающих достоинствами неравномерных сеток, но лишённых описанного выше недостатка.

В 1959 году в работе [27] Н. М. Коробов получил квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

где целые $a_1, \dots, a_s$ — специально выбранные числа — оптимальные коэффициенты.

Для погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками с оптимальными коэффициентами выполняется оценка $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от α и s . Точность таких формул значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N , α и s . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Отметим, что вопрос построения эффективных алгоритмов нахождения оптимальных коэффициентов меньше чем за $O(N)$ арифметических операций остаётся открытым. Все имеющиеся алгоритмы для размерности не ниже третьей представляют собой полный перебора дискретного аргумента из некоторой области для поиска минимального значения специально построенной функции (см. например, [6]).

В 1976 году в работах [34] и [35] К. К. Фроловым были предложены алгебраические решётки и соответствующие им алгебраические сетки, на которых достигается правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова (см. [26], [36]) и правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток (см. [7], [8]). При этом в предложенном методе выбор сетки зависел от гладкости интегрируемой функции.

В 1984 году Н. М. Добровольский [17], [19] предложил использовать бесконечно дифференцируемые весовые функции, что позволило в методе Фролова избавиться от зависимости квадратурной формулы от класса E_s^α .

Применение квадратурных формул с алгебраическими сетками на практике затруднено, так как это квадратурные формулы с весами. При оценке погрешности приближенного интегрирования возникают большие величины констант, которые трудно оценить.

В работе [10] Н. М. Добровольский поставил вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными, и так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой.

В последнее время методы многомерного интегрирования и интерполирования с использованием жадных алгоритмов получили своё развитие в работах В. Н. Темлякова (см., например, [43, 44, 45, 46]).

Применение теоретико-числового метода не ограничивается только численным интегрированием. За последнее время появились новые результаты в теории и практике численного интерполирования и решения интегральных уравнений. При этом теория применения теоретико-числовых методов в приближенном анализе к решению дифференциальных уравнений в частных производных развивалась не так активно.

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [33] предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ u(0, \vec{x}) &= \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{4}$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$. Метод В. С. Рябенького заключался в использовании произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работе [26] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \tag{5}$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \tag{6}$$

$$f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_s) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_s) \quad (j = 1, \dots, s),$$

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ при } x_1(1-x_1) \cdot \dots \cdot x_s(1-x_s) = 0. \tag{7}$$

Таким образом,

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = 0, \quad G_s = [0; 1]^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right)$ ($k = 0, \dots, N - 1$) приближенного решения указанной задачи Дирихле

на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\vec{x})$.

В последние годы в работах Н. Темиргалиева [2, 1] были получены оценки приближенного решения дифференциальных уравнений для некоторых частных случаев.

Методы нахождения оптимальных коэффициентов также получили своё развитие в последнее время. В 2011 году В. А. Быковский и С. В. Гассан [3] предложили новый критерий оптимальности, который можно вычислять эффективнее, чем уже имеющиеся — значение функции качества и гиперболический параметр решётки.

Логика научного направления делает актуальным продолжение исследований в указанных направлениях.

1.2. Цель и задачи исследования

Целью данной работы является построение новых методов решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Поэтому в работе были поставлены следующие **задачи**:

- Построить алгоритм решения задачи Коши (2) — (4) с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Найти погрешность указанного алгоритма решения задачи Коши в случае использования последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.
- Построить алгоритм решения задачи Дирихле (5) — (6) с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Найти погрешность указанного алгоритма решения задачи Дирихле в случае использования последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.
- Предложить вариант построения оптимальных теоретико-числовых сеток в двумерном случае с помощью приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными.

1.3. Новизна исследования

Построен новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Данный метод является обобщением и развитием метода В. С. Рябенского — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток. Он состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$. Ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\vec{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \dots \subset M(\Lambda_n) \subset \dots$$

в единичном кубе $G_s = [0; 1]^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\vec{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν :

$$\{\vec{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \dots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \dots$$

При соответствующих условиях на последовательность решеток для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из класса E_s^α ($\alpha > 1$) для последовательности интерполяционных многочленов $I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x})$ будет иметь место достаточно быстрая сходимость

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Как будет показано далее, при достаточно естественных ограничениях либо на дифференциальный оператор $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, либо на начальные условия в задаче Коши последовательность решений $u_\nu(t, \vec{x})$, соответствующих начальным условиям $\varphi_\nu(\vec{x}) = I_{\Lambda_\nu} \varphi(\vec{x})$ будет сходиться к решению $u(t, \vec{x})$. Аналогичная картина будет иметь место для задачи Дирихле.

1.4. Теоретическая и практическая значимость работы

Данная работа развивает теорию применения теоретико-числовых методов в приближенном анализе и позволяет применять предложенные алгоритмы для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты работы могут быть использованы для создания программных комплексов по численному решению задачи Коши для уравнений с частными производными, заданными широким классом дифференциальных операторов, и для решения задачи Дирихле с периодической функцией ограничений.

1.5. Методология и методы исследования

В работе используются методы элементарной теории чисел, аналитической теории чисел, математического анализа, функционального анализа и геометрии чисел. Основным методом решения дифференциальных уравнений в частных производных является теоретико-числовой метод в приближенном анализе, основанный на использовании вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

1.6. Положения, выносимые на защиту

- Построен алгоритм решения задачи Коши с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Построен алгоритм решения задачи Дирихле с использованием вложенных последовательностей обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.
- Найдена погрешность указанных алгоритмов в случае использования последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.
- Предложен вариант построения оптимальных теоретико-числовых сеток в двумерном случае с помощью приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными.

2. Необходимые сведения из теоретико-числового метода

Изложим сведения из теоретико-числового метода, необходимые при решении задач Коши и Дирихле с помощью обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

Пусть $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность Λ всех векторов вида

$$a_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + a_s \vec{\lambda}_s,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — базисом этой решетки.

Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^* , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что если $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{js})$ ($1 \leq j \leq s$) — произвольный базис решетки Λ , то взаимную решетку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{j1}^*, \lambda_{j2}^*, \dots, \lambda_{js}^*)$ ($1 \leq j \leq s$), который определяется равенством

$$(\vec{\lambda}_j, \vec{\lambda}_i^*) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (1 \leq j, i \leq s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$. Ясно, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Приведем определение обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Пусть целочисленная решетка Λ задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа ($\nu, \mu = 1, \dots, s$). Рассмотрим взаимную решетку Λ^* , которая задается матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det \Lambda} & \dots & \frac{A_{s1}}{\det \Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1s}}{\det \Lambda} & \dots & \frac{A_{ss}}{\det \Lambda} \end{pmatrix},$$

где величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A .

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ ($\nu = 1, \dots, s$) взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda} \right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \dots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \ (\nu = 1, \dots, s); \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

а величина T — его параметром.

r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ называется подмножество

$$K_r(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

Если $M \subset \Lambda$ — подрешетка решетки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешетки M решетки Λ равен числу классов решетки Λ относительно M . Произвольное множество векторов решетки Λ по одному из каждого класса относительно решетки M называется полной системой вычетов решетки Λ относительно M . Каждая полная система вычетов решетки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решетки Λ обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решетки Λ^* относительно фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, т.е. $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решетки определена естественная операция сложения $+_{M(\Lambda)}$, относительно которой она является конечной абелевой группой. Нетрудно видеть, что если $\vec{x}, \vec{y} \in M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$, то $\vec{x} +_{M(\Lambda)} \vec{y} = \{\vec{x} + \vec{y}\}$.

Обычно полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решетка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$, где $p_1 = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$, $p_2 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решетки $\mathbb{Z}$ по подрешетке $p\mathbb{Z}$. Приведем многомерный аналог этому понятию из работы [24].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ называется минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, называется абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такая полная система вычетов обозначается через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решетки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s -мерном случае

таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

Приведем без доказательства несколько лемм и теорем из работы [24].

