ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-232-244

 $\bar{\omega}$ -веерные формации конечных групп

М. М. Сорокина, А. А. Горепекина

Сорокина Марина Михайловна — доктор физико-математических наук, Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского (г. Брянск).

e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Горепекина Анастасия Андреевна — аспирант, Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского (г. Брянск).

e-mail: nastya3296@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются только конечные группы. Работа посвящена исследованию формаций, т.е. классов групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Для непустого множества ω простых чисел В.А. Ведерниковым с помощью двух видов функций были определены ω -веерные формации конечных групп. Развивая функциональный подход, предложенный В.А. Ведерниковым, в данной работе для произвольного разбиения $\bar{\omega}$ множества ω построены $\bar{\omega}$ -веерные формации. При построении используется σ -концепция А.Н. Скибы исследования конечных групп и их классов, где σ — произвольное разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. В работе приведены примеры $\bar{\omega}$ -веерных формаций, установлены их свойства (существование $\bar{\omega}$ -спутников различных видов; достаточные условия принадлежности группы G $\bar{\omega}$ -веерной формации; взаимосвязь с ω -веечными и $\mathbb{P}_\sigma$ -веечными формациями).

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, $\bar{\omega}$ -веерная формация, направление $\bar{\omega}$ -веерной формации.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

М. М. Сорокина, А. А. Горепекина. $\bar{\omega}$ -веерные формации конечных групп // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 232–244.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-232-244

 $\bar{\omega}$ -fibered Formations of Finite Groups

М. М. Sorokina, А. А. Gorepekina

Sorokina Marina Mikhailovna — doctor of physical and mathematical sciences, Bryansk State University named after I. G. Petrovsky (Bryansk)

e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Gorepekina Anastasia Andreevna — postgraduate student, Bryansk State University named after I. G. Petrovsky (Bryansk)

e-mail: nastya3296@mail.ru

Abstract

Only finite groups are considered. The work is devoted to the study of formations which are classes of groups that are closed with respect to homomorphic images and subdirect products. For a non-empty set ω of primes V.A. Vedernikov, using two types of functions, defined ω -fibered formations of finite groups. Developing this functional approach, in the paper for an arbitrary partition $\bar{\omega}$ of the set ω we constructed $\bar{\omega}$ -fibered formations. The construction uses the σ -concept of A.N. Skiba for the study of finite groups and their classes, where σ is an arbitrary partition of the set $\mathbb{P}$ of all primes. We gave examples of $\bar{\omega}$ -fibered formations, established their properties (existence of $\bar{\omega}$ -satellites of different types; sufficient conditions for a group G to belong to an $\bar{\omega}$ -fibered formation; relationship with ω -fibered and $\mathbb{P}_\sigma$ -fibered formations).

Keywords: finite group, class of groups, formation, $\bar{\omega}$ -fibered formation, direction of an $\bar{\omega}$ -fibered formation.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

M. M. Sorokina, A. A. Gorepekina, 2021, " $\bar{\omega}$ -fibered Formations of Finite Groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 232–244.

1. Введение

В теории конечных групп многие исследования связаны с использованием понятия разбиения множества на классы. Так, фундаментальный π -метод, разработанный С.А. Чунихиным для изучения подгруппового строения конечных групп (см., например, [1]), определяет двухэлементное разбиение $\{\pi, \pi'\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. В работе [2] Л.А. Шеметков ввел в рассмотрение произвольное разбиение σ множества $\mathbb{P}$ и определил $\tilde{C}_\sigma$ -системы в группах, с помощью которых установил ряд свойств $\mathfrak{F}$ -подгрупп конечных групп для локальной формации $\mathfrak{F}$ (см. также [3], глава V). В 2013 году А.Н. Скиба для разбиения σ множества $\mathbb{P}$ сформулировал определения σ -примарной группы, σ -группы, σ -разрешимой, σ -нильпотентной групп и установил их ключевые свойства [4]. В дальнейшем в серии статей (см., например, [5] – [8]) им была разработана σ -теория конечных групп, позволяющая не только получать новые результаты в данном направлении, но и оценивать с иной точки зрения многие известные факты в теории групп. В работе [9] (см. также [10]) А.Н. Скиба построил σ -локальные формации — обобщение локальных формаций, хорошо изученных и нашедших многочисленные применения (см. [3], [11], [12]). В настоящее время σ -теория А.Н. Скибы интенсивно развивается в направлении исследования различных классов групп (см., например, [13] – [15]).

Другим известным обобщением понятия локальной формации является понятие ω -локальной формации, где ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ [16]. В настоящее время ω -локальные формации также хорошо изучены и находят применение как в теории групп, так и в теории классов групп (см., например, [17]). В 1999 году В.А. Ведерников разработал концепцию ω -веерности для классов конечных групп, позволившую построить серию новых видов формаций [18]. При этом ω -локальные формации составили один из видов данной серии. В настоящей работе авторы применяют σ -концепцию А.Н. Скибы к построению $\bar{\omega}$ -веерных формаций конечных групп, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω .

2. Предварительные сведения

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [12]). Символ $:=$ означает равенство по определению. Запись $N \triangleleft G$ означает, что N — нормальная подгруппа группы G . *Классом групп* называется всякая совокупность групп, содержащая с каждой своей группой все группы

ей изоморфные. *Формацией* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно гомоморфных образов (т.е. $G \in \mathfrak{F}$, $N \triangleleft G \Rightarrow G/N \in \mathfrak{F}$) и подпрямых произведений (т.е. $G/A \in \mathfrak{F}$, $G/B \in \mathfrak{F} \Rightarrow G/A \cap B \in \mathfrak{F}$). *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп (т.е. $G \in \mathfrak{F}$, $N \triangleleft G \Rightarrow N \in \mathfrak{F}$) и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих данному классу (т.е. $G = AB$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$). *Формация Фиттинга* — класс групп, являющийся формацией и классом Фиттинга. Для непустого множества групп $\mathfrak{X}$ через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный множеством $\mathfrak{X}$, т.е. $(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$; $form\mathfrak{X}$ ($formfit\mathfrak{X}$) — формация (формация Фиттинга), порожденная множеством $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех формаций (всех формаций Фиттинга), содержащих $\mathfrak{X}$. Для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая $\mathfrak{F}$; для формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем, $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп; $\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\emptyset \subset \pi \subseteq \mathbb{P}$, $p \in \mathbb{P}$; $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$; $\mathfrak{G}_{\pi}$ — класс всех π -групп; $\mathfrak{N}_p := \mathfrak{G}_{\{p\}}$ — класс всех p -групп; $\mathfrak{G}_{p'}$:= $\mathfrak{G}_{\{p\}'}$ — класс всех p' -групп; $\mathfrak{S}_{c\pi}$ — класс всех групп, у которых каждый главный π -фактор централен; $\mathfrak{S}_{c\pi} := \mathfrak{S}_{c\{p\}}$; $O_{\pi}(G) := G_{\mathfrak{G}_{\pi}}$ — $\mathfrak{G}_{\pi}$ -радикал группы G ; $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G .

