ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-3-196-231

Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток[1]

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский

Смирнова Елена Николаевна — Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: helenash@mail.ru
Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В предыдущей работе авторов заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

В данной статье рассмотрен случай одномерных сдвинутых решёток. Прежде всего рассмотрено построение метрического пространства сдвинутых решёток с помощью отображения одномерных сдвинутых решёток в пространство двумерных решёток.

В работе определено гомеоморфное отображение пространства одномерных сдвинутых решёток на бесконечный двумерный цилиндр. Тем самым установлено, что пространство одномерных сдвинутых решёток CPR_2 локально евклидово пространство размерности 2.

Так как метрика на этих пространствах не является евклидовой, а относится к числу "логарифмических", то получаются в одномерном случае неожиданные результаты о производных от основных функций, таких как детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум, дзета-функция сдвинутой решётки и гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток и сдвинутых многомерных решёток гораздо сложнее чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток. Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток и многомерных

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а

сдвинутых решёток, а так же в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получения теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшем направлением исследованием может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах решёток и многомерных решёток. Как известно, аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространстве решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-3-196-231

Smooth manifold of one-dimensional lattices and shifted lattices[2]

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'skii

Smirnova Elena Nikolaevna — Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: helenash@mail.ru

Pikhtilkova Olga Alexandrovna — candidate of physics and mathematics sciences, docent, Russian technological University MIREA (Moscow).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

[2]The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a

Abstract

In the previous work, the authors laid the foundations of the theory of smooth varieties of number-theoretic lattices. The simplest case of one-dimensional lattices is considered.

This article considers the case of one-dimensional shifted lattices. First of all, we consider the construction of a metric space of shifted lattices by mapping one-dimensional shifted lattices to the space of two-dimensional lattices.

In this paper, we define a homeomorphic mapping of the space of one-dimensional shifted lattices to an infinite two-dimensional cylinder. Thus, it is established that the space of one-dimensional shifted lattices CPR_2 is locally a Euclidean space of dimension 2.

Since the metric on these spaces is not Euclidean, but is "logarithmic" , unexpected results are obtained in the one-dimensional case about derivatives of basic functions, such as the determinant of the lattice, the hyperbolic lattice parameter, the norm at least, the Zeta function and lattice hyperbolic Zeta function of lattices.

The paper considers the relationship of these functions with the issues of studying the error of approximate integration over parallelepipedal grids as the determinant of the lattice, the hyperbolic lattice parameter, the norm at least, the Zeta function and lattice hyperbolic Zeta function of lattices.

Note that the geometry of metric spaces of multidimensional lattices and shifted multidimensional lattices is much more complex than the geometry of an ordinary Euclidean space. This can be seen from the paradox of nonadditivity of the length of a segment in the space of shifted one-dimensional lattices. From the presence of this paradox, it follows that there is an open problem of describing geodesic lines in the spaces of multidimensional lattices and multidimensional shifted lattices, as well as in finding a formula for the length of the arcs of lines in these spaces. Naturally, it would be interesting not only to describe these objects, but also to obtain a number-theoretic interpretation of these concepts.

A further direction of research may be the study of the analytical continuation of the hyperbolic zeta function on the spaces of lattices and multidimensional lattices. As is known, an analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices is constructed for an arbitrary Cartesian lattice. Even the question of the continuity of these analytic continuations in the left half-plane on the lattice space has not been studied. All these, in our opinion, are relevant areas for further research.

Keywords: algebraic lattices, a metric space lattices.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Smooth manifold of one-dimensional lattices and shifted lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 196–231.

1. Введение

В предыдущей работе авторов [19] заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен простейший случай одномерных решёток.

Приведём основные факты из этой работы.