ЛЕММА 1. Для любой целочисленной решетки Λ и подрешетки Λ_1 справедливо вложение

$$M_H^*(\Lambda) \subset M_H^*(\Lambda_1). \quad (9)$$

Для произвольной целочисленной решетки Λ определяются второй и третий гиперболические параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вторым гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Другими словами все целые точки этого креста не сравнимы по модулю Λ .

Через $K_Z(T)$ обозначим множество всех целых точек, принадлежащих гиперболическому кресту $K(T)$. Так как $|K_Z(1)| = 3^s$, то для любого $N \geq 3^s$ можно определить функцию $T_s(N)$ из условий $|K_Z(T_s(N))| \leq N$, $|K_Z(T_s(N) + 1)| > N$. Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leq T_s(N) \leq q_2(\Lambda). \quad (10)$$

Из (10) следует, что при $N < 3^s$ надо полагать $q_3(\Lambda) = 0$, так как минимальный крест $K(1)$ содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из N элементов.

В работе [13] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. При $N > e^{s \cdot e}$ справедливы неравенства:

$$\frac{(s-1)!(N-1)}{2^s (\ln N + \frac{3s}{2})^{s-1}} \leq T_s(N) \leq \frac{(s-1)!N}{2^s (\ln N + \ln((s-1)!) - s \ln 2 - (s-1) \ln(\ln N))^{s-1}}. \quad (11)$$

Из определений 4 и 5 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda) < q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda) \leq q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперболическими параметрами, по видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda)) \subset M^*(\Lambda) \subset K(q_2(\Lambda)) \quad (12)$$

Рассмотрим для примера случай решетки $\Lambda = N\mathbb{Z}^s$. Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s) = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)| = \det(N\mathbb{Z}^s) = N^s. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки $N\mathbb{Z}^s$ можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s) = \{-N_1, \dots, N_2\}^s. \tag{14}$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda) = N, \quad q_2(\Lambda) = N_2^s \leq \frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda) = N_1. \tag{15}$$

ЛЕММА 2. *Для любой целочисленной решетки Λ найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ такая, что выполнены соотношения (12).*

ЛЕММА 3. *Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ удовлетворяет соотношению (12).*

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{x}$ понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s . Для целого вектора $\vec{m}$ рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через $r_2(\vec{m})$.

ЛЕММА 4. *Если для целочисленной решетки Λ вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и имеет минимальное значение усеченной нормы ($q(\vec{m}) = q(\Lambda)$), то для третьего гиперболического параметра решетки Λ справедлива оценка сверху:*

$$q_3(\Lambda) \leq \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\vec{m}) - r_2(\vec{m})}}. \tag{16}$$

Обозначим через J_s множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_s$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$.

ЛЕММА 5. *Пусть для заданного $\vec{j}_s \in J_s$ вектора $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$ целочисленной решетки Λ определены из условий:*

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_1}|, \tag{17}$$

$$\lambda_{\nu,1} = \dots = \lambda_{\nu,j_{\nu-1}} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_\nu} = \min_{\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)} \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_\nu}| \quad (\nu = 2, \dots, s), \tag{18}$$

где $\Lambda^{(\nu)} = \{\vec{x} \in \Lambda \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$, тогда они образуют базис решетки Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть числа $N_1(\vec{j}_s), \dots, N_s(\vec{j}_s)$ определены равенствами:

$$N_\nu(\vec{j}_s) = \lambda_{\nu,j_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, s),$$

тогда для любого $\vec{x} \in \Lambda$ имеем $x_{j_1} \equiv 0 \pmod{N_1(\vec{j}_s)}$ и для любого $\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)}$ имеем $x_{j_\nu} \equiv 0 \pmod{N_\nu(\vec{j}_s)}$ ($\nu = 2, \dots, s$). Отсюда следует, что любой $\vec{x} \in \Lambda$ представляется линейной целочисленной комбинацией векторов $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Заметим, что из доказательства леммы следует равенство

$$\det \Lambda = N_1(\vec{j}_s) \dots N_s(\vec{j}_s).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решетки Λ второй гиперболический параметр решетки удовлетворяет соотношению:

$$q_2(\Lambda) \leq \min_{\vec{j}_s \in J_s} \left[\frac{N_1(\vec{j}_s)}{2} \right] \cdots \left[\frac{N_s(\vec{j}_s)}{2} \right]. \quad (19)$$

Следуя работе [11], последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будем называть концентрической.

Пусть даны две целочисленные решетки $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$ и $\det \Lambda_1 < \det \Lambda_2$, тогда для обобщенных параллелепипедальных сеток имеем вложение: $M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2)$.

Действительно, рассмотрим взаимные решетки Λ_1^* и Λ_2^* :

$$\Lambda_1^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda_1 \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}, \quad \Lambda_2^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda_2 \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s\}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что $\Lambda_1^* \subset \Lambda_2^*$, а, значит,

$$M(\Lambda_1) = (\Lambda_1^* \cap G_s) \subset M(\Lambda_2) = (\Lambda_2^* \cap G_s).$$

Аналогичное свойство установлено для минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ (см. лемму 1 на стр. 264).

Таким образом, если имеется вложенная последовательность решёток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$, то она задает концентрическую последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

В частности, если $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$, то ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\vec{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \dots \subset M(\Lambda_n) \subset \dots$$

в единичном кубе $G_s = [0; 1]^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\vec{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda_\nu)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ_ν :

$$\{\vec{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \dots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \dots$$

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [15] и [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Тригонометрической суммой сетки M и произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решетки Λ , целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решетки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_\Lambda^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа Коробова

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решетки Λ называется выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^* / \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решетки Λ^* целочисленной решетки Λ называется выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s / \Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решетки Λ^* и $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$ — полная система вычетов решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 4. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

Как уже отмечалось, класс периодических функций E_s^α состоит из функций $f(\vec{x})$ с рядом Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$c(\vec{m}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x} = O\left(\frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}\right).$$

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{m}) (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha| \tag{21}$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — пространству всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Наряду с нормой (21) рассмотрим нормы

$$\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in G_s} |f(\vec{x})| \tag{22}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_2} = \left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Относительно норм (22) и (23) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмножеством пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [16]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_2} &\leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \\ \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \end{aligned} \quad (24)$$

Последнее неравенство (24) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $c(\vec{m}) = 0$ при $\vec{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работ [13, 14].

Для натурального $t > 1$ положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (25)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (26)$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \dots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (27)$$

ЛЕММА 6. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (28)$$

ЛЕММА 7. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (29)$$

ЛЕММА 8. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть натуральное $t > 1$ и разложение периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (31)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (33)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (34)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in |K(t)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |K_Z(t)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |K_Z(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо неравенство*

$$|K_Z(t)| \geq t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (37)$$

Из теоремы 6 и равенств (35) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Из оценки снизу (37) и равенства (35) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (39)$$

Таким образом, оценка сверху (38) и оценка снизу (39) совпадают по порядку относительно t .

Теорема 4 позволяет доказать, что произвольную функцию $f(\vec{x})$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье.

ТЕОРЕМА 8. *Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство*

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решетки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ , то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (40)$$

где

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (41)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

Тригонометрический полином (40) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ . Возникает вопрос о том, как оптимально выбирать $M^*(\Lambda)$, чтобы погрешность интерполирования была наименьшей. Ответ на этот вопрос зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача. Мы остановимся на классе E_s^α .

Рассмотрим сначала решетку $N \cdot \mathbb{Z}^s$. Как известно, для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ справедливо включение: $N \cdot \mathbb{Z}^s \subset \Lambda$. В следующей теореме будем использовать обозначения (13) и (14).

