ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-245-255

Полиадические числа Лиувилля[1]

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, РАНХиГС (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Они представляют собой важную составляющую часть работ автора о бесконечной линейной независимости полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число. Как обычно, символ Похгаммера обозначается $(\gamma)_n$, по определению, $(\gamma)_0 = 1$, а при $n \geq 1$ имеем $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1)...(\gamma + n - 1)$. Рассматриваемые ряды сходятся в любом поле Q_p. Параметром рассматриваемых рядов типа Эйлера является полиадическое чмсло Лиувилля и значения рядов рассматриваются в полиадической точке Лиувилля.

Отметим работы Е.С. Крупицына, где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля и работы Е.Ю. Юденковой, в которых значения F-рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля.

Напоним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p-адических чисел Q_p.

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

В статье доказывается простое утверждение о том, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля Q_p. Иными словами, полиадическое число Лиувилля — глобально трансцедентное число. Устанавливается теорема о свойствах приближений совокупности p-адических чисел и ее следствие — достаточное условие алгебраической независимости совокупности p-адических чисел. Также получена теорема о глобальной алгебраической независимости совокупности полиадических чисел.

Ключевые слова: полиадическое число,полиадическое число Лиувилля.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. Г. Чирский. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 245–255.

[1]Работа выполнена при поддержке проекта Ведущие научные школы МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-245-255

Polyadic Liouville numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, RANEPA (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study here polyadic Liouville numbers, which are involved in a series of recent papers. The author considered the series

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n,$$

where λ is a certain polyadic Liouville number. The series considered converge in any field Q_p . Here $(\gamma)_n$ denotes Pochhammer symbol, i.e. $(\gamma)_0 = 1$, and for $n \geq 1$ we have$(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1)...(\gamma + n - 1)$. The values of these series were also calculated at polyadic Liouville number. The canonic expansion of a polyadic number λ is of the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of p-adic numbers Q_p.

We call a polyadic number λ a polyadic Liouville number, if for any n and P there exists a positive integer A such that for all primes p ,satisfying $p \leq P$ the inequality

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}$$

holds.

The paper gives a simple proof that the Liouville polyadic number is transcendental in any field Q_p. In other words,the Liouville polyadic number is globally transcendental. We prove here a theorem on approximations of a set of $p-$adic numbers and it's corollary — a sufficient condition of the algebraic independence of a set of $p-$adic numbers. We also present a theorem on global algebraic independence of polyadic numbers.

Keywords: polyadic number,polyadic Liouville number,

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Chirskii, 2021, "Polyadic Liouville numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 245–255.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Теория трансцендентных чисел достаточно подробно освещена в [1]. Лиувиллевы числа, с изучения которых фактически и началась теория трансцендентных чисел, изучались во многих работах. Отметим две из них, [2], [3], наиболее близких по содержанию к настоящей работе. Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Они представляют собой важную составляющую работ автора [4], где параметром рассматриваемого ряда типа Эйлера является полиадическое число Лиувилля и [5], где значения рядов рассматриваются в полиадической точке Лиувилля. В работах [6]-[9] содержатся результаты автора, относящиеся к развитию метода Зигеля-Шидловского и ряду других вопросов теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовскими нормированиями. Отметим работы Е.Ю. Юденковой [10], [11], в которых значения $F-$ рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля,работы В.Ю. Матвеева [12], [13] работу Е.С. Крупицына [14], где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля. Интересные результаты о трансцендентности есть в работе А.С. Самсонова [15]. Отметим оценки многочленов из работы А.Х. Муньоса Васкеса [16].

Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p-адических чисел Q_p. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} |a_n n!|_p = 0.$$

Так как $a_n \in \mathrm{Z}$, имеем $|a_n|_p \leq 1$, кроме того,

$$|n!|_p = p^{-\dfrac{n-S_n}{p-1}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Здесь S_n обозначает сумму цифр $p-$ичного разложения числа n. Разумеется, ряд, члены которого — целые числа, сходящийся во всех полях p-адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых п соответствующем кольце целых p-адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$.