Рассмотрим пространство PR_1 всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} | \lambda > 0\},$$

где $\mathbb{Z}$ — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$ для любого $\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{1\,1}) | a_{1\,1} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{1\,1}) | a_{1\,1} \in \mathbb{R}, a_{1\,1} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка $M = M(\lambda)$ с базисом (λ), $\lambda > 0$, то действие линейного преобразования с матрицей $A = (a_{1\,1}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ задаётся равенством $A \cdot M = M(|a_{1\,1}|\lambda)$. Для любой одномерной решётки M её группа автоморфизмов конечна $\mathrm{Aut}(M) = \{(1), (-1)\}$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток Λ является *открытой μ-окрестностью* решётки M, если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \tag{1}$$

для которых невырожденная матрица A удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \tag{2}$$

Заметим, что в одномерном случае $I = (1)$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = |a_{1\,1}|$.[3]

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы $A = (a_{1\,1})$ с $\|A - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \mu < a_{1\,1} < 1 + \mu$ и являются невырожденными.

Для произвольной решётки $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$ с базисом (λ) имеем

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} | (1-\mu)\lambda < \lambda_1 < (1+\mu)\lambda\}.$$

Лемма 1. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\mathbb{L}_\nu(N)$ либо пусто, либо является открытой окрестностью $\mathbb{L}_\kappa(K)$, где $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, если $M = N$, и $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu)-\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}{2}$, $K = K(\lambda_2)$, если $\lambda(1+\mu) > \lambda_1(1-\nu)$, $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.*

Лемма 2. *Любой интервал решёток $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) \,|\, \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$ является открытой μ-окрестностью решётки M при $M = M\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, $\mu = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.*

Имеется следующее гомеоморфное отображение $\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ при котором решётке $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$, а числу $\theta \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_\mu(M)$.

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \tag{3}$$

Таким образом, на PR_1 задана структура топологического пространства $T_1 = (PR_1, \tau_1)$, где τ_1 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ-окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ, и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_1 всех рациональных решёток, т.е. решёток $M = M(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$.

Лемма 3. *Топология τ_1 инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования A пространства $\mathbb{R}$. Счетная база $\mathbb{B}$ инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований $D(d) = (d)$, $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$.*

[3] Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\|-A\| = \|-A\|$, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, $\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$.

Как известно (см. [13], стр. 165), множество всех s-мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda,\Gamma)=\max(\ln(1+\mu),\ln(1+\nu))=\ln(1+\max(\mu,\nu)), \tag{4}$$

где

$$\mu=\inf_{\Gamma=A\cdot\Lambda}\|A-I\|,\quad \nu=\inf_{\Lambda=B\cdot\Gamma}\|B-I\|.$$

Применительно к PR_1 имеем, если $\Lambda=\lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma=\gamma\mathbb{Z}$, то $\Gamma=A\cdot\Lambda$, $A=\left(\gamma\lambda^{-1}\right)$, $\Lambda=B\cdot\Gamma$, $B=\left(\gamma^{-1}\lambda\right)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda>\gamma$, тогда $\mu=1-\gamma\lambda^{-1}$, $\nu=\gamma^{-1}\lambda-1$ и $\rho(\Lambda,\Gamma)=\max(\ln(2-\gamma\lambda^{-1}),\ln(\gamma^{-1}\lambda))$. Положим $\theta=\gamma\lambda^{-1}$, тогда $0<\theta<1$ и $2-\theta<\theta^{-1}$, поэтому $\rho(\Lambda,\Gamma)=\ln(\gamma^{-1}\lambda)$.

Теперь можно записать, как выглядит "симметричный отрезок" решёток длинной 2ρ с центром в $\Lambda(\lambda)$: $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda);\Lambda(e^{\rho}\lambda)]$. Ясно, что когда h пробегает числовой отрезок $[-\rho;\rho]$, то $\Lambda(e^{h}\lambda)$ пробегает отрезок решёток $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda);\Lambda(e^{\rho}\lambda)]$.

Как известно, для любой решётки Λ её взаимная решётка Λ^* определяется из условия

$$\Lambda^*=\{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\quad(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}.$$

Отсюда следует, что для любой решётки $\Lambda(\lambda)\in PR_1$ справедливо равенство $\Lambda^*=\Lambda(\lambda^{-1})$.