ТЕОРЕМА 9. *Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и интерполяционного полинома $S_{M(N \cdot \mathbb{Z}^s), M^*(N \cdot \mathbb{Z}^s)}(\vec{x})$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} & |c(\vec{m}) - c_{M(N \cdot \mathbb{Z}^s), M^*(N \cdot \mathbb{Z}^s)}(\vec{m})| \leq \\ & \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + \frac{2^\alpha + 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha} \right)^{s-1} \frac{s(2^\alpha + 2\zeta(\alpha))}{N^\alpha}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\|f(\vec{x}) - S_{M(N \cdot \mathbb{Z}^s), M^*(N \cdot \mathbb{Z}^s)}(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} 2^\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}. \quad (43)$$

Формула (40) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве E_s^α , который каждой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (40). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (44)$$

ЛЕММА 9. *Для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство*

$$\|I_\Lambda f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}. \quad (45)$$

ЛЕММА 10. *Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{x})$ вида*

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (46)$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (47)$$

Множество тригонометрических полиномов вида (46) обозначим через P_Λ .

ТЕОРЕМА 10. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda \geq 3^s$ и $q_3(\Lambda) \geq 1$ на пространстве $P^{(q_3(\Lambda))}$ для абсолютно минимальной гиперболической полной система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ справедливо равенство (47).

При $t > q_3(\Lambda)$ найдется тригонометрический полином $f(\vec{x}) \in P^{(t)}$ такой, что равенство (47) нарушается. В частности,

$$P^{(t)} \cap \ker I_\Lambda \neq \emptyset.$$

Для любого $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$ обозначим через $E_{s,\vec{m}}^\alpha$ банахово подпространство пространства E_s^α , состоящее из функций вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}. \tag{48}$$

Ясно, что имеет место разложение E_s^α в прямую сумму $E_{s,\vec{m}}^\alpha$:

$$E_s^\alpha = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \oplus E_{s,\vec{m}}^\alpha.$$

Отсюда следует, что произвольная функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ представима в виде сумм

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} f_{\vec{m}}(\vec{x}),$$

где

$$f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}.$$

В работе [16] показано, что для проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ имеется конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(f(\vec{x})) = f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

ТЕОРЕМА 11. На пространстве E_s^α операторы $A_{\vec{m}}$ и I_Λ коммутируют:

$$I_\Lambda(A_{\vec{m}}(f(\vec{x}))) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(f(\vec{x}))) = \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \tag{49}$$

ТЕОРЕМА 12. На пространстве E_s^α ядро $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ имеет нормированный базис:

$$f_{\vec{m},\vec{n}}(\vec{x}) = \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} \left(e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) \quad (\vec{m} \in M_H^*(\Lambda), \vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}). \tag{50}$$

Пространство E_s^α разлагается в прямую сумму ядра $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ и пространства тригонометрических полиномов P_Λ :

$$E_s^\alpha = \ker I_\Lambda \oplus P_\Lambda.$$

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования мы получим с помощью третьего гиперболического параметра решетки.

ТЕОРЕМА 13. Для любой целочисленной решетки Λ найдется функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \geq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha}. \tag{51}$$

ТЕОРЕМА 14. Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (52)$$

3. Теоретико-числовой метод решения задачи Коши

В данном разделе приведём основные результаты из работы [30].

Рассмотрим задачу Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (53)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \quad (54)$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s),$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \quad (55)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \dots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).²

Таким образом,

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} c_{m_1, \dots, m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (56)$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1, \dots, m_s}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \quad (57)$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha} = \sup_{m_1, \dots, m_s} |c_{m_1, \dots, m_s} (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha| < \infty \quad (58)$$

является нормой на пространстве E_s^α , относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Изложим и обобщим метод, применённый В. С. Рябенкиным при решении задачи Коши, с нахождением оценок погрешности метода и уточнением отдельных деталей метода.

Прежде всего найдем собственные функции и ядро дифференциального оператора

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right).$$

²Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

Для любого $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$ зададим величины $Q(\vec{m})$ равенствами

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s} = \sum_{j=0}^{n(Q)} A_j(\vec{m}) (2\pi i)^j, \quad (59)$$

$$A_j(\vec{m}) = \sum_{j_1 + \dots + j_s = j} a_{j_1, \dots, j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \quad (60)$$

Заметим, что если все коэффициенты $a_{j_1, \dots, j_s}$ — алгебраические числа, то в силу трансцендентности числа π величина $Q(\vec{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A_j(\vec{m}) = 0$, для всех $j = 0, \dots, n(Q)$.

ЛЕММА 11. Для любого $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$ функция $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ является собственной функцией оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ с собственным числом $Q(\vec{m})$, если $Q(\vec{m}) \neq 0$, или принадлежит ядру Ker_Q оператора, если $Q(\vec{m}) = 0$.

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}(S)$ пространство всех тригонометрических многочленов с переменными коэффициентами, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:

$$\mathbb{T}(S) = \left\{ P(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid b_{\vec{m}}(t) \in C^1(0, T), \vec{m} \in S \right\},$$

а через $\mathbb{T}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid b_{\vec{m}} \in \mathbb{C}, \vec{m} \in S \right\},$$

ТЕОРЕМА 15. Для пространства $\mathbb{T}(S)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (61)$$

является тригонометрический многочлен

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (62)$$

ТЕОРЕМА 16. Для пространства $\mathbb{T}(S)$ решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \\ 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (63)$$

с начальным условием

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \quad (64)$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (65)$$

является тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (66)$$

Пусть задана целочисленная решетка Λ , которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Коши (53) — (55) свяжем дискретную задачу Коши с решеткой Λ , отличие которой от просто задачи Коши заключается в том, что начальное условие ослабляется и задается не на единичном s -мерном кубе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M_H^*(\Lambda))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Дискретной задачей Коши с решеткой Λ называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (67)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \quad (68)$$

с дискретными начальными условиями

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (69)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).

Решением дискретной задачи Коши с решеткой Λ называется тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами $u(t, \vec{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (67) в области (68) с дискретными начальными условиями (69).

Таким образом, дискретную задачу Коши с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными можно рассматривать как приближение решения задачи Коши (53) — (55). Вопрос о сходимости последовательности решений дискретных задач Коши с последовательностью вложенных решеток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ будет рассмотрен позднее.

ТЕОРЕМА 17. Решением дискретной задачи Коши с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (70)$$

где

$$c(\vec{m}) = c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}. \quad (71)$$

В пространстве тригонометрических многочленов $\mathbb{T}(M^*(\Lambda))$ рассмотрим базис, состоящий из функций

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})}, \quad \vec{y} \in M(\Lambda),$$

которые выделяются характеристическим свойством

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{x} = \vec{y}, \\ 0, & \text{при } \vec{x} \neq \vec{y}, \vec{x} \in M(\Lambda). \end{cases}$$

Обозначим через $U_{\vec{y}}(t, \vec{x})$ решение задачи Коши (53) — (55) с начальными условиями $\varphi(\vec{x}) = L_{\vec{y}}(\vec{x})$, тогда по теореме 16

$$U_{\vec{y}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \tag{72}$$

и решение дискретной задачи Коши с решеткой Λ можно записать через базисные функции

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) U_{\vec{y}}(t, \vec{x}).$$

Рассмотрим теперь решение задачи Коши для общего периодического случая.

Введем в рассмотрение два новых класса функций $E_s^\alpha(Q, T)$ и $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$, где

$$Q = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \dots + n_s$, а $T > 0$ — произвольное положительное число, определяющее отрезок изменения переменной t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^\alpha(Q, T)$, если*

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q, T)}}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)}. \tag{73}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q, T)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty, \tag{74}$$

$$Q(\vec{m}, T) = \max_{q(\vec{n}) \leq q(\vec{m})} Q_1(\vec{n}, T), \tag{75}$$

$$Q_1(\vec{m}, T) = \max_{0 \leq t \leq T} \left(\left| e^{Q(\vec{m})t} \right|, \left| e^{Q(\vec{m})t} \right| \cdot |Q(\vec{m})| \right), \tag{76}$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \tag{77}$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q, T)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Функция $u(t, \vec{x})$ определенная при $0 \leq t \leq T$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, периодическая по $\vec{x}$ с периодом 1 по каждой переменной x_ν ($\nu = 1, \dots, s$), представимая кратным рядом Фурье с переменными коэффициентами Фурье, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:*

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b'_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \tag{78}$$

принадлежит классу $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$, если для любого t из отрезка $[0; T]$ выполнены равенства

$$b_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t)e^{Q(\vec{m})t}, \quad b'_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t)Q(\vec{m})e^{Q(\vec{m})t} \quad (79)$$

и периодическая функция

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}}(t)e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

принадлежат классу $E_s^\alpha(Q, T)$.