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$\left|\lambda^{(p)} - A\right|_p < A^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля $p-$адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$этого ряда.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля — глобально трансцендентное число.*

Для доказательства этой теоремы предположим, что отличный от тождественного нуля многочлен $P(x)$ степени d имеет целые коэффициенты. Предположим, что в некотором поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется равенство $P(\lambda)=0$. Пусть $A-$ произвольное натуральное число. Тогда либо $P(A)=0$, либо с некоторой постоянной C_1имеет место неравенство

$$|\lambda - A|_p > C_1 A^{-d}.$$

Действительно, рассматривая разложение многочлена $P(x)$ по степеням переменной $x-A$, получаем

$$P(x) = P(A) + P^{'}(A)(x-A) + ... + \frac{P^{(d)}(A)}{d!}(x-A)^d.$$

Все числа $P^{'}(A), ..., \frac{P^{(d)}(A)}{d!}-$ целые, поэтому их p-адические нормы не превосходят 1. По предположению, при подстановке λ вместо x получаем равенство

$$P(A) + P^{'}(A)(\lambda-A) + ... + \frac{P^{(d)}(A)}{d!}(\lambda-A)^d = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$P(A) = D(\lambda - A) \tag{1}$$

где $D-$ некоторое целое $p-$адическое число. Если выполняется неравенство $P(A)\neq 0$, то очевидно, что с некоторой постоянной C_0 выполняются неравенства

$$0 < |P(A)| < C_0 A^d.$$

Для отличного от нуля рационального числа B справедлива оценка $|B|_p \geq B^{-1}$, поэтому

$$|P(A)|_p > \frac{1}{C_0 A^d} = C_1 A^{-d}.$$

Согласно (1),

$$|P(A)|_p \leq |\lambda - A|_p \,.$$

Таким образом,

$$|\lambda - A|_p > C_1 A^{-d},$$

что и утверждалось. По условию, $\lambda-$полиадическое число Лиувилля и для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

Ввиду произвольности чисел n и P для любого рассматриваемого простого числа p существует бесконечное множество пар чисел $n, A, n > d$, для которых выполняется это неравенство. Увеличивая число n получаем, что существует бесконечное множество чисел A таких,что

$$|\lambda - A|_p < C_1 A^{-d},$$

следовательно, существует такое натуральное число A, что одновременно с этим неравенством выполняется неравенство $P(A)\neq 0$. Согласно доказанному выше, это означает, что в поле $\mathbb{Q}_p$

выполняется неравенство $P(\lambda) \neq 0$. Ввиду произвольности многочлена $P(x)$ это означает трансцендентность суммы ряда λ в поле Q_p. Напомним, что число p — произвольное простое число. Глобальная трансцендентность полиадического числа Лиувилля доказана.

Сформулируем и докажем обобщение этой теоремы, аналог которого в работе [7] снабжен лишь очень краткой схемой доказательства.

Теорема 2. *Пусть p — простое число. Пусть*

$$\alpha_i \in \mathrm{Z}_p, A_i \in \mathrm{Z}, i = 1, ..., m.$$

Пусть $P(x_1, ..., x_m)$ ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, степени которого по переменным $x_i, i = 1, ..., m$ равны d_i. Тогда если

$$P(\alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \tag{2}$$

то либо для некоторой постоянной C_2 выполняется неравенство

$$\max_{i=1,...,m} |\alpha_i - A_i|_p > C_2 |A_1|^{-d_1} ... |A_m|^{-d_m}, \tag{3}$$

либо выполняется равенство

$$P(A_1, ..., A_m) = 0. \tag{4}$$

Следствие. *Если для любого ненулевого многочлена $P(x_1, ..., x_m)$ с целыми коэффициентами, степени которого по переменным $x_i, i = 1, ..., m$ равны d_iи любой постоянной C_2 существуют $A_i \in \mathrm{Z}, i = 1, ..., m$ такие, что*

$$|\alpha_i - A_i|_p < C_2 |A_1|^{-d_1} ... |A_m|^{-d_m}, i = 1, ..., m \tag{5}$$

и

$$P(A_1, ..., A_m) \neq 0, \tag{6}$$

то $\alpha_1, ..., \alpha_m$— алгебраически независимые элементы Z_p.