Для классов групп $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ через $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ обозначается их произведение, т.е. $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 := \{G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \triangleleft G \text{ такая, что } N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2\}$. Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2\}$ — *радикальное произведение* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$; если $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}$ — *корадикальное произведение* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. При доказательстве утверждений используются следующие известные результаты.

ЛЕММА 1. (1) Пусть $\mathfrak{F}_1$ — класс групп, $\mathfrak{F}_2$ — формация Фиттинга. Если $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2$, G — группа, $N \triangleleft G$ и $N \in \mathfrak{F}_1$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}/N$ ([18], Лемма 1 (8)).

(2) Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга, $\mathfrak{F}_2$ — класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ ([12], IX, 1.11).

(3) Если $\mathfrak{F}_1$ — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп, $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ ([12], IV, 1.7).

(4) Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — формации, то класс $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ является формацией ([12], IV, 1.8).

3. Основные результаты

3.1. Построение $\bar{\omega}$ -формаций и их простейшие свойства

В дальнейшем ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\bar{\omega}$ обозначает разбиение множества ω , т.е. $\bar{\omega} := \{\omega_i \mid i \in I\}$, $\omega_i \neq \emptyset$ для любого $i \in I$, $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ и $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Пусть G — группа, $\mathfrak{F}$ — класс групп. Тогда

$$\bar{\omega} \cap \pi(G) := \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}; \quad \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{F}) := \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\bar{\omega}FR$ -функцией (иначе, формационно-радикальной $\bar{\omega}$ -функцией) назовем функцию вида $\gamma : \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$, удовлетворяющую условию $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. $\bar{\omega}F$ -функцией (или, следуя [15], обобщенно формационной $\bar{\omega}$ -функцией) назовем функцию вида $f : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(0) \neq \emptyset$.

Для $\bar{\omega}F$ -функции f , следуя [16], введем в рассмотрение следующее подмножество множества $\bar{\omega}$: $Supp_{\bar{\omega}}(f) := \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid f(\omega_i) \neq \emptyset\}$.

ЛЕММА 2. Пусть γ и f — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\bar{\omega}F$ -функция соответственно, $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$. Тогда класс $\mathfrak{F}$ имеет следующее строение:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{G}_{\omega}f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)} \gamma(\omega_i)f(\omega_i)) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)} \mathfrak{G}_{\omega_i'}), \text{ если } \emptyset \neq Supp_{\bar{\omega}}(f) \neq \bar{\omega}; \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{G}_{\omega}f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega}} \gamma(\omega_i)f(\omega_i)), \text{ если } Supp_{\bar{\omega}}(f) = \bar{\omega}; \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{G}_{\omega}f(0) \cap (\cap_{\omega_i \in \bar{\omega}} \mathfrak{G}_{\omega_i'}), \text{ если } Supp_{\bar{\omega}}(f) = \emptyset. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\emptyset \neq Supp_{\bar{\omega}}(f) \neq \bar{\omega}$, $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{H}_1 := \mathfrak{G}_{\omega}f(0)$, $\mathfrak{H}_2 := \cap_{\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)} \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$, $\mathfrak{H}_3 := \cap_{\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)} \mathfrak{G}_{\omega_i'}$. Установим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

I. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_{\omega}(G) \in f(0)$ (а) и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ (б). Проверим, что $G \in \mathfrak{H}$.

1. Из (а) следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\omega}f(0) = \mathfrak{H}_1$.

2. Установим, что $G \in \mathfrak{H}_2$. Пусть $\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)$. Если $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то из (б) получаем $G \in \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$. Если $\omega_i \notin \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то $\omega_i \cap \pi(G) = \emptyset$ и $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i'}$. Ввиду определения 1, $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$. Поскольку $\omega_i \in Supp_{\bar{\omega}}(f)$, то $f(\omega_i) \neq \emptyset$ и, следовательно, $\gamma(\omega_i) \subseteq \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$. Таким образом, $G \in \gamma(\omega_i)f(\omega_i)$. Тем самым установлено, что $G \in \mathfrak{H}_2$.

3. Проверим, что $G \in \mathfrak{H}_3$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)$. Тогда $f(\omega_i) = \emptyset$ и, ввиду (б), $\omega_i \notin \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Это означает, что $\omega_i \cap \pi(G) = \emptyset$ и $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i'}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}_3$.

Из 1 – 3 получаем, что $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

II. Установим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\omega}$ — класс Фиттинга и $f(0)$ — формация, а значит, класс, замкнутый относительно гомоморфных образов, то по лемме 1 (2) $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_{\omega} \diamond f(0)$. Тогда из $H \in \mathfrak{H}_1$ следует, что $H/O_{\omega}(H) \in f(0)$ (с). Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Покажем, что $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Если $\omega_j \in \bar{\omega} \setminus Supp_{\bar{\omega}}(f)$, то из $H \in \mathfrak{H}_3$ получаем $H \in \mathfrak{G}_{\omega_j'}$, что невозможно. Следовательно, $\omega_j \in Supp_{\bar{\omega}}(f)$. Тогда из $H \in \mathfrak{H}_2$ имеем $H \in \gamma(\omega_j)f(\omega_j)$. Поскольку, согласно лемме 1 (2), $\gamma(\omega_j)f(\omega_j) = \gamma(\omega_j) \diamond f(\omega_j)$, то $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. С учетом (с) получаем, что $H \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из I и II заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Доказательство равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ в случае $Supp_{\bar{\omega}}(f) = \bar{\omega}$ и доказательство равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_3$ в случае $Supp_{\bar{\omega}}(f) = \emptyset$ проводятся аналогично. $\square$

Поскольку пересечение любой совокупности формаций является формацией, то из леммы 2, в силу леммы 1 (3, 4), получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть γ и f — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\bar{\omega}F$ -функция соответственно. Тогда класс $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$ является формацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть γ и f — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\bar{\omega}F$ -функция соответственно. Формацию