Лемма 4. *Для любой решётки $\Lambda(\lambda)\in PR_1$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda,\mathbb{Z})=\rho(\Lambda^*,\mathbb{Z}). \tag{5}$$

Топологическое пространство PR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух решеток $\Lambda(\lambda_1)$, $\Lambda(\lambda_2)$ при $\lambda_1<\lambda_2$ и $\mu=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ открытые μ-окрестности $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1))$ и $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2))$ не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток PR_1 гомеоморфно $\mathbb{R}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является $\varphi:PR_1\leftrightarrow\mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda=\lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda)=\ln(\lambda)\in\mathbb{R}$, а числу $\theta\in\mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda=\varphi^{-1}(\theta)=e^{\theta}\mathbb{Z}\in PR_1$. Отсюда следует, что пространство одномерных решёток PR_1 локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [20], стр. 13) пара (U,φ), где $U=\mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ-окрестность, решётка $M=M(\lambda)$, а φ — гомеоморфное отображение U на интервал $(\ln((1-\mu)\lambda);\ln((1+\mu)\lambda))$ называется системой координат, φ — координатным отображением. Так как $\varphi(M)=0$, то решётка M является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [1], стр. 205) интервал $(\ln((1-\mu)\lambda);\ln((1+\mu)\lambda))$ является картой открытой μ-окрестности $U=\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\varphi(\Lambda)$ изображением решётки $\Lambda\in\mathbb{L}_\mu(M)$ на карте $(\ln((1-\mu)\lambda);\ln((1+\mu)\lambda))$.

Лемма 5. *Для любых двух открытых пересекающихся μ-окрестностей $U_\nu=\mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$ решёток $M_\nu=M_\nu(\lambda_\nu)$ $(\nu=1,2)$ гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на интервалы $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu);\ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$ связаны соотношениями $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}(\theta)=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(\theta)=\theta$ для любого θ из пересечения интервалов $(\lambda_1(1-\mu_1);\lambda_1(1+\mu_1))\bigcap(\lambda_2(1-\mu_2);\lambda_2(1+\mu_2))$.*

Лемма 6. *Гомеоморфное отображение $\varphi:PR_1\leftrightarrow\mathbb{R}$ при котором решётке $\Lambda=\lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка $\varphi(\Lambda)=\ln(\lambda)\in\mathbb{R}$, а числу $\theta\in\mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка $\Lambda=\varphi^{-1}(\theta)=e^{\theta}\mathbb{Z}\in PR_1$ переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L}=\bigcup_{x\in X}\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ в открытое множество*

$$\varphi(\mathbb{L})=\bigcup_{x\in X}(\ln((1-\mu_x)\lambda_x);\ln((1+\mu_x)\lambda_x)). \tag{6}$$

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{M} = PR_1$ следующим образом.

Пусть $M = M(\lambda) \in PR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ-окрестность, координатная функция φ для произвольной решетки $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \in U$ задается равенством $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1\lambda^{-1})$. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат. Для любого $\theta \in (\ln(1-\mu); \ln(1+\mu))$ имеем: $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$. Касательное пространство многообразия $\mathcal{M}$ в точке M будем обозначать через $\mathcal{M}_M$, оно имеет размерность один.

Касательный вектор $\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M \in \mathcal{M}_M$ зададим равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M\right)(f) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi(M)} \tag{7}$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности решётки $M \in \mathcal{M}$. Также будет использоваться обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi}\Big|_M = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M\right)(f). \tag{8}$$

Целью данной работы является рассмотрение простейшего случая гладкого многообразия одномерных сдвинутых решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geqslant 1$. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Лемма о расстояниях до ближайшего целого

Как обычно, для любого действительного числа x расстояние до ближайшего целого обозначается через $\|x\|$. Эта величина выражается через дробную часть x по формуле

$$\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\}).$$

Рассмотрим полуоткрытый интервал $J = [0,1)$ и зададим на нём две различные метрики: $\rho(x,y) = |x-y|$, $\rho_1(x,y) = \|x-y\|$. Для метрического пространства с метрикой $\rho(x,y)$ оставим обозначение J, а для метрического пространства с метрикой $\rho_1(x,y)$ будем использовать обозначение J_1.