ТЕОРЕМА 18. Для пространства $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (80)$$

является периодическая функция

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (82)$$

где коэффициенты $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$C = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty, \quad (83)$$

и ряды в правых частях (81) и (82) абсолютно сходятся.

ТЕОРЕМА 19. Для пространства $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$ решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (84)$$

с начальным условием

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{E}_s^\alpha(Q, T), \quad (85)$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (86)$$

является

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (87)$$

где $u(t, \vec{x}) \in ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$.

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(t, \vec{x})$ как приближение к решению $u(t, \vec{x})$ задачи Коши (84) — (85). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

ТЕОРЕМА 20. Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения (87) задачи Коши (84) – (85) с функцией $\varphi(\vec{x})$, имеющей ряд Фурье (86), справедливо неравенство

$$|u(t, \vec{x}) - u_\Lambda(t, \vec{x})| \leq \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q,T)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s \frac{C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \quad (88)$$

4. Теоретико-числовой метод решения задачи Дирихле

В данном разделе рассмотрим следующую задачу Дирихле

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (89)$$

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = \varphi(\vec{x}), \quad u(\vec{x}), f(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (90)$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}. \quad (91)$$

Приведём без доказательства основные результаты из работы [31].

В предыдущем разделе были найдены собственные функции и ядро дифференциального оператора $Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right)$. Будем использовать обозначение $\mathbb{K}er_Q$ для самого ядра оператора, а для множества значений $\vec{m}$, для которых $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{K}er_Q$ будем использовать обозначение $\mathbb{K}er_Q$.

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ – произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}_0(S)$ – пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid b_{\vec{m}} \in \mathbb{C}, \vec{m} \in S \right\}.$$

Очевидно, что если $f(\vec{x}) \in \mathbb{K}er_Q$ и $f(\vec{x}) \neq 0$, то уравнение

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (92)$$

не имеет решений. Более того, пространство $\mathbb{T}_0(S)$ можно представить как прямую сумму подпространств

$$\mathbb{T}_0(S) = \mathbb{T}_0(S \setminus \mathbb{K}er_Q) \oplus \mathbb{T}_0(S \cap \mathbb{K}er_Q)$$

и уравнение (92) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S \setminus \mathbb{K}er_Q).$$

ТЕОРЕМА 21. Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ общим решением дифференциального уравнения

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (93)$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S \cap Ker_Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (94)$$

где $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа.

Обозначим через $J_{s,t}^*$ множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_{s,t} = (j_1, \dots, j_s)$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$ такую, что $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq s$, $1 \leq j_{t+1} < \dots < j_s \leq s$. Таким образом $|J_{s,t}^*| = C_s^t$ и $J_{s,0}^* = J_{s,s}^* = \{(1, 2, \dots, s)\}$. Для дальнейшего потребуется явный вид $J_{s,s-1}^*$:

$$J_{s,s-1}^* = \{(2, \dots, s, 1), (1, 3, \dots, s, 2), \dots, (1, \dots, s-2, s, s-1), (1, \dots, s)\}, \\ |J_{s,s-1}^*| = s.$$

Для произвольного вектора $\vec{j}_{s,t} \in J_{s,t}^*$ и многочлена $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$ определим действие оператора $Pr(\vec{j}_{s,t})$ проектирования на пространство $\mathbb{T}_0(S, \vec{j}_{s,t})$, где

$$\mathbb{T}_0(S, \vec{j}_{s,t}) = \\ = \left\{ P((x_{j_1}, \dots, x_{j_t})) = \sum_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) \in S(\vec{j}_{s,t})} b_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t})} e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1} + \dots + m_{j_t}x_{j_t})} \right. \\ \left. b_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t})} \in \mathbb{C}, (m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) \in S(\vec{j}_{s,t}) \right\}, \\ S(\vec{j}_{s,t}) = \{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) | (m_1, \dots, m_s) \in S\},$$

следующим образом

$$Pr(\vec{j}_{s,t})\varphi(\vec{x}) = \sum_{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) \in S(\vec{j}_{s,t})} e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1} + \dots + m_{j_t}x_{j_t})} \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_t}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_t})}} b_{\vec{n}}.$$

Таким образом

$$Pr(\vec{j}_{s,0})\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in S} b_{\vec{n}},$$

а

$$Pr(\vec{j}_{s,s})\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}).$$

ЛЕММА 12. Для $u(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$ граничное условие

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}) \quad (95)$$

выполняется тогда и только тогда, когда для любого t с $0 \leq t < s$ и $\vec{j}_{s,t} \in J_{s,t}^*$ выполняются соотношения

$$Pr(\vec{j}_{s,t})u(\vec{x}) = Pr(\vec{j}_{s,t})\varphi(\vec{x}).$$

ЛЕММА 13. Для $u(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$:

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

граничное условие (95) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и $(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1})$ выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} = \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}. \quad (96)$$

ТЕОРЕМА 22. Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ задача Дирихле для дифференциального уравнения с частными производными

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus Ker Q), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (97)$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \quad (98)$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (99)$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдутся $c_{\vec{m}}$ ($\vec{m} \in S \cap Ker Q$), для которых для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и $(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1})$ выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S \setminus Ker Q, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} + \sum_{\substack{\vec{n} \in S \cap Ker Q, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} =$$

$$= \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}, \quad (100)$$

и её решением является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S \cap Ker Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (101)$$

В случае, если $S \cap Ker Q = \{(0, \dots, 0)\}$, то общим решением уравнения (93) является многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c,$$

где c — произвольная константа.

Рассмотрим, например, задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \quad (102)$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus \{\vec{0}\}), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \quad (103)$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S), \quad (104)$$

где тригонометрический многочлен $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (105)$$

Для оператора Лапласа

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$$

имеем:

$$Q(\vec{m}) = -(2\pi)^2 \cdot (m_1^2 + \dots + m_s^2).$$

Таким образом $\text{Ker} Q = \{\vec{0}\}$. Тогда, согласно теореме 21, общим решением дифференциального уравнения (102) является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} \frac{b_{\vec{m}}}{m_1^2 + \dots + m_s^2} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c.$$

Согласно теореме 22 задача Дирихле (102) – (105) разрешима тогда и только тогда, когда существует c_0 такое, что для каждого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ выполнены соотношения

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{n_1^2 + \dots + n_s^2} = \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}, \quad (106)$$

$$m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 \neq 0,$$

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}} + \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{\vec{n} \in S \setminus \{\vec{0}\}, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{n_1^2 + \dots + n_s^2} = c_0, \quad (107)$$

$$m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 = 0.$$

Решением задачи Дирихле (102) – (105) является функция

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{m} \in S \setminus \{\vec{0}\}} \frac{b_{\vec{m}}}{m_1^2 + \dots + m_s^2} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_0. \quad (108)$$

Среди всех дифференциальных операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ выделим класс Ω невырожденных дифференциальных операторов, состоящий из операторов $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, для которых $\text{Ker} Q = \{(0, \dots, 0)\}$. Важность этого класса операторов объясняется тем, что с точностью до константы решение дифференциального уравнения с частными производными для этих

операторов определяется однозначно. Из предыдущего видно, что оператор Лапласа принадлежит классу Ω .

Отметим, что если оператор $Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right)$ вида (55) невырожденный, то $a_{0, \dots, 0} = 0$.