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$$

назовем $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником f , и обозначим $\mathfrak{F} := \bar{\omega}F(f, \gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Всякая $\bar{\omega}$ -веерная формация $\mathfrak{F}$ является непустой, поскольку $\pi(1) = \emptyset$ и, следовательно, по определению 2 $G = 1 \in \mathfrak{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следуя [11], для $\bar{\omega}F$ -функций f_1 и f_2 полагаем $f_1 \leq f_2$, если $f_1(x) \subseteq f_2(x)$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$; для совокупности $\bar{\omega}F$ -функций $\{f_j \mid j \in J\}$ через $\cap_{j \in J} f_j$ обозначим $\bar{\omega}F$ -функцию f , удовлетворяющую условию $f(x) = \cap_{j \in J} f_j(x)$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$; $\bar{\omega}$ -спутник f $\bar{\omega}$ -веерной формации $\mathfrak{F}$ назовем внутренним, если $f(x) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$. Следуя [19], через $\bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ обозначим пересечение всех $\bar{\omega}$ -веерных формаций с направлением γ , содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

ЛЕММА 3. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$ обладает таким внутренним $\bar{\omega}$ -спутником h , что $h(0) = f(0) \cap \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = f(\omega_i) \cap \mathfrak{F}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

(2) Формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$ обладает таким $\bar{\omega}$ -спутником b , что $b(0) = \mathfrak{F}$ и $b(\omega_i) = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

(3) Пусть $\mathfrak{F}_j = \bar{\omega}F(f_j, \gamma)$, где $j \in J$. Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$, где $f = \bigcap_{j \in J} f_j$. В частности, пересечение любой совокупности $\bar{\omega}$ -всерных формаций с направлением γ является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с направлением γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$, где h — $\bar{\omega}F$ -функция, имеющая следующее строение: $h(x) = f(x) \cap \mathfrak{F}$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{0\}$. Тогда $h \leq f$ и, согласно определению 2, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in \mathfrak{F}$. Тогда, согласно определению 2, $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \cap \mathfrak{F} = h(\omega_i)$ (а). Далее, из $G \in \mathfrak{F}$, ввиду определения 2, получаем $G/O_{\omega}(G) \in f(0) \cap \mathfrak{F} = h(0)$ (б). Из (а) и (б) следует, что $G \in \mathfrak{H}$, и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ и, значит, h — внутренний $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathfrak{B} := \bar{\omega}F(b, \gamma)$, где b — $\bar{\omega}F$ -функция, имеющая следующее строение: $b(0) = \mathfrak{F}$ и $b(\omega_i) = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Покажем, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_{\omega}(G) \in \mathfrak{F} = b(0)$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) = b(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ и B — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B обладает единственной минимальной нормальной подгруппой P , причем $P = B^{\mathfrak{F}}$. Так как $B \in \mathfrak{B}$, то $B/O_{\omega}(B) \in b(0) = \mathfrak{F}$ и, следовательно, по определению $\mathfrak{F}$ -корадикала группы справедливо включение $P \subseteq O_{\omega}(B)$. Отсюда получаем, что $B/O_{\omega}(B) \cong (B/P)/(O_{\omega}(B)/P) = (B/P)/O_{\omega}(B/P)$. Так как $B/P \in \mathfrak{F}$, то по определению 2 $(B/P)/O_{\omega}(B/P) \in f(0)$ и поэтому $B/O_{\omega}(B) \in f(0)$ (с). Поскольку $B \in \mathfrak{B}$, то для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(B)$ выполняется $B/B_{\gamma(\omega_i)} \in b(\omega_i) = f(\omega_i)$ (d). Таким образом, из (с) и (d) получаем, что $B \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ и $\mathfrak{M} := \bar{\omega}F(f, \gamma)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}_j$ и, значит, $G/O_{\omega}(G) \in f_j(0)$ и для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ справедливо $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f_j(\omega_k)$, $j \in J$. Поэтому $G/O_{\omega}(G) \in \bigcap_{j \in J} f_j(0) = f(0)$ и $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in \bigcap_{j \in J} f_j(\omega_k) = f(\omega_k)$. Согласно определению 2, $G \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Тогда $M/O_{\omega}(M) \in f(0) = \bigcap_{j \in J} f_j(0)$ и $M/M_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k) = \bigcap_{j \in J} f_j(\omega_k)$ для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(M)$, $j \in J$. Отсюда следует, что $M/O_{\omega}(M) \in f_j(0)$ и $M/M_{\gamma(\omega_k)} \in f_j(\omega_k)$ для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(M)$, $j \in J$. Поэтому $M \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J$, и, значит, $M \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Утверждение (3) доказано. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Простейшим примером $\bar{\omega}$ -всерной формации является класс $\mathfrak{G}$ всех конечных групп. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\mathfrak{G} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$, где γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, f — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $f(0) = \mathfrak{G} = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция. Тогда формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ обладает единственным минимальным $\bar{\omega}$ -спутником f таким, что $f(0) = \text{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(\omega_i) = \text{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(\omega_i) = \emptyset$, если $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 3, формация $\mathfrak{G}$ является $\bar{\omega}$ -всерной с направлением γ и поэтому формация $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ существует. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — совокупность всех $\bar{\omega}$ -спутников формации $\mathfrak{F}$ и $m = \bigcap_{j \in J} f_j$. Ввиду леммы 3 (3), $m \in \{f_j \mid j \in J\}$. Так как m — наименьший элемент множества $\{f_j \mid j \in J\}$, то m — единственный минимальный $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — $\bar{\omega}F$ -функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $m = f$. Пусть $\bar{\omega}F(f, \gamma) := \mathfrak{H}$. Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Если $X \in \mathfrak{X}$, то, с учетом строения функции f , имеем $X/O_\omega(X) \in f(0)$ и $X/X_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(X)$. Это означает, что $X \in \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma) \subseteq \mathfrak{H}$.