Для полноты изложения приведем необходимые факты относительно указанных метрик.

Лемма 7. *Функция $\rho_1(x,y) = \|x-y\|$ задает метрику на пространстве J_1, относительно которого J_1 — полное метрическое пространство диаметра $d(J_1) = \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Действительно, свойства $\rho_1(x,y) = \rho_1(y,x,)$, $\rho_1(x,y) \geqslant 0$ и $\rho_1(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$ очевидны.

Докажем неравенство треугольника: $\rho_1(x,y) \leqslant \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y)$.

Первый вариант доказательства. Без ограничения общности, можно считать, что $0 \leqslant x < y < 1$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

1) $0 \leqslant x < y \leqslant \frac{1}{2}$ тогда $\rho_1(x,y) = y - x$,

$$\rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) = \begin{cases} x - z + y - z \geqslant y - x, & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant x, \\ z - x + y - z = y - x, & \text{при } x < z \leqslant y, \\ z - x + z - y \geqslant y - x, & \text{при } y < z \leqslant x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + z - y = 1 + x - y > y - x, & \text{при } x + \frac{1}{2} \leqslant z \leqslant y + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + 1 + y - z > y - x, & \text{при } y + \frac{1}{2} \leqslant z < 1. \end{cases}$$

2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} < y \leqslant x + \frac{1}{2}$ тогда $\rho_1(x,y) = y - x$,

$$\rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) = \begin{cases} x - z + 1 - y + z \geqslant y - x, & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant y - \frac{1}{2}, \\ x - z + y - z \geqslant y - x, & \text{при } y - \frac{1}{2} < z \leqslant x, \\ z - x + y - z = y - x, & \text{при } x < z \leqslant y, \\ z - x + z - y > y - x, & \text{при } y < z \leqslant x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + z - y > y - x, & \text{при } x + \frac{1}{2} < z < 1. \end{cases}$$

3) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} < y < 1$ тогда $\rho_1(x,y) = 1 + x - y$,

$$\rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) = \begin{cases} x - z + 1 - y + z = 1 + x - y, & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant x, \\ z - x + 1 - y + z \geqslant 1 + x - y, & \text{при } x < z \leqslant y - \frac{1}{2}, \\ z - x + y - z = y - x > 1 + x - y, & \text{при } y - \frac{1}{2} < z \leqslant x + \frac{1}{2}, \\ 1 + x - z + y - z > 1 + x - y, & \text{при } x + \frac{1}{2} < z \leqslant y, \\ 1 + x - z + z - y = 1 + x - y, & \text{при } y < z < 1. \end{cases}$$

4) $\frac{1}{2} \leqslant x < y < 1$ тогда $\rho_1(x,y) = y - x$,

$$\rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) = \begin{cases} 1 + z - x + 1 + z - y \geqslant y - x, & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant x - \frac{1}{2}, \\ x - z + 1 - y + z \geqslant y - x, & \text{при } x - \frac{1}{2} < z \leqslant y - \frac{1}{2}, \\ x - z + y - z \geqslant y - x, & \text{при } y - \frac{1}{2} < z \leqslant x, \\ z - x + y - z = y - x, & \text{при } x < z \leqslant y, \\ z - x + z - y > y - x, & \text{при } y < z < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует неравенство треугольника.