Пусть теперь задана целочисленная решетка Λ , которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Дирихле (89) – (91) свяжем дискретную задачу Дирихле с решеткой Λ , отличие которой от просто задачи Дирихле заключается в том, что дифференциальное уравнение с частными производными и граничное условие ослабляются и задаются не на единичном s -мерном кубе и его границе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$ и его проекциях на грани единичного s -мерного куба. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M_H^*(\Lambda))$.

Введем следующие обозначения:

Для произвольного вектора $\vec{j}_{s,t} \in J_{s,t}^*$ и обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ определим действие оператора $Pr(\vec{j}_{s,t})$ проектирования на грань $G_s(\vec{j}_{s,t})$, где

$$G_s(\vec{j}_{s,t}) = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \mid (x_{j_1}, \dots, x_{j_t}) \in \overline{G_t}, x_{j_{t+1}} = \dots = x_{j_s} = 0 \},$$

следующим образом

$$Pr(\vec{j}_{s,t})M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \mid \begin{array}{l} \vec{y} \in M(\Lambda), (x_{j_1}, \dots, x_{j_t}) = (y_{j_1}, \dots, y_{j_t}), \\ x_{j_{t+1}} = \dots = x_{j_s} = 0 \end{array} \right\}.$$

Пространство E_s^α представим в виде прямой суммы $E_s^\alpha = E_s^{\alpha, Q} \oplus \mathbb{K}er_Q$, где

$$E_s^{\alpha, Q} = \left\{ f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \mathbb{K}er_Q} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid f(\vec{x}) \in E_s^\alpha \right\},$$

$$\mathbb{K}er_Q = \left\{ f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{K}er_Q} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid f(\vec{x}) \in E_s^\alpha \right\}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение с частными производными

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

разрешимо только для функций $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha, Q}$.

Прежде всего рассмотрим дискретную задачу для дифференциального уравнения с частными производными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Дискретной задачей с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными называется уравнение*

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \tag{109}$$

$$f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha, Q}, \tag{110}$$

Решением дискретной задачи с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными называется тригонометрический многочлен $u(\vec{x}) \in \mathbb{T}(M^(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (109) с функцией (110).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Дискретной задачей Дирихле с решеткой Λ называется уравнение

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \quad (111)$$

$$f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha, Q}, \quad (112)$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\vec{x}) = I_\Lambda \varphi(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \quad (113)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$), а $I_\Lambda \varphi(\vec{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} d(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$d(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решеткой Λ называется тригонометрический многочлен $u(\vec{x}) \in \mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (111) с функцией (112) и с дискретными граничными условиями (113).

Таким образом, дискретную задачу Дирихле с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными можно рассматривать как приближение решения задачи Дирихле (89) — (91). Вопрос о сходимости последовательности решений дискретных задач Дирихле с последовательностью вложенных решеток $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$ будет рассмотрен в последнем разделе.

Для невырожденных операторов $Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \in \mathfrak{Q}$ имеем $\mathbb{K}er_Q = \mathbb{C}$ как множество функций и $\mathbb{K}er_Q = \{\vec{0}\}$ как множество тех $\vec{m}$, для которых $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{K}er_Q$. В этом случае для краткости будем писать $E_s^{*\alpha} = E_s^{\alpha, Q}$. Другими словами, класс функций $E_s^{*\alpha}$ состоит из всех функций $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, у которых $c(\vec{0}) = 0$.

Отметим одну особенность оператора интерполирования по сетке $M(\Lambda)$. Если $f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}$, то интерполяционный многочлен $I_\Lambda f(\vec{x})$ не обязан принадлежать $E_s^{*\alpha}$. Действительно, для функции $f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}$,³

$$f(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

имеем

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} b(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$b(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

и на основании теоремы 3 (см. стр. 267) имеем

$$b(\vec{0}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} =$$

³Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка $\vec{n} = \vec{0}$.

$$= \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \frac{1}{N} s(\vec{m}, \Lambda) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) \delta_\Lambda(\vec{m}) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda} c(\vec{m}).$$

Поэтому коэффициент $b(\vec{0})$ не обязан равняться 0.

ТЕОРЕМА 23. *Решением дискретной задачи с решеткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными*

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \tag{114}$$

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \in \mathfrak{Q}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}, \tag{115}$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c, \tag{116}$$

где c — произвольное число и

$$b(\vec{m}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 24. *Дискретная задача Дирихле с решёткой Λ для дифференциального уравнения с частными производными*

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda), \tag{117}$$

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \in \mathfrak{Q}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{*\alpha}, \tag{118}$$

с дискретными граничными условиями

$$u(\vec{x}) = I_\Lambda \varphi(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_s}), \tag{119}$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$), а $I_\Lambda \varphi(\vec{x})$ — её интерполяционный многочлен,

$$I_\Lambda \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} d(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где

$$d(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}, \quad N = |M(\Lambda)|$$

разрешима тогда и только тогда, когда существует c_Λ такое, что для каждого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ выполнены соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})} = \sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d(\vec{n}),$$

$$m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 \neq 0, \quad (120)$$

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d(\vec{n}) + \sum'_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})} = c_\Lambda, \\ m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 = 0, \quad (121)$$

где

$$b(\vec{n}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{n}, \vec{y})}.$$

Решением дискретной задачи Дирихле с решёткой Λ (117) – (119) является функция

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_\Lambda, \quad (122)$$

Рассмотрим пространство тригонометрических многочленов $\mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$, состоящее из всех тригонометрических многочленов $P(\vec{x})$ вида

$$P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda) \setminus \{\vec{0}\}} b(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} b(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

В пространстве тригонометрических многочленов $\mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$ рассмотрим базис, состоящий из функций

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})}, \quad \vec{y} \in M(\Lambda),$$

которые выделяются характеристическим свойством

$$L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{N}, & \text{при } \vec{x} = \vec{y}, \\ -e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, & \text{при } \vec{x} \neq \vec{y}, \vec{x} \in M(\Lambda). \end{cases}$$

Обозначим через $U_{\vec{y}}(\vec{x}) \in \mathbb{T}^*(M^*(\Lambda))$ решение дифференциального уравнения с частными производными

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = L_{\vec{y}}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda). \quad (123)$$

Таким образом,

$$U_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})}}{Q(\vec{m})}$$

и общее решение дискретной задачи с решёткой Λ дифференциального уравнения с частными производными

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}), \quad \vec{x} \in M(\Lambda) \quad (124)$$

можно записать через базисные функции следующим образом

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) U_{\vec{y}}(\vec{x}) + c,$$

где c — произвольное число.

Для решения задачи Дирихле в общем периодическом случае введем в рассмотрение новый класс функций $E_s^\alpha(Q)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \dots + n_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^\alpha(Q)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m})}. \tag{125}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot \overline{Q(\vec{m})}| < \infty, \tag{126}$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \tag{127}$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Положим

$$Q^*(\vec{m}) = \max_{q(\vec{n}) \leq q(\vec{m})} \overline{Q(\vec{n})}^{-1}.$$

Заметим, что для любого $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$ справедливо неравенство $Q^*(\vec{m}) \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^{+\alpha}(Q)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^{+\alpha}(Q)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q^*(\vec{m})}. \tag{128}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^{+\alpha}(Q)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q^*(\vec{m})| < \infty. \tag{129}$$

является нормой на пространстве $E_s^{+\alpha}(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

ТЕОРЕМА 25. Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ f(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec{0}\}} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{+\alpha}(Q) \end{aligned} \quad (130)$$

является периодическая функция

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c, \quad u(\vec{x}) \in E_s^\alpha(Q), \quad (131)$$

где c — произвольное число и ряды в правых частях (130) и (131) абсолютно сходятся.