Проверим, что $f \leq m$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $Y \in \mathfrak{X}$, что $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(Y)$. Из $Y \in \mathfrak{F}$ по определению 2 имеем $Y/Y_{\gamma(\omega_i)} \in m(\omega_i)$ и, значит, $m(\omega_i) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in m(\omega_i)$. Если $\omega_i \in (\bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})) \setminus (\bar{\omega} \cap \pi(G))$, то, с учетом определения 1, справедливо $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ и поэтому $G/G_{\gamma(\omega_i)} = 1 \in m(\omega_i)$. Следовательно, $f(\omega_i) = \text{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq m(\omega_i)$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(\mathfrak{X})$. Далее, для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \pi(\mathfrak{X})$ справедливо $f(\omega_i) = \emptyset \subseteq m(\omega_i)$, и из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $f(0) = \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq m(0)$. Таким образом, $f \leq m$. Это, согласно определению 2, означает, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, и поэтому $f \in \{f_j \mid j \in J\}$. Поскольку m — минимальный $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$ и $f \leq m$, то $m = f$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Направление γ $\bar{\omega}$ -веерной формации назовем p -направлением (иначе, главным направлением, от англ. «principal»), если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть γ — p -направление $\bar{\omega}$ -веерной формации $\mathfrak{F}$ с $\bar{\omega}$ -спутником f , G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Если $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для некоторого $\omega_i \in \bar{\omega}$, то $G \in \mathfrak{F}$.
- (2) Если $G/O_\omega(G) \in f(0)$, $N \triangleleft G$, $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(N)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\omega_i \in \bar{\omega}$, $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$. Установим, что $G \in \mathfrak{F}$.

Проверим, что $G/O_\omega(G) \in f(0)$. Пусть $O_\omega(G/O_{\omega_i}(G)) := K/O_{\omega_i}(G)$. Так как по условию $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$, то по определению 2 $(G/O_{\omega_i}(G))/O_\omega(G/O_{\omega_i}(G)) \in f(0)$ и, значит, $G/K \in f(0)$. Поскольку $K/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{G}_\omega$, то $K \in \mathfrak{G}_{\omega_i}\mathfrak{G}_\omega = \mathfrak{G}_\omega$. Следовательно, $K \subseteq O_\omega(G)$. Так как класс $f(0)$ является формацией и $G/K \in f(0)$, то $G/O_\omega(G) \cong (G/K)/(O_\omega(G)/K) \in f(0)$. Таким образом, $G/O_\omega(G) \in f(0)$ (a).

Пусть $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Покажем, что $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$. Если $\omega_k = \omega_i$, то по условию $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$. Пусть $\omega_k \in (\bar{\omega} \cap \pi(G)) \setminus \{\omega_i\}$. Тогда $\omega_i \cap \omega_k = \emptyset$ и поэтому $O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega_k'}$. Так как γ является p -направлением $\bar{\omega}$ -веерной формации, то по определению 3 $\gamma(\omega_k) = \mathfrak{G}_{\omega_k'}\gamma(\omega_k)$. Тогда, согласно лемме 1 (1), $(G/O_{\omega_i}(G))_{\gamma(\omega_k)} = G_{\gamma(\omega_k)}/O_{\omega_i}(G)$. По условию $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда, по определению 2, получаем $(G/O_{\omega_i}(G))/(G/O_{\omega_i}(G))_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$. Следовательно, $(G/O_{\omega_i}(G))/(G_{\gamma(\omega_k)}/O_{\omega_i}(G)) \in f(\omega_k)$ и, значит, $G/G_{\gamma(\omega_k)} \in f(\omega_k)$ для любого $\omega_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ (b).

Из (a) и (b) по определению 2 заключаем, что $G \in \bar{\omega}F(f, \gamma) = \mathfrak{F}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $G/O_\omega(G) \in f(0)$ (c), $N \triangleleft G$, $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(N)$. Установим, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\omega_j \in (\bar{\omega} \cap \pi(G)) \setminus (\bar{\omega} \cap \pi(N))$. Ввиду определения 2 и условия, достаточно проверить, что $G/G_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Действительно, поскольку $\omega_j \notin \bar{\omega} \cap \pi(N)$, то $\omega_j \cap \pi(N) = \emptyset$. Следовательно, $N \in \mathfrak{G}_{\omega_j'}$ и, согласно лемме 1 (1), $(G/N)_{\gamma(\omega_j)} = G_{\gamma(\omega_j)}/N$. Так как по условию $G/N \in \mathfrak{F}$, то по определению 2 $(G/N)/(G/N)_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Отсюда следует, что $G/G_{\gamma(\omega_j)} \cong (G/N)/(G_{\gamma(\omega_j)}/N) \in f(\omega_j)$. Таким образом, $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ (d). Из (c) и (d) по определению 2 заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Утверждение (2) доказано. $\square$

3.2. Примеры $\bar{\omega}$ -веерных формаций

ЛЕММА 4. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi(\mathfrak{F}) \cap \bar{\omega} = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником h таким, что $h(0) = \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = \emptyset$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $h(0) = \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = \emptyset$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(0)$. Поскольку $\pi(\mathfrak{F}) \cap \bar{\omega} = \emptyset$ и $G \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \cap \bar{\omega} = \emptyset$. Следовательно, по определению 2 $G \in \bar{\omega}F(h, \gamma) = \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $K = H^\mathfrak{F}$. Из $H \in \mathfrak{H}$ следует, что $H/O_\omega(H) \in h(0) = \mathfrak{F}$, и поэтому $K \subseteq O_\omega(H)$. Так как $\pi(K) \subseteq \omega$, то существует $\omega_j \in \bar{\omega}$ такое, что $\pi(K) \cap \omega_j \neq \emptyset$ (а). Поскольку $\pi(K) \subseteq \pi(H)$, то $\pi(K) \cap \omega_j \subseteq \pi(H) \cap \omega_j$ и, в силу (а), получаем $\pi(H) \cap \omega_j \neq \emptyset$. Это означает, что $\omega_j \in \pi(H) \cap \bar{\omega}$. Тогда из $H \in \mathfrak{H}$ имеем $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in h(\omega_j)$ и поэтому $h(\omega_j) \neq \emptyset$. С другой стороны, согласно условию, $h(\omega_j) = \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Формация $\mathfrak{E}$ всех единичных групп является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с любым направлением γ .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с любым направлением γ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, π — такое непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, что для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ либо $\omega_i \cap \pi = \emptyset$, либо $\omega_i \subseteq \pi$, f — $\bar{\omega}F$ -функция, имеющая следующее строение: $f(0) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$, и для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ справедливо: если $\omega_i \cap \pi = \emptyset$, то $f(\omega_i) = \emptyset$; если $\omega_i \subseteq \pi$, то $f(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Тогда $\bar{\omega}F(f, \gamma) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\omega}F(f, \gamma) := \mathfrak{F}$.