Второй вариант доказательства. Отобразим полуинтервал $[0,1)$ на окружность единичной длины: $x^2 + y^2 = (2\pi)^{-2}$ с помощью параметризации $x = \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}$, $y = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$, $0 \leqslant t < 1$. При такой параметризации при движении параметра от 0 до 1 точка по окружности движется против часовой стрелки. Обозначим через $l(t_1, t_2)$ длину дуги окружности между точками с параметрами t_1 и t_2, соответственно. При этом точку с меньшим значением параметра будем называть правым концом, с большим — левым. Согласно известным формулам имеем:

$$l(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(-\sin(2\pi t))^2 + (\cos(2\pi t))^2} dt = t_2 - t_1 \quad (t_1 \leqslant t_2).$$

Так как длина окружности равна 1, то длина дополнительной дуги $l(t_2, t_1) = 1 - t_2 + t_1$.

Расстояние $\rho_1(t_1, t_2)$ индуцирует расстояние между точками на окружности и задается формулой $\rho_1(t_1, t_2) = \min(l(t_1, t_2), l(t_2, t_1))$.

Без ограничения общности будем считать, что длина дуги $l(t_1, t_2)$ меньше длины дуги $l(t_2, t_1)$. Если точка t между точками t_1 и t_2, то $l(t_1, t_2) = l(t_1, t) + l(t, t_2)$, $\rho_1(t_1, t_2) = \rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2)$ и неравенство треугольника выполнено.

Если точка t задает точку окружности, лежащую на длинной дуге, то есть $0 \leqslant t < t_1$ либо $t_2 < t < 1$, то возможно два случая. Если и длина дуги $l(t_1, t)$, и длина дуги $l(t, t_2)$ обе меньше $\frac{1}{2}$, то $\rho_1(t_2, t_1) = \rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2) = 1 - l(t_1, t_2) > \rho_1(t_1, t_2)$, и неравенство треугольника выполнено.

Пусть теперь длина дуги $l(t_1, t) < \frac{1}{2}$, а длина дуги $l(t, t_2) > \frac{1}{2}$, тогда

$$\rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2) = l(t_1, t) + 1 - l(t, t_2) = 2l(t_1, t) + 1 - l(t_2, t_1) = 2l(t_1, t) + l(t_1, t_2)$$

и $\rho_1(t_1, t) + \rho_1(t, t_2) \geqslant \rho_1(t_1, t_2)$, и неравенство треугольника доказано.

Для доказательства полноты метрического пространства J_1 достаточно показать, что если $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$, то $\lim_{n\to\infty} \rho_1(u_n, 0) = 0$, но это очевидно, так как $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$. $\square$

Лемма 8. *Метрики* $\rho(x,y)=|x-y|$ *и* $\rho_1(x,y)=\|x-y\|$ *не эквивалентны на* $[0,1)$.

Доказательство. Действительно, пусть $u_n=1-\frac{1}{n}$, тогда $\rho(0,u_n)=1-\frac{1}{n}\to 1$ при $n\to\infty$, а $\rho_1(0,u_n)=\frac{1}{n}$ при $n>1$ и $\to 0$ при $n\to\infty$. Тем самым неэквивалентность метрик доказана. □

Для дальнейшего нам потребуются леммы о множествах решений систем неравенств относительно расстояний точек на $[0,1)$. Пусть $0<\nu,\mu<1$, $0\leqslant x,z<1$. Обозначим через $R(\nu,\mu,x,z)$ множество вещественных y с $0\leqslant y<1$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |x-y|<\frac{\nu}{2} \\ |z-y|<\frac{\mu}{2} \end{cases}, \tag{9}$$

через $R^*(\nu,\mu,x,z)$ множество вещественных y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |x-y|<\frac{\nu}{2} \\ |z-y|<\frac{\mu}{2} \end{cases}, \tag{10}$$

и через $R_1(\nu,\mu,x,z)$ множество вещественных y с $0\leqslant y<1$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \|x-y\|<\frac{\nu}{2} \\ \|z-y\|<\frac{\mu}{2} \end{cases}. \tag{11}$$

Прежде чем переходить к решению задач о решение систем (9) и (11), опишем множества $R(\nu,x)$, $R^*(\nu,x)$ и $R_1(\nu,x)$, заданные условиями $R(\nu,x)=\{y|0\leqslant y<1,\ |x-y|<\frac{\nu}{2}\}$, $R^*(\nu,x)=$ $=\{y|\,|x-y|<\frac{\nu}{2}\}$, $R_1(\nu,x)=\{y|0\leqslant y<1,\ \|x-y\|<\frac{\nu}{2}\}$. Легко видеть, что всегда $R^*(\nu,x)=$ $=\left(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}\right)$.