Доказательство теоремы 2.

Из (2)следует, что многочлен $P(x_1, ..., x_m)$ можно представить в виде

$$P(x_1, ..., x_m) = \sum B_{l_1,...,l_m}(x_1 - \alpha_1)^{l_1} ... (x_m - \alpha_m)^{l_m}, \tag{7}$$

где суммирование в правой части равенства (7) производится по всем наборам неотрицательных целых чисел $l_1, ..., l_m$, удовлетворяющих условиям $l_i \leq d_i, i = 1, ..., m$, коэффициенты $B_{l_1,...,l_m} \in \mathrm{Z}_p$, причем $B_{0,...,0} = 0$. Равенство (7) при $x_i = A_i, i = 1, ..., m$ дает

$$P(A_1, ..., A_m) = \sum B_{l_1,...,l_m}(A_1 - \alpha_1)^{l_1} ... (A_m - \alpha_m)^{l_m},$$

откуда, ввиду равенства $B_{0,...,0} = 0$, получаем

$$P(A_1, ..., A_m) = \sum_{i=1}^{m} D_i(A_i - \alpha_i), \tag{8}$$

где $D_i \in \mathrm{Z}_p, i = 1, ..., m$. Из (8)следует, что

$$|P(A_1, ..., A_m)|_p \leq \max_{i=1,...,m} |\alpha_i - A_i|_p \max_{i=1,...,m} |D_i|_p \leq \max_{i=1,...,m} |\alpha_i - A_i|_p. \tag{9}$$

С другой стороны, если $P(A_1, ..., A_m) \neq 0$, то выполнено неравенство

$$|P(A_1, ..., A_m)| \leq C_3 |A_1|^{d_1} ... |A_m|^{d_m}. \tag{10}$$

По свойству p-адической нормы, если целое число M отлично от нуля, то $|M|_p \geq M^{-1}$, поэтому (9), (10) дают (3). Теорема 2 доказана.

Докажем следствие. Неравенства (5),(6), справедливые для любого ненулевого многочлена $P(x_1, ..., x_m-)$ с целыми коэффициентами означают,что не выполнены соотношения (3) и (4), следовательно, ни для какого ненулевого многочлена с целыми коэффициентами не выполнено равенство (2). Это и доказывает следствие теоремы 2.

Для всех $i = 1, ..., m$ обозначим

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n}, a_{i,n} \in \mathrm{N} \tag{11}$$

$$A_{i,N} = \sum_{n=0}^{N} a_{i,n} \tag{12}$$

$$r_{i,N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{i,N} \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть для простого числа p при $N \geq N_p$, где N_p- натуральное число, зависящее от p, выполнены неравенства*

$$|r_{i,N}|_p < (\max_{i=1,...,m} A_{i,N})^{-\gamma_p(N)}, i = 1, ..., m, \tag{14}$$

где $\gamma_p(N) \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Кроме того, пусть

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln |r_{i,N}|_p}{\ln |r_{i+1,N}|_p} = 0, i = 1, ..., m-1. \tag{15}$$

Тогда ряды (11)*сходятся к алгебраически независимым элементам Z_p.*

Следствие. *Если условия теоремы 3 выполнены для любого простого числа p то ряды* (11) *— глобально алгебраически независимые полиадические числа.*

Доказательство теоремы 3. Пусть p — простое число. При $N \geq N_p$ рассмотрим числа $A_{i,N}, i = 1, ..., m$. Из (12), (13), (14) следует, что ряды (11)сходятся и для любой постоянной C_2 и любых неотрицательных целых чисел $d_i, i = 1, ..., m$ выполнется неравенство

$$|\alpha_i - A_{i,N}|_p < C_2 |A_{1,N}|^{-d_1} ... |A_{m,N}|^{-d_m}, i = 1, ..., m.$$