1. Покажем, что $\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Так как класс $\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ является замкнутым относительно гомоморфных образов, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega} = f(0)$. Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Тогда $\omega_j \cap \pi(G) \neq \emptyset$ (а). Поскольку $G \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$, то $\pi(G) \subseteq \pi$. Это означает, что $\omega_j \cap \pi(G) \subseteq \omega_j \cap \pi$ и, ввиду (а), $\omega_j \cap \pi \neq \emptyset$. Тогда, согласно условию, $\omega_j \subseteq \pi$ и, в силу задания f , справедливо равенство $f(\omega_j) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ (б). Из $G \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ получаем $G/G_{\gamma(\omega_j)} \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Следовательно, с учетом (б), $G/G_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega} \subseteq \mathfrak{F}$.

2. Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда по определению 2 $H/O_\omega(H) \in f(0) = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ (с). Проверим, что $O_\omega(H) \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Из $H \in \mathfrak{F}$ по определению 2 справедливо $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in f(\omega_j)$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Это означает, что $f(\omega_j) \neq \emptyset$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Отсюда, в силу задания функции f , получаем включение $\omega_j \subseteq \pi$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$ (d).

Пусть $\pi(O_\omega(H)) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Покажем, что $p_s \in \pi$ для любого $s \in \{1, \dots, k\}$. Действительно, так как $p_1 \in \omega$, то существует $\omega_{i_1} \in \bar{\omega}$ такое, что $p_1 \in \omega_{i_1}$ (е). Поскольку $\pi(O_\omega(H)) \subseteq \pi(H)$, то $p_1 \in \omega_{i_1} \cap \pi(H)$. Это означает, что $\omega_{i_1} \cap \pi(H) \neq \emptyset$ и, следовательно, $\omega_{i_1} \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. С учетом (d) получаем, что $\omega_{i_1} \subseteq \pi$. Тогда, ввиду (е), заключаем, что $p_1 \in \pi$. Аналогично получаем, что $p_2 \in \pi, \dots, p_k \in \pi$. Поэтому $\pi(O_\omega(H)) \subseteq \pi$. Так как $\pi(O_\omega(H)) \subseteq \omega$, то $O_\omega(H) \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$ и, с учетом (с), заключаем, что $H \in \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$.

Из 1 и 2 следует равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi \cap \omega}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция. Тогда класс $\mathfrak{G}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с направлением γ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть γ — произвольная $\bar{\omega}FR$ -функция, $p \in \mathbb{P}$ и $\bar{\omega}$ — такое разбиение множества ω , что $\omega_i = \{p\}$ для некоторого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Тогда класс $\mathfrak{N}_p$ всех p -групп является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с направлением γ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть γ — p -направление $\bar{\omega}$ -всерной формации. Тогда для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ формация $\gamma(\omega_i)$ является $\bar{\omega}$ -всерной формацией с направлением γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega}$ и $\mathfrak{F} := \gamma(\omega_i)$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -векрной формацией с направлением γ . Согласно определению 1, класс $\mathfrak{F}$ является формацией. Пусть $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$, где h — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $h(0) = \mathfrak{F}$, $h(\omega_i) = \mathfrak{E}$, $h(\omega_j) = \mathfrak{G}$ для любого $\omega_j \in \bar{\omega} \setminus \{\omega_i\}$.

1. Проверим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(0)$. Пусть $\omega_t \in \pi(G) \cap \bar{\omega}$. Докажем, что $G/G_{\gamma(\omega_t)} \in h(\omega_t)$. Рассмотрим случай, когда $\omega_t = \omega_i$. Поскольку $h(\omega_t) = \mathfrak{E}$, то достаточно проверить, что $G/G_{\gamma(\omega_t)} = 1$. Действительно, $G \in \mathfrak{F} = \gamma(\omega_i) = \gamma(\omega_t)$. Согласно определению $\mathfrak{H}$ -радикала группы, имеем $G = G_{\gamma(\omega_t)}$ и поэтому $G/G_{\gamma(\omega_t)} = 1 \in \mathfrak{E} = h(\omega_t)$. В случае, когда $\omega_t \neq \omega_i$, справедливо $G/G_{\gamma(\omega_t)} \in \mathfrak{G} = h(\omega_t)$. Следовательно, $G/G_{\gamma(\omega_t)} \in h(\omega_t)$ для любого $\omega_t \in \pi(G) \cap \bar{\omega}$. Тогда по определению 2 $G \in \bar{\omega}F(h, \gamma) = \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2. Докажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим случай, когда $\omega_i \in \pi(H) \cap \bar{\omega}$. Согласно определению 2, $H/H_{\gamma(\omega_i)} \in h(\omega_i) = \mathfrak{E}$. Поэтому $H = H_{\gamma(\omega_i)} \in \gamma(\omega_i) = \mathfrak{F}$. Пусть теперь $\omega_i \notin \pi(H) \cap \bar{\omega}$. Тогда из $\omega_i \in \bar{\omega}$ следует, что $\omega_i \cap \pi(H) = \emptyset$. Это означает, что H является ω_i' -группой. Так как γ — p -направление $\bar{\omega}$ -векрной формации, то $H \in \mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i) = \gamma(\omega_i) = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Это означает, что $\mathfrak{F} = \gamma(\omega_i)$ — $\bar{\omega}$ -векрная формация с направлением γ , для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Следуя [18], $\bar{\omega}$ -векрную формацию с направлением γ назовем:

- $\bar{\omega}$ -полной, если $\gamma = \gamma_0$, где $\gamma_0(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$;
- $\bar{\omega}$ -локальной, если $\gamma = \gamma_1$, где $\gamma_1(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\mathfrak{G}_{\omega_i}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$;
- $\bar{\omega}$ -центральной, если $\gamma = \gamma_2$, где $\gamma_2(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{G}_{\omega_i'}$ является $\bar{\omega}$ -полной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{G}_{\omega_i'}\mathfrak{G}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$ -локальной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω формация $\mathfrak{G}_{\omega_i}$ является $\bar{\omega}$ -центральной формацией, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

3.3. Связь $\bar{\omega}$ -векрных формаций с ω -векрными формациями

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [19] введены в рассмотрение $\mathbb{P}FR$ -функция и ωF -функция. Пусть δ — $\mathbb{P}FR$ -функция (иначе, формационно-радикальная функция), т.е. функция вида

$$\delta : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}, \text{ где } \mathfrak{G}_{p'} \subseteq \delta(p) \text{ для любого } p \in \mathbb{P};$$

f — ωF -функция (будем также называть f обобщенно формационной ω -функцией), т.е. функция вида

$$f : \omega \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}, \text{ где } f(0) \neq \emptyset.$$

Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω -векрной формацией с направлением δ и ω -спутником f , и обозначается $\mathfrak{F} := \omega F(f, \delta)$ [19].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -векрная формация с произвольным направлением δ . Тогда для любого разбиения $\bar{\omega}$ множества ω найдутся $\bar{\omega}$ -векрные формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ такие, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{F}$ — ω -векрная формация с направлением δ , то $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$, где f — некоторый ω -спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω .

И. Рассмотрим $\bar{\omega}FR$ -функцию $\gamma' : \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ такую, что $\gamma'(\omega_i) = \cap_{p \in \omega_i} \delta(p)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Пусть $\mathfrak{F}_1 := \bar{\omega}F(f_1, \gamma')$, где $f_1 : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $f_1(0) = f(0)$ и $f_1(\omega_i) = \cap_{p \in \omega_i} f(p)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f_1(0) = f(0)$ (а).

Пусть $q \in \omega \cap \pi(G)$. Тогда существует $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$ такое, что $q \in \omega_i$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G/G_{\gamma'(\omega_i)} \in f_1(\omega_i) \subseteq f(q)$. Так как $\gamma'(\omega_i) \subseteq \delta(q)$, то $G_{\gamma'(\omega_i)} \subseteq G_{\delta(q)}$ и поэтому $G/G_{\delta(q)} \cong (G/G_{\gamma'(\omega_i)})/(G_{\delta(q)}/G_{\gamma'(\omega_i)}) \in f(q)$ (б).

Из (а) и (б) следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

II. Рассмотрим $\bar{\omega}FR$ -функцию $\gamma'' : \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ такую, что $\gamma''(\omega_i) = \text{formfit}(\cup_{p \in \omega_i} \delta(p))$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Пусть $\mathfrak{F}_2 := \bar{\omega}F(f_2, \gamma'')$, где $f_2 : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $f_2(0) = f(0)$ и $f_2(\omega_i) = \text{form}(\cup_{p \in \omega_i} f(p))$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f(0) = f_2(0)$ (с).

Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Тогда $\omega_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$ и, значит, существует $r \in \omega_i$ такое, что $r \in \pi(G)$. Следовательно, $r \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\delta(r)} \in f(r) \subseteq f_2(\omega_i)$. Так как $\delta(r) \subseteq \gamma''(\omega_i)$, то $G_{\delta(r)} \subseteq G_{\gamma''(\omega_i)}$ и поэтому $G/G_{\gamma''(\omega_i)} \cong (G/G_{\delta(r)})/(G_{\gamma''(\omega_i)}/G_{\delta(r)}) \in f_2(\omega_i)$ (д).

Из (с) и (д) следует, что $G \in \mathfrak{F}_2$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$. $\square$

Следуя [5], разбиение $\bar{\omega}$ множества ω назовем *наименьшим*, если ω_i — одноэлементное множество для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , $\mathfrak{F}$ — непустая формация, γ и δ — $\bar{\omega}FR$ -функция и $\mathbb{P}FR$ -функция соответственно такие, что $\gamma(\{p\}) = \delta(p)$ для любого $\{p\} \in \bar{\omega}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -всерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с направлением δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$ -всерная формация с направлением γ . Тогда $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(t, \gamma) = (G \in \mathfrak{F} \mid G/O_\omega(G) \in t(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in t(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$ (1), где $t : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — некоторый $\bar{\omega}$ -спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть $m : \omega \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — такая ωF -функция, что $m(0) = t(0)$ (2) и $m(p) = t(\{p\})$ (3) для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{M} := \omega F(m, \delta) = (G \in \mathfrak{F} \mid G/O_\omega(G) \in m(0) \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in m(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(G))$ (4). Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

1. Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $T \in \mathfrak{F}$. Ввиду (1) и (2), имеем $T/O_\omega(T) \in t(0) = m(0)$. Пусть $p_i \in \omega \cap \pi(T)$. Покажем, что $T/T_{\delta(p_i)} \in m(p_i)$. Так как $p_i \in \omega$, то $\{p_i\} = \omega_i \in \bar{\omega}$. Поскольку $p_i \in \pi(T)$, то $\{p_i\} \cap \pi(T) \neq \emptyset$ и, значит, $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(T)$. Из $T \in \mathfrak{F}$, с учетом (1), имеем $T/T_{\gamma(\omega_i)} \in t(\omega_i)$. Так как по условию $\gamma(\omega_i) = \delta(p_i)$ и, в силу (3), $t(\omega_i) = m(p_i)$, то $T/T_{\delta(p_i)} \in m(p_i)$. Согласно (4), заключаем, что $T \in \omega F(m, \delta) = \mathfrak{M}$, и поэтому справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Ввиду (4) и (2), справедливо $M/O_\omega(M) \in m(0) = t(0)$. Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(M)$. Тогда $\omega_j \cap \pi(M) \neq \emptyset$. Так как $\omega_j \in \bar{\omega}$ и $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , то существует $p_j \in \omega$ такое, что $\omega_j = \{p_j\}$. Поскольку $M \in \mathfrak{M}$ и $p_j \in \omega \cap \pi(M)$, то из (4) следует $M/M_{\delta(p_j)} \in m(p_j)$. Тогда, с учетом равенств $\gamma(\omega_j) = \delta(p_j)$ и $m(p_j) = t(\omega_j)$, получаем $M/M_{\gamma(\omega_j)} \in t(\omega_j)$. Согласно (1), имеем $M \in \bar{\omega}F(t, \gamma) = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с направлением δ .

II. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -всерная формация с направлением δ . Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$, где $f : \omega \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — некоторый ω -спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -всерной с направлением γ . Пусть $h : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega}F$ -функция такая, что $h(0) = f(0)$, $h(\{p\}) = f(p)$ для любого $\{p\} \in \bar{\omega}$, и $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

1. Пусть $F \in \mathfrak{F}$. Тогда $F/O_\omega(F) \in f(0) = h(0)$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(F)$. Тогда $\omega_i \cap \pi(F) \neq \emptyset$. Так как $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , то $\omega_i = \{p_i\}$ для некоторого $p_i \in \omega$. Из $\{p_i\} \cap \pi(F) \neq \emptyset$ имеем $\{p_i\} \cap \pi(F) = \{p_i\}$. Следовательно, $p_i \in \pi(F)$. Так как $p_i \in \omega \cap \pi(F)$,