ТЕОРЕМА 26. Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ задача Дирихле для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ f(\vec{x}) &= \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \end{aligned} \quad (132)$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial G_s), \quad \varphi(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (133)$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (134)$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдётся c_0 , для которого для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и $(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in \mathbb{Z}^s \left(\vec{j}_{s,s-1} \right)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} &= \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}, \\ m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 &\neq 0, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}} + \sum'_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} &= c_0, \\ m_{j_1}^2 + \dots + m_{j_{s-1}}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Решением задачи Дирихле (132) — (134) является периодическая функция

$$u(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_0, \quad (137)$$

Покажем, как оценивается погрешность найденного решения. Пусть задана целочисленная решетка Λ и $M^*(\Lambda) = M_H^*(\Lambda)$ — абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Согласно теореме 24 (см. стр. 283) решением дискретной задачи Дирихле (117) — (119) с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u_\Lambda(\vec{x}) = \sum'_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \frac{b(\vec{m})}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + c_\Lambda, \tag{138}$$

где

$$b(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})},$$

$$c_\Lambda = \sum_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ \vec{n} = (n_1, 0, \dots, 0)}} d(\vec{n}) + \sum'_{\substack{\vec{n} \in M^*(\Lambda), \\ \vec{n} = (n_1, 0, \dots, 0)}} \frac{b(\vec{n})}{Q(\vec{n})}.$$

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(\vec{x})$ как приближение к решению $u(\vec{x})$ задачи Дирихле (132) — (133). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

ТЕОРЕМА 27. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения (137) задачи Дирихле (132) — (133) справедливо неравенство*

$$\|u(\vec{x}) - u_\Lambda(\vec{x})\|_C \leq \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \tag{139}$$

5. Построение оптимальных параллелепипедальных сеток с помощью приближения алгебраических решёток целочисленными

Одной из актуальных проблем теоретико-числового метода является проблема построения оптимальных сеток. Алгебраические сетки Фролова обеспечивают правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова, однако их применение на практике затруднено, так как это квадратурные формулы с весами. И так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникают вопросы приближения алгебраических решёток целочисленными и оценки оптимальности полученных сеток.

Численные эксперименты, проведённые нами, показывают, что такие сетки часто оказываются оптимальными. При этом в двумерном случае удаётся легко оценить качество полученных сеток. В данном разделе мы будем использовать оценку качества сетки с помощью гиперболического параметра.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{140}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Взаимной решёткой называется решётка $\Lambda^* = \{ \vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z} \}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$, где $G_s = [0; 1]^s$. В случае, если Λ — алгебраическая решётка, то сетка $M(\Lambda)$ называется алгебраической.

Применение квадратурных формул с алгебраическими сетками на практике затруднено, поэтому возникает вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными, и так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой. Особенно просто эта проблема решается в двумерном случае.

Далее приведём основные результаты, полученные в работе [32], для квадратичных алгебраических решёток.

Пусть d — произвольное натуральное число, свободное от квадратов. Рассмотрим квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Тогда кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + m\omega \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, где $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, если $d = 4t + 1$, и $\omega = \sqrt{d}$, если $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$.

Через $\Lambda(F)$ обозначим алгебраическую решётку поля F : $\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \mid \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа. Если $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$, то базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega; -\omega)$, детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$. В случае $d = 4t + 1$ базис $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega; 1 - \omega)$, $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Рассмотрим разложение ω в цепную периодическую дробь:

$$\omega = (a_0; a_1, \dots, a_k, \dots) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Через $\frac{P_k}{Q_k}$ будем обозначать k -ую подходящую дробь к ω . Таким образом,

$$\omega = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{(-1)^k \theta_k}{Q_k^2}, \quad 0 < \theta_k < 1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (141)$$

Через $\Lambda_k(F)$ обозначается решётка, полученная из $\Lambda(F)$ домножением на Q_k . Она имеет вид

$$\Lambda_k(F) = \{(Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n\omega)) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3;$$

или

$$\Lambda_k(F) = \{(Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n - n\omega)) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1.$$

Через $\Lambda_k(d)$ обозначим целочисленную решётку, заданную равенствами

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3; \quad (142)$$

или

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - Q_k n - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1. \quad (143)$$

В первом случае базис решётки имеет вид $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$, $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, -P_k)$, а её детерминант $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k$. При этом базис этой решётки ортогонален. Также для любой точки решётки (x, y) точка (y, x) также принадлежит этой решётке.

Во втором случае $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$, $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, Q_k - P_k)$, $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k - Q_k^2$.

Рассмотрим линейное сравнение

$$ax - y \equiv 0 \pmod{N}.$$

Решётка

$$\Lambda(a, N) = \{(m, ma - nN) | m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (144)$$

является решёткой решений этого сравнения. Её базис имеет вид $\lambda_1 = (1, a)$, $\lambda_2 = (0, -N)$.

Следующая теорема показывает, что решётки (142) и (143) являются решётками решений линейного сравнения.

ТЕОРЕМА 28. Пусть $\frac{P_k}{Q_k}$ — k -ая подходящая дробь к ω . Числа a и N определяются следующими равенствами. При $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$: $N = 2P_k Q_k$; $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k)$. При $d = 4t + 1$: $N = 2Q_k P_k - Q_k^2$; $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k)$. Тогда $\Lambda_k(d) = \Lambda(a, N)$.

Понятно, что не любая решётка линейного сравнения представима в виде (142) или (143).

Заметим, что решётка (142) задаётся с помощью чисел P_k и Q_k — числителя и знаменателя k -той подходящей дроби к числу ω . При этом теорема 28 устанавливает, что эта решётка является решёткой линейного сравнения (144) с параметрами a и N . Следующая же теорема обнаруживает связь между разложениями в цепную дробь чисел $\frac{P_k}{Q_k}$ и $\frac{a}{N}$.

ТЕОРЕМА 29. Пусть

$$\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k), \quad P_k > Q_k.$$

Тогда

$$\frac{a}{N} = \frac{P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k}{2P_k Q_k} = (0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_k). \quad (145)$$

В конце девятнадцатого века Г. Ф. Вороной и независимо Г. Минковский среди узлов s -мерной решетки выделили специальное подмножество узлов $\mathfrak{M}(\Lambda)$. Оно состоит из всех ненулевых узлов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, для которых не существует ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ из Λ с $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$ при всех $i = 1, \dots, s$ и $|\eta_j| < |\gamma_j|$ хотя бы при одном $i = j$. Элементы множества $\mathfrak{M}(\Lambda)$ называются *относительными минимумами решётки*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Гиперболическим параметром решётки Λ называется число

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

где $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s$ — усечённая норма вектора $\vec{x}$, $\bar{x} = \max(|x|, 1)$.

Понятно, что для нахождения гиперболического параметра решётки достаточно вычислить только усечённые нормы её локальных минимумов. Найдём сначала множество локальных минимумов для решётки линейного сравнения (144).

ТЕОРЕМА 30. Пусть $0 < a < N$, $\Lambda(a, N)$ — решётка, заданная равенством (144), $q_{-1} = 0$, $p_{-1} = 1$, а для $i = 0 \dots l$ $\frac{p_i}{q_i}$ — i -тая подходящая дробь к дроби $\frac{a}{N}$ ($\frac{p_l}{q_l} = \frac{a}{N}$). Тогда множество локальных минимумов

$$\mathfrak{M}(\Lambda(a, N)) = \{\pm(q_i, q_i a - p_i N) | i = -1, \dots, l\}.$$

Следующая теорема позволяет непосредственно выписать множество локальных минимумов решётки (142) $\mathfrak{M}(\Lambda)$ с помощью разложения числа $\frac{a}{N}$ в цепную дробь.

ТЕОРЕМА 31. Пусть для $i = 0 \dots k$ $\frac{P_i}{Q_i}$ — i -тая подходящая дробь к дроби $\frac{P_k}{Q_k}$. Тогда множество локальных минимумов решётки (142) имеет вид

$$\mathfrak{M}(\Lambda_k(d)) = \{\pm(Q_k, Q_k), \pm(Q_k P_i + Q_i P_k, Q_k P_i - Q_i P_k), \pm(Q_k P_i - Q_i P_k, Q_k P_i + Q_i P_k) | i = -1, 0, \dots, k\}.$$

Установим соответствие между локальными минимумами, выписанными в теоремах 30 и 31 в случае, если $a = P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k$ и $N = 2P_k Q_k$.