Если при некотором N выполнено неравенство

$$P(A_{1,N}, ..., A_{m,N}) \neq 0,$$

то по следствию теоремы 2 ряды (11)сходятся к алгебраически независимым элементам Z_p. В противном случае, если для всех $N \geq N_p$ имеем равенство

$$P(A_{1,N}, ..., A_{m,N}) = 0, \tag{16}$$

то при переходе в равенстве (16) к пределу при $N \to +\infty$ получаем

$$P(\alpha_1, ..., \alpha_m) = 0. \tag{17}$$

Как и в (7) имеем равенство, справедливое при всех $N \geq N_p$:

$$P(x_1, ..., x_m) = \sum B_{l_1,...,l_m}(x_1 - \alpha_1)^{l_1} ... (x_m - \alpha_m)^{l_m},$$

из которого с учетом (16) и (17) при подстановке $x_i = A_{i,N}$ вытекает:

$$0 = \sum B_{l_1,...,l_m}(A_{1,N} - \alpha_1)^{l_1}...(A_{m,N} - \alpha_m)^{l_m}, \tag{18}$$

где суммирование в правой части равенства (18) производится по всем наборам неотрицательных целых чисел $l_1, ..., l_m$, удовлетворяющих условиям $l_i \le d_i, i = 1, ..., m$, коэффициенты $B_{l_1,...,l_m} \in \mathrm{Z}_p$, причем $B_{0,...,0} = 0$. Кроме того, так как рассматриваемый многочлен ненулевой, среди коэффициетов $B_{l_1,...,l_m}$ есть отличные от нуля. Равенство (18) перепишем в виде

$$0 = \sum B_{l_1,...,l_m}(-r_{1,N})^{l_1}...(-r_{m,N})^{l_m}. \tag{19}$$

Рассмотрим любые два отличных от нуля слагаемых в правой части равенства (19), пусть это

$$B_{l_1,...,l_m}(-r_{1,N})^{l_1}...(-r_{m,N})^{l_m} \tag{20}$$

и

$$B_{k_1,...,k_m}(-r_{1,N})^{k_1}...(-r_{m,N})^{k_m}, \tag{21}$$

причем наборы чисел $(l_1, ..., l_m)$ и $(k_1, ..., k_m)$ различные. Тогда из (20) и (21) следует

$$\ln \frac{\left|B_{l_1,...,l_m}(-r_{1,N})^{l_1}...(-r_{m,N})^{l_m}\right|_p}{\left|B_{k_1,...,k_m}(-r_{1,N})^{k_1}...(-r_{m,N})^{k_m}\right|_p} = \ln \frac{\left|B_{l_1,...,l_m}\right|_p}{\left|B_{k_1,...,k_m}\right|_p} + \sum_{i=1}^{m}(l_i - k_i)\ln |r_{i,N}|_p\,. \tag{22}$$

Среди чисел $l_i - k_i$ есть отличные от нуля. Пусть $s-$ наибодьшее из чисел i удовлетворяющих такому условию, т.е. пусть $l_s - k_s \ne 0$, но эти разности с большими, чем s номерами (если такие есть) равны нулю. Из условия (14) следует, что

$$|r_{i,N}|_p \to 0, \ln |r_{i,N}|_p \to -\infty, N \to +\infty, i = 1, ..., m.$$

Из равенства (22) и условия (15) получаем, что главным членом правой части формулы (22) является $(l_s - k_s)\ln |r_{s,N}|_p$. Тогда, в зависимости от знака числа $l_s - k_s \ne 0$, правая часть формулы (22) стремится либо к $+\infty$ либо к $-\infty$. Это означает,что отношение p-адических норм величин (20),(21) стремится либо к бесконечности, либо к нулю при стремлении $N \to +\infty$. Поскольку отличных от нуля коэффициентов $B_{l_1,...,l_m}$ конечное число, при достаточно большом N одно из соответствующих слагаемых в правой части равенства (19)имеет p-адическую норму большую, чем остальные слагаемые и p-адическая норма правой части этого равенства при рассматриваемом N равна p-адической норме этого слагаемого и отлична от 0, что противоречит равенству (19). Теорема 3 доказана.

Следствие теоремы 3 не требует отдельного доказательства.