то, ввиду $F \in \mathfrak{F}$, получаем $F/F_{\delta(p_i)} \in f(p_i)$. Поскольку $\delta(p_i) = \gamma(\{p_i\}) = \gamma(\omega_i)$ и $f(p_i) = h(\omega_i)$, то $F/F_{\gamma(\omega_i)} \in h(\omega_i)$. Тем самым установлено, что $F \in \bar{\omega}F(h, \gamma) = \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in h(0) = f(0)$. Пусть $p_j \in \omega \cap \pi(H)$. Тогда $p_j \in \omega$ и, значит, $\{p_j\} = \omega_j \in \bar{\omega}$. Поскольку $\omega_j \cap \pi(H) \neq \emptyset$, то $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Из $H \in \mathfrak{H}$ имеем $H/H_{\gamma(\omega_j)} \in h(\omega_j)$. Так как $\gamma(\omega_j) = \delta(p_j)$ и $h(\omega_j) = f(p_j)$, то $H/H_{\delta(p_j)} \in f(p_j)$. Таким образом, заключаем, что $H \in \omega F(f, \delta) = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Последнее, в силу выбора $\mathfrak{H}$, означает, что $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$ -веерная формация с направлением γ . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. ω -Веерная формация с направлением δ называется: ω -полной, если $\delta(p) = \mathfrak{G}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; ω -локальной, если $\delta(p) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; ω -центральной, если $\delta(p) = \mathfrak{G}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [18].

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω . Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -полной ($\bar{\omega}$ -локальной, $\bar{\omega}$ -центральной) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — ω -полная (соответственно ω -локальная, ω -центральная) формация.

3.4. $\mathbb{P}_\sigma$ -веерные и $\bar{\omega}$ -веерные формации

Следуя [5], через σ обозначим произвольное разбиение множества $\mathbb{P}$. В работе [9] (см. также [10]) введена в рассмотрение формационная σ -функция, т.е. функция вида $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$. Для краткости формационную σ -функцию будем называть $\mathbb{P}_\sigma F$ -функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\gamma : \sigma \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ — σFR -функция (в смысле определения 1 при $\omega = \mathbb{P}$), $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\mathbb{P}_\sigma F$ -функция. Следуя [19], формацию

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\gamma(\sigma_i)} \in f(\sigma_i) \text{ для любого } \sigma_i \in \sigma \cap \pi(G))$$

назовем $\mathbb{P}_\sigma$ -веерной формацией с направлением γ и $\mathbb{P}_\sigma$ -спутником f , и обозначим $\mathfrak{F} := \mathbb{P}_\sigma F(f, \gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Группа G называется $\{\sigma_i\}$ -нильпотентной [15], где $\sigma_i \in \sigma$, если каждый главный $\sigma_i d$ -фактор H/K группы G σ -централен в G , т.е. $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ — σ -примарная группа (т.е. σ_j -группа для некоторого $\sigma_j \in \sigma$). Пусть γ_i — такая σFR -функция, что для любого $\sigma_i \in \sigma$ класс $\gamma_i(\sigma_i)$ совпадает с классом всех $\{\sigma_i\}$ -нильпотентных групп. Тогда $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация $\mathbb{P}_\sigma F(f, \gamma_i)$ совпадает с σ -локальной формацией из [10].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\bar{\omega}$ и σ — такие разбиения множества ω и $\mathbb{P}$ соответственно, что $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, γ и γ_σ — $\bar{\omega} FR$ -функция и σFR -функция соответственно, удовлетворяющие условию $\gamma(\omega_i) = \gamma_\sigma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ_σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$ -веерная формация с направлением γ . Тогда $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$. Пусть $h : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\mathbb{P}_\sigma F$ -функция такая, что $h(\omega_i) = f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, $h(\sigma_j) = \emptyset$ для любого $\sigma_j \in \sigma \setminus \bar{\omega}$, и $\mathfrak{H} := \mathbb{P}_\sigma F(h, \gamma_\sigma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_k)} \in h(\sigma_k) \text{ для любого } \sigma_k \in \sigma \cap \pi(G))$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_k \in \sigma \cap \pi(G)$. Установим, что $G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_k)} \in h(\sigma_k)$. Для этого, ввиду $G \in \mathfrak{F}$, достаточно проверить, что $\sigma_k \in \bar{\omega}$. Действительно, так как $\sigma_k \in \sigma \cap \pi(G)$, то $\sigma_k \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и, ввиду $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, получаем, что $\pi(G) \subseteq \omega$ и $\sigma_k \cap \pi(G) \subseteq$

$\sigma_k \cap \omega$. Следовательно, $\sigma_k \cap \omega \neq \emptyset$ и, в силу $\sigma_k \in \sigma$, имеем $\sigma_k \in \bar{\omega}$. Так как $\sigma_k \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, то, с учетом $G \in \mathfrak{F}$, имеем $G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_k)} \in f(\sigma_k) = h(\sigma_k)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $M = H^{\mathfrak{F}}$. Согласно лемме 3 (2), можем считать, что $f(0) = \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(M)$. Тогда существует $\sigma_i \in \sigma \cap \pi(M)$ такое, что $p \in \sigma_i$. Так как $H \in \mathfrak{H}$, то $H/H_{\gamma_\sigma(\sigma_i)} \in h(\sigma_i)$ и, значит, $h(\sigma_i) \neq \emptyset$. В силу задания h , получаем, что $\sigma_i \in \bar{\omega}$. Поэтому $\sigma_i \subseteq \omega$ и $p \in \omega$. Следовательно, $\pi(M) \subseteq \omega$ и $M \subseteq O_\omega(H)$. Так как по определению $\mathfrak{F}$ -корадикала группы $H/M \in \mathfrak{F}$, то $H/O_\omega(H) \cong (H/M)/(O_\omega(H)/M) \in \mathfrak{F} = f(0)$.

Пусть $\omega_j \in \bar{\omega} \cap \pi(H)$. Так как $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, то $\omega_j \in \sigma \cap \pi(H)$. Ввиду $H \in \mathfrak{H}$, имеем $H/H_{\gamma(\omega_j)} = H/H_{\gamma_\sigma(\omega_j)} \in h(\omega_j) = f(\omega_j)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Таким образом, заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Это означает, что $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ_σ .

II. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ_σ . Тогда найдется такая $\mathbb{P}_\sigma F$ -функция $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, что $\mathfrak{F} = \mathbb{P}_\sigma F(f, \gamma_\sigma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\gamma_\sigma(\sigma_i)} \in f(\sigma_i) \text{ для любого } \sigma_i \in \sigma \cap \pi(G))$. Пусть $\mathfrak{B} := \bar{\omega} F(b, \gamma) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in b(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in b(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$, где $b : \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ — $\bar{\omega} F$ -функция такая, что для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ справедливо равенство $b(\omega_i) = f(\omega_i)$ и $b(0) = \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = b(0)$. Пусть $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$. Так как $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, то $\omega_i \in \sigma \cap \pi(G)$ и, ввиду $G \in \mathfrak{F}$, получаем $G/G_{\gamma(\omega_i)} = G/G_{\gamma_\sigma(\omega_i)} \in f(\omega_i) = b(\omega_i)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ и B — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $M = B^{\mathfrak{F}}$. Так как $B \in \mathfrak{B}$, то $B/O_\omega(B) \in b(0) = \mathfrak{F}$ и, значит, $M \subseteq O_\omega(B)$. Поскольку $B/M \in \mathfrak{F}$ и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то $\pi(B/M) \subseteq \omega$. Поэтому $\pi(B) \subseteq \omega$. Пусть $\sigma_j \in \sigma \cap \pi(B)$. Тогда $\sigma_j \cap \pi(B) \neq \emptyset$. Из $\pi(B) \subseteq \omega$ следует, что $\sigma_j \cap \pi(B) \subseteq \sigma_j \cap \omega$ и, значит, $\sigma_j \cap \omega \neq \emptyset$. Поскольку $\sigma_j \in \sigma$ и $\bar{\omega} \subseteq \sigma$, то $\sigma_j \in \bar{\omega}$. Ввиду $\sigma_j \cap \pi(B) \neq \emptyset$, имеем $\sigma_j \in \bar{\omega} \cap \pi(B)$. Из $B \in \mathfrak{B}$ получаем $B/B_{\gamma_\sigma(\sigma_j)} = B/B_{\gamma(\sigma_j)} \in b(\sigma_j) = f(\sigma_j)$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. $\square$

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 6 получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\bar{\omega} = \sigma$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$ -веерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация с направлением γ .

4. Заключение

В заключение сформулируем следующие выводы:

1. Понятие $\bar{\omega}$ -веерной формации обобщает понятие ω -веерной формации, введенное в рассмотрение в работе [18]. В частности, в случае, когда $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω , $\bar{\omega}$ -веерная формация совпадает с ω -веерной формацией.

2. Понятие $\mathbb{P}_\sigma$ -веерной формации является обобщением понятия веерной формации (см. [19], определение 2). В частности, рассуждая, как и при доказательстве утверждения 1, нетрудно проверить, что если σ — наименьшее разбиение множества $\mathbb{P}$, то $\mathbb{P}_\sigma$ -веерная формация совпадает с веерной формацией.

3. Пусть $\bar{\omega}$ и σ — разбиения множеств ω и $\mathbb{P}$ соответственно. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ и $\bar{\omega} = \sigma$, т.е. в случае, когда речь идет об одном разбиении множества $\mathbb{P}$, согласно следствию 10, $\bar{\omega}$ -веерная формация совпадает с $\mathbb{P}_\sigma$ -веерной формацией.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. По мнению авторов, интерес представляют задача описания строения максимальных внутренних $\bar{\omega}$ -спутников $\bar{\omega}$ -веерной формации, вопросы изучения произведений $\bar{\omega}$ -веерных формаций, решеточных свойств $\bar{\omega}$ -веерных формаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964, 158 с.
2. Шеметков Л. А. Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 684-715.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978, 272 с.
4. Скиба А. Н. О σ -свойствах конечных групп. Препринт: изд-во Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013.
5. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. № 4 (21). P. 89-96.
6. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups II // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2015. № 3 (24). P. 70-83.
7. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups III // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2016. № 1 (26). P. 52-62.
8. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // Journal of Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1-16.
9. Скиба А. Н. О σ -локальных формациях конечных групп. Препринт: изд-во Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017.
10. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2018. № 1 (34). P. 79-82.
11. Скиба А. Н. Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997, 240 с.
12. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992, 891 p.
13. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2018. № 2 (35). P. 85-88.
14. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n -multiply σ -local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, № 3. P. 1-10.
15. Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N. On one generalization of σ -local and Baer-local formations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2019. № 4 (41). P. 65-69.
16. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. С. 114-147.
17. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2012, 322 с.
18. Ведерников В. А. О новых типах ω -векрных формаций конечных групп // Український математичний конгрес – 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. С. 36-45.
19. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -векрные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 43-60.

REFERENCES

1. Chunikhin, C. A. 1964, *Subgroups of Finite Groups*, Science and Technology, Minsk, 158 p.
2. Shemetkov, L. A. 1976, "Factorizations of non-simple finite groups", *Algebra and Logic*, vol. 15, no. 6, pp. 684-715.
3. Shemetkov, L. A. 1978, *Formations of finite groups*, Nauka, Moscow, 272 p.
4. Skiba, A. N. 2013, *On σ -properties of finite groups*, Gomel State University named after F. Skorina, Gomel.
5. Skiba, A. N. 2014, "On σ -properties of finite groups I", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 4 (21), pp. 89-96.
6. Skiba, A. N. 2015, "On σ -properties of finite groups II", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 3 (24), pp. 70-83.
7. Skiba A. N. 2016, "On σ -properties of finite groups III", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 1 (26), pp. 52-62.
8. Skiba A. N. 2015, "On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups", *Journal of Algebra*, vol. 436, pp. 1-16.
9. Skiba, A. N. 2017, *On σ -local formations of finite groups*, Gomel State University named after F. Skorina, Gomel.
10. Skiba A. N. 2018, "On one generalization of the local formations", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 1 (34), pp. 79-82.
11. Skiba, A. N. 1997, *Algebra of formations*, Belaruskaya Nauka, Minsk, 240 p.
12. Doerk, K., Hawkes, T. 1992, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 891 p.
13. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. 2018, "On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 2 (35), pp. 85-88.
14. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. 2019, "On n -multiply σ -local formations of finite groups", *Comm. Algebra*, vol. 47, no. 3, pp. 1-10.
15. Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N. 2019, "On one generalization of σ -local and Baer-local formations" *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 4 (41), pp. 65-69.
16. Skiba, A. N., Shemetkov, L. A. 1999, "Multiple ω -local formations and Fitting classes of finite groups", *Mathematical Works*, vol. 2, no. 2, pp. 114-147.
17. Vorobyov, N. N. 2012, *Algebra of classes of finite groups*, Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, 322 p.
18. Vedernikov, V. A. 2002, "On new types of ω -fibered formations of finite groups", *Ukrainian Mathematical Congress – 2001. Part 1. Kiev*, pp. 36-45.
19. Vedernikov, V. A., Sorokina, M. M. 2002, " ω -fibered formations and Fitting classes of finite groups", *Mathematical Notes*, vol. 71, no. 1, pp. 43-60.

Получено 15.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.