ТЕОРЕМА 32. Пусть

$$\beta_i = \begin{cases} -1 + k - i, & \text{при } i = -1, 0, \dots, k - 1, \\ -1 - k + i, & \text{при } i = k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1. \end{cases} \quad (146)$$

Тогда

- $(q_i, q_i a - p_i N) = (-1)^{\beta_i+1} (Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k)$ при $i = -1, 0, \dots, k - 1$,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k, Q_k)$, при $i = k$,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k)$ при $i = k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1$.

Заметим, что приближения алгебраических решёток при $d = 4t + 1$ и при $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$ существенно отличаются.

При $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$ решётка $\Lambda_k(d)$ обладает свойством, что для любой точки решётки (x, y) точка (y, x) также принадлежит этой решётке. Это обстоятельство позволяет находить множество локальных минимумов эффективнее. При $d = 4t + 1$ решётка $\Lambda_k(d)$ данным свойством уже не обладает. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Теорема 28 показывает, что решётка $\Lambda_k(d)$ является решёткой линейного сравнения. Как показывают численные эксперименты данное свойство наблюдается не только в квадратичном случае. При больших размерностях приближения алгебраических решёток целочисленными часто также оказываются решётками линейного сравнения.

6. Заключение

В данной работе построен новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток.

Данный метод является обобщением и развитием метода В. С. Рябенского — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток. Также найдена погрешность данного метода. В случае использования бесконечной последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток будет иметь место достаточно быстрая сходимость.

Кроме того, предложен вариант построения оптимальных сеток в двумерном случае. Он основан на приближении алгебраических решёток целочисленными. В двумерном случае построенные таким образом решётки всегда будут давать обобщённые параллелепипедальные сетки. При этом имеются простые способы оценки качества полученных сеток. Один такой способ, основанный на использовании гиперболического параметра, рассмотрен в данной работе. В случае больших размерностей задача усложняется, однако, как показывают численные эксперименты, и в этом случае часто получаются сетки, близкие к оптимальным.

В последнее время получили развитие методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью глубоких нейронных сетей Deep Ritz Method [48] и Deep Galerkin Method [47]. Эффективность этих методов можно проследить в работах [39, 40, 40, 42].

Метод Deep Ritz заключается в следующем: дифференциальное уравнение сводится к вариационной задаче; решение этой задачи представляется в виде глубокой нейронной сети, коэффициенты которой находятся градиентными методами, а ошибка вычисляется с помощью численного интегрирования. Авторы для вычисления ошибки использовали метод Монте-Карло. В работах [38, 37] предложено в качестве альтернативы этому методу использовать квази-случайные сетки. Применение ЛП_τ-последовательности Соболя позволяет значительно уменьшить объём набора обучающих данных по сравнению с методом Монте-Карло.

Известно [23], что ЛП_τ-последовательности Соболя не реагируют на гладкость функций, поэтому интересно изучить использование либо сеток Смоляка, либо параллелепипедальных сеток Коробова, которые лишены этого недостатка.

В данной работе рассмотрен метод решения дифференциальных уравнений в частных производных на классах E_s^α . Однако, в последнее время, Н. Н. Добровольским был введён в рассмотрение некоторый подкласс данного класса M_s^α (см., например [9]). Одним из возможных направлений развития метода, применяемого в данной работе, может стать решение дифференциальных уравнений на классе M_s^α .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш. К. Абикинова, А. Утесов, Н. Т. Темиргалиев, О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева, Матем. заметки, 2012, том 91, выпуск 3, 459–463.
2. Е. А. Баилов, Н. Т. Темиргалиев. О дискретизации решений уравнения Пуассона, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006, том 46, номер 9, 1594–1604.
3. В. А. Быковский, С. В. Гассан, О параметре оптимальности параллелепипедальных сеток Коробова для кубатурных формул, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 8, 1363–1369.
4. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов — М.: Наука, 1981.
5. Герцог, А. С. Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле / А. С. Герцог // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 23(188). — Вып. 5. — Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. — С. 41–53.
6. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник Том 18 Выпуск 4, 2017 г, с. 6-85.

7. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. <http://elibrary.ru/item.asp?id=20905960>.
8. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012.
9. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–178.
10. Н. М. Добровольский. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2015 Т. 16. Вып. 1). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 176 — 190.
11. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
12. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т. 3 вып. 2(4) С. 43 – 59.
13. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып.1(9), Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 95 — 121.
14. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9. Вып. 1. С. 82 — 90.
15. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6090–84.
16. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
17. Добровольский, Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Н. М. Добровольский — Деп. в ВИНТИ 24.08.84. — № 6091–84.
18. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998. С. 90
19. Добровольский, Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н. М. Добровольский. — Тула, 1984.
20. Добровольский, Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н. М. Добровольский. — Москва, 1985.
21. Добровольский, Н. М. Теоретико-числовые сетки и их приложения / Н. М. Добровольский // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 67–70.

22. Добровольский, Н. М. Многомерные теоретико – числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.
23. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Численный эксперимент по применению параллелепипедальных сеток // Алгоритмические проблемы теории групп и подгрупп: Сб. Тула, 1990. С. 153–155.
24. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.
25. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062 — 1065.
26. Коробов, Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе / Н. М. Коробов. — М.: Физматгиз, 1963.
27. Коробов, Н. М. О приближённом вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 1207–1210.
28. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
29. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
30. А. В. Родионов. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом В. С. Рябенского // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 120–124.
31. А. В. Родионов. О методе Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле // Чебышевский сборник, 15:3 (2014), 48–85.
32. А. В. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 22, вып. 3, с. 241–249.
33. Рябенский В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232 — 237.
34. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
35. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.
36. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784 — 802.
37. Buchholz, A. et al. “Quasi-Monte Carlo Variational Inference.” ICML (2018).
38. Jingrun Chen, Rui Du, Panchi Li, Liyao Lyu. Quasi-Monte Carlo sampling for machine-learning partial differential equations //

39. Jingrun Chen, Rui Du & Keke Wu. (2020). A Comparison Study of Deep Galerkin Method and Deep Ritz Method for Elliptic Problems with Different Boundary Conditions. *Communications in Mathematical Research* . 36 (3). 354-376.
40. Jiao, Yuling et al. “Error Analysis of Deep Ritz Methods for Elliptic Equations.” *ArXiv abs/2107.14478* (2021): n. pag.
41. Liao, Yulei and P. Ming. “Deep Nitsche Method: Deep Ritz Method with Essential Boundary Conditions.” *ArXiv abs/1912.01309* (2019): n. pag.
42. Wang, Zhongjian and Zhiwen Zhang. “A mesh-free method for interface problems using the deep learning approach.” *J. Comput. Phys.* 400 (2020): n. pag.
43. V. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., 32, Cambridge University Press, Cambridge, 2018 , 550 pp.
44. Dinh Dũng, Vladimir Temlyakov, Tino Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, *Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona*, Birkhäuser Basel, Basel, 2018 , xi+218 pp.
45. V.N. Temlyakov, *Universal discretization*, *Journal of Complexity*, Volume 47, 2018, Pages 97-109,
46. V.N. Temlyakov, M. Ullrich, *On the fixed volume discrepancy of the Fibonacci sets in the integral norms*, *Journal of Complexity*, Volume 61, 2020, 101472.
47. Sirignano, Justin & Spiliopoulos, Konstantinos. (2017). DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 375. 10.1016/j.jcp.2018.08.029.
48. Weinan E, Bing Yu. The Deep Ritz method: A deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems // *Communications in Mathematics and Statistics*, 2018, vol. 6, p. 1–12.