В следующей теореме приведен пример применения теоремы 3 к явно заданной совокупности полиадических чисел. Выберем произвольным образом натуральные числа

$$n_{1,0} < n_{2,0} < ... < n_{m,0}. \tag{23}$$

Пусть для некоторого неотрицательного целого числа N определены натуральные числа

$$n_{1,N} < n_{2,N} < ... < n_{m,N}. \tag{24}$$

Положим

$$M_{N+1} = \min \frac{\ln p}{p - 1}, \tag{25}$$

где минимум в правой части равенства (23)взят по всем простым числам, удовлетворяющим неравенству
$$p \leq n_{m,N}.$$
Пусть $\gamma(N) \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Потребуем, чтобы число $n_{1,N+1}$ удовлетворяло неравенству
$$n_{1,N+1}M_{N+1} - \ln n_{1,N+1} > \gamma(N)\ln(2(n_{m,N}!)) \tag{26}$$
и чтобы натуральные числа $n_{i+1,N+1}, i = 1, ..., m-1$ удовлетворяли условиям
$$n_{i,N+1} < \varphi_i(N) n_{i+1,N+1}, \tag{27}$$
где
$$\varphi_i(N) \to 0, N \to +\infty, i = 1, ..., m-1. \tag{28}$$
Пусть
$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty}(n_{i,k})! \tag{29}$$
$$A_{i,N} = \sum_{k=0}^{N}(n_{i,k})! \tag{30}$$
$$r_{i,N} = \sum_{k=N+1}^{\infty}(n_{i,k})! \tag{31}$$
Теорема 4. *Пусть натуральные числа $n_{i,k}, i = 1, ..., m, k = 1, 2, ...$ удовлетворяют условиям* (23) - (28). *Тогда для любого простого числа p ряды* (29)*сходятся к алгебраически независимым элементам Z_p. Иными словами, полиадические числа* (29) *глобально алгебраически независимы.*

Доказательство теоремы 4.

Из (24),(29) - (31) вытекают равенства
$$|r_{i,N}|_p = |(n_{i,N+1}!)|_p, i = 1, ..., m. \tag{32}$$
Из условия (27)следует, что
$$\max_{i=1,...,m} |r_{i,N}|_p = |(n_{1,N+1}!)|_p \tag{33}$$
и мы используем формулу для вычисления p-адической нормы факториала
$$|(n_{1,N+1}!)|_p = \exp(-\frac{\ln p}{p-1}(n_{1,N+1} - S_{n_{1,N+1}})), \tag{34}$$
где $S_{n_{1,N+1}}$ обозначает сумму цифр p-ичного разложения числа $n_{1,N+1}$. Очевидно неравенство
$$S_{n_{1,N+1}} \leq (p-1)\log_p n_{1,N+1} = (p-1)\frac{\ln n_{1,N+1}}{\ln p}. \tag{35}$$
Ввиду (34) и (35)
$$\ln|(n_{1,N+1}!)|_p \leq -\frac{\ln p}{p-1} n_{1,N+1} + \ln n_{1,N+1}. \tag{36}$$
Для простого числа p выберем число N_p наименьшим натуральным числом N, для которого выполняется неравенство $n_{m,N} \geq p$. Тогда из равенства (25)следует, что при $N \geq N_p$
$$M_{N+1} \leq \frac{\ln p}{p-1}. \tag{37}$$

Из неравенств (26)и (37)следует

$$-\frac{\ln p}{p-1}n_{1,N+1}+\ln n_{1,N+1}\leq -M_{N+1}n_{1,N+1}+\ln n_{1,N+1}<-\gamma(N)\ln(2(n_{m,N}!)). \qquad (38)$$

Согласно (36),(38)

$$|(n_{1,N+1}!)|_p\leq \exp(-\gamma(N)\ln(2(n_{m,N}!))). \qquad (39)$$

Для всех $i=1,...,m-1$,согласно (30)

$$A_{i,N}\leq A_{m,N}=\sum_{k=0}^{N}(n_{m,k})!=(n_{m,N})!(1+\frac{(n_{m,0})!}{(n_{m,N})!}+...+\frac{(n_{m,N-1})!}{(n_{m,N})!})<$$

$$<(n_{m,N})!(1+(N-1)\frac{(n_{m,N-1})!}{(n_{m,N})!})<2(n_{m,N})!. \qquad (40)$$

Из (32), (39), (40) следует, что при $N\geq N_p$ выполнены неравенства (14). Соотношения (15) сразу следуют из условий (27) и равенств (32),(33). Применение теоремы 3 завершает доказательство теоремы 4.

3. Заключение

Полученные результаты будут полезны при исследовании арифметических свойств полиадических рядов, коэффициенты которых связаны с полиадическими числами Лиувилля. Это относится как к развитию метода Зигеля-Шидловского, так и к применениям аппроксимаций Эрмита-Паде первого и второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с. (Английский перевод: Andrei B. Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467 pp.).

2. Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers. // J. Pure and Appl. Algebra.-1978.-13.-pp.41-47.

3. Waldschmidt M. Independance algebrique de nombres de Liouville. // Lect.Notes Math.-1990.-1415.-pp.225-235.

4. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494, с. 69-70. (Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)

5. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 − 312

6. Чирский В. Г. Обобщение понятия глобального соотношения. // Труды по теории чисел. Зап.научн.сем.ПОМИ.-322.-ПОМИ,Спб.-2005.-220-232.

7. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем.,мех.-1994.-№3.-с.93-95.

8. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.

9. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.

10. Юденкова Е. Ю. Арифметические свойства рядов некоторых классов в полиадической лиувиллевой точке. // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 536 – 542

11. Юденкова Е. Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость згачений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках. // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346

12. Матвеев В. Ю., Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов // Чебышевский сборник.-2018.-т.17.- вып. 3.-с. 156 – 167

13. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник. 2019.-т.20.- вып. 2.-с. 383 – 390

14. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов. // Чебышевский сборник. 2019.-т. 20.- вып. 2.-с. 374 – 382

15. Самсонов А. С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II. // Чебышевский сборник. 2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346

16. Муньос Васкес А. Х. Арифметические свойства некоторых гипергеометрических F-рядов.. // Чебышевский сборник. 2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 519 – 527

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B. 1989.“Transcendental Numbers“, *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*.467pp.

2. Adams. W. 1990.“On the algebraic independence of certain Liouville numbers”,*J.Pure and Appl.Algebra.*, Vol, 13, pp. 41-47.

3. Waldschmidt. M. 1990.“Independance algebrique de nombres de Liouville.”,*Lect.Notes Math.*, Vol, 1415, pp. 225-235.

4. Chirskii V. G., 2020. “Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter”, *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp. 412-413.

5. Chirskii V. G., 2021.“Arithmetic properties of values at polyadic Liouvillean point of Euler-type series with polyadic Liouvillean parameter”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 304-312.

6. Chirskii V. G., 2006. “Generalization of the Notion of a Global Relation”, *(*J. Math. Sci(N.Y)), Vol. 137, no. 2,pp. 4744-4754.

7. Chirskii V. G. 1994. “Qn series which are algebraically independent in all local fields”, *(*Vestn. Mosc. univ. Ser. 1.,Math., mech.), no. 3, pp. 93-95

8. Chirskii V. G. 2019. “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp. 286-305.

9. Chirskii V. G. 2020. “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp. 175-184.

10. Yudenkova E. Yu. 2021 "Arithmetic properties of series of certain classes at polyadic Liouvillean point", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 536-542

11. Yudenkova E. Yu. 2021. "Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 334-346.

12. Matveev V. Yu. 2016. "Algebraic independence of certain almost polyadic series", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, no.3, pp. 156-167.

13. Matveev V. Yu. 2019. "Properties of elements of direct products of fields", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp. 383-390.

14. Krupitsin E. S. 2019. "Arithmetic properties of series of certain classes", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp. 374-382.

15. Samsonov A. S. 2021. "Arithmetic properties of elements of direct products of p-adic fields. II", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 236-256.

16. Munjos Vaskes A. H. 2021. "Arithmetic properties of certain hypergeometric F-series", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp. 5 19-527.

Получено 11.06.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.