REFERENCES

1. Sh. K. Abikenova, A. Utesov, N. T. Temirgaliyev, 2012, “On the discretization of solutions of the wave equation with initial conditions from the generalized Sobolev classes”, *Math. Notes*, vol. 91, iss. 3, pp. 459-463.
2. E. A. Bailov, N. T. Temirgaliyev, 2006, “On the discretization of solutions of the equation Poisson”, *J. calculation. matem. and math. phys.*, vol. 46, no. 9, pp. 1594-1604.
3. V. A. Bykovsky, S. V. Gassan, 2011, “On the optimality parameter of Korobov parallelepipedal grids for cubature formulas”, *Zh. calculation. matem. and math. phys.*, vol. 51, no. 8, pp. 1363-1369.
4. I. M. Vinogradov. *Fundamentals of number theory* / I. M. Vinogradov — M.: Nauka, 1981.
5. A. S. Herzog, 2011, “Parametrization of a four-dimensional grid of a biquadratic Dirichlet field”, *Scientific Vedomosti of the Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics*, vol. 23(188), iss. 5, pp. 41–53.
6. S. S. Demidov, E. A. Morozova, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, I. N. Balaba, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, L. P. Dobrovolskaya, A.V. Rodionov, O. A. Pihtilkova, 2017, “A number-theoretic method in approximate analysis”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, iss. 4, pp. 6-85.

7. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2012, “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients”, Tula: Publishing House of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, 283 p.
8. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2012, “Hyperbolic zeta functions of grids and lattices and calculation of optimal coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*.
9. N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, “Monoids of natural numbers in the number-theoretic method in approximate analysis”, *Chebyshevskii sbornik*, 2019, vol. 20, iss. 1. pp. 164–178.
10. N. M. Dobrovolsky, 2015, “On modern problems of the theory of the hyperbolic zeta function lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, iss. 1, pp. 176–190.
11. L. P. Dobrovolskaya, N. M. Dobrovolsky, A. S. Simonov, 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 9, iss. 1(25), pp. 185–223.
12. M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, O. V. Kiseleva, 2002, “On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 3, iss. 2(4), pp. 43–59.
13. M. N. Dobrovolsky, 2004, “On optimal coefficients of combined grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 95–121.
14. M. N. Dobrovolsky, 2003, “Estimates of sums on a hyperbolic cross”, *Izv. TulSU. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science*, vol. 9, iss. 1, pp. 82–90.
15. N. M. Dobrovolsky, 1984, “Hyperbolic zeta function of lattices”, Dep. in VINITI 24.08.84, N 6090-84.
16. N. M. Dobrovolsky, E. V. Manokhin, 1998, “Banach spaces of periodic functions”, *Izv. TulSU. Ser. Mechanics. Mathematics. Informatics*, vol. 4, iss. 3, pp. 56–67.
17. N. M. Dobrovolsky, 1984, “On quadrature formulas on classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ”, Dep. in VINITI 24.08.84. № 6091–84.
18. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, I. Yu. Rebrova, 1998, “On a recursive algorithm for lattices” *Approximation theory and harmonic analysis: Tez. dokl. International conf. Tula*, p. 90.
19. N. M. Dobrovolsky, 1984, “Number-theoretic grids and their applications”, Dis. ... candidate of physics. – mat. nauk, Tula.
20. N. M. Dobrovolsky, 1985, “Number-theoretic grids and their applications”, Abstract of the dissertation ... candidate of Physics.–mat. nauk. Moscow.
21. N. M. Dobrovolsky, 1985, “Number-theoretic grids and their applications”, *Number theory and its applications: Tez. dokl. All-Union. conf. Tbilisi*, pp. 67–70.
22. N. M. Dobrovolsky, 2005, “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications”, Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University.
23. N. M. Dobrovolsky, V. S. Vankova, 1990, “Numerical experiment on the use of parallelepipedal grids”, *Algorithmic problems of the theory of groups and subgroups: Tula Collection*, pp. 153–155.

24. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
25. N. M. Korobov, 1957, “Approximate calculation of multiple integrals using methods of number theory” *DAN USSR*, no. 6, pp. 1062–1065.
26. N. M. Korobov, 1963, “Number-theoretic methods in approximate analysis”, Moscow: Fizmatgiz.
27. N. M. Korobov, 1959, “On the approximate calculation of multiple integrals”, *DAN SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
28. N. M. Korobov, 2004, *Number-theoretic methods in approximate analysis*, (second edition). Moscow: ICNMO.
29. I. Y. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovolsky, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, 2018, “On classical number-theoretic grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, iss. 4, pp. 118–176.
30. A. V. Rodionov, 2013, “The solution of partial differential equations by the method of V. S. Ryabenky”, *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 13:4(2), pp. 120–124.
31. A.V. Rodionov, 2014, “About N. M. Korobov’s method of approximate solution of the Dirichlet problem”, *vol. Chebyshevskii sbornik*, vol. 15:3, pp. 48–85.
32. A. V. Rodionov, 2020, “Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices by integers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, iss. 3, pp. 241–249.
33. V. S. Ryabenky, 1961, “On one method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method”, *Tr. matem. V. A. Steklov Institute*, vol. 60, p. 232–237.
34. K. K. Frolov, 1976, “Upper estimates of the error of quadrature formulas on classes of functions”, *DAN USSR*. vol. 231, no. 4, pp. 818–821.
35. K. K. Frolov, 1979, “Quadrature formulas on classes of functions”, *Dis. ... candidate of Physical and Mathematical Sciences*. M.: VC of the USSR Academy of Sciences.
36. Sharygin I. F., 1963, “Lower estimates of the error of quadrature formulas on classes of functions”, *Zhurn. computational math. and checkmate. physics*. 7, no. 4, p. 784–802.
37. A. Buchholz, F. Wenzel, S. Mandt, 2018, “Quasi-Monte Carlo Variational Inference”, *35th International Conference on Machine Learning, ICML 2018*, t. 2, pp. 1055–1068.
38. J. Chen, R. Du, P. Li, L. Lyu, 2021, “Quasi-monte carlo sampling for solving partial differential equations by deep neural networks”, *Numerical Mathematics*, tom 14, vol. 2, pp. 377–404.
39. Jingrun Chen, Rui Du and Keke Wu, 202, “A comparative study of the Deep Galerkin method and the Deep Ritz method for elliptic problems with different boundary conditions”, *Communications in Mathematical Research*, pp. 36(3). 354-376.
40. Jiao, Yulin, 2021, “Error analysis of deep Ritz methods for elliptic equations”. *ArXiv abs/2107.14478*.
41. Y. Liao, P. Ming, 2021, “Deep nitsche method: Deep ritz method with essential boundary conditions”, *Communications in Computational Physics*, tom 29, vol. 5, pp. 1365–1384.

42. Z. Wang, Z. Zhang, 2020, “A mesh-free method for interface problems using the deep learning approach”, *Journal of Computational Physics*, том 400, no. 108963.
43. V. Temlyakov, 2018, “Multidimensional approximation”, *Cambridge monogr. Application. Calculate. Math.*, 32, Cambridge University Press, Cambridge, 550 p.
44. D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ulrich, 2018, “Hyperbolic cross approximation”, *Advanced courses in Mathematics-CRM Barcelona*, Birkäuser Basel, Basel, 218 p.
45. V. N. Temlyakov, 2018, “Universal sampling”, *Difficulty Log*, vol. 47, pp. 97–109.
46. V. N. Temlyakov, M. Ulrich, 2020, “On the discrepancy of a fixed volume of Fibonacci sets in integral norms”, *Journal of Complexity*, vol. 61, 101472.
47. J. Sirignano, K. Spiliopoulos, 2017, “DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, том 375, pp. 1339–1364.
48. E. Weinan, Bing Yu., 2018, “The Deep Ritz method: a numerical algorithm based on deep learning for solving variational problems”, *Communications in Mathematics and Statistics*, vol. 6, pp. 1–12.

Получено 24.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.