Заметим, что при $\nu>1$ имеем равенство $R_1(\nu,x)=J$ и

$$R_1(1,x)=\begin{cases} \left[0,x+\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(x+\frac{1}{2},1\right), & \text{при } 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ \left[0,x-\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(x-\frac{1}{2},1\right), & \text{при } \frac{1}{2}<x<1, \\ (0,1), & \text{при } x=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Будем через $l(R)$ обозначать длину множества R, составленного из нескольких промежутков.

Лемма 9. *Справедливы равенства*

$$R(\nu,x)=\begin{cases} [0,x+\frac{\nu}{2}), & \textit{при } 0\leqslant x<\frac{\nu}{2}, \\ (x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}), & \textit{при } \frac{\nu}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{\nu}{2}, \\ (x-\frac{\nu}{2},1), & \textit{при } 1-\frac{\nu}{2}\leqslant x<1, \end{cases}\quad l(R(\nu,x))=\begin{cases} x+\frac{\nu}{2}, & \textit{при } 0\leqslant x<\frac{\nu}{2}, \\ \nu, & \textit{при } \frac{\nu}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{\nu}{2}, \\ 1-x+\frac{\nu}{2}, & \textit{при } 1-\frac{\nu}{2}\leqslant x<1. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим сначала случай $0\leqslant x<\frac{\nu}{2}$. Имеем:

$$|x-y|=\begin{cases} x-y<\frac{\nu}{2}, & \text{при } 0\leqslant y\leqslant x, \\ y-x<\frac{\nu}{2}, & \text{при } x<y<x+\frac{\nu}{2}, \\ y-x\geqslant\frac{\nu}{2}, & \text{при } x+\frac{\nu}{2}\leqslant y<1. \end{cases}$$

Отсюда следует первое равенство из (12).

Теперь перейдём к случаю $\frac{\nu}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{\nu}{2}$. Получим:

$$|x-y|=\begin{cases} x-y\geqslant\frac{\nu}{2}, & \text{при } 0\leqslant y\leqslant x-\frac{\nu}{2}, \\ x-y<\frac{\nu}{2}, & \text{при } x-\frac{\nu}{2}<y\leqslant x, \\ y-x<\frac{\nu}{2}, & \text{при } x<y<x+\frac{\nu}{2}, \\ y-x\geqslant\frac{\nu}{2}, & \text{при } x+\frac{\nu}{2}\leqslant y<1. \end{cases}$$

Отсюда следует второе равенство из (12).

Наконец, рассмотрим случай $1-\frac{\nu}{2}\leqslant x<1$. Получим:

$$|x-y|=\begin{cases} x-y\geqslant\frac{\nu}{2}, & \text{при } 0\leqslant y\leqslant x-\frac{\nu}{2},\\ x-y<\frac{\nu}{2}, & \text{при } x-\frac{\nu}{2}<y\leqslant x,\\ y-x<\frac{\nu}{2}, & \text{при } x<y<1.\end{cases}$$

Отсюда следует третье равенство из (12).

Соотношения для длины множества $R(\nu,x)$ очевидны. □

Лемма 10. *Справедливы равенства*

$$R_1(\nu,x)=\begin{cases} [0,x+\frac{\nu}{2})\bigcup(1+x-\frac{\nu}{2},1), & \textit{при } 0\leqslant x<\frac{\nu}{2},\\ (x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}), & \textit{при } \frac{\nu}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ (x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}), & \textit{при } \frac{1}{2}<x\leqslant 1-\frac{\nu}{2},\\ [0,x+\frac{\nu}{2}-1)\bigcup(x-\frac{\nu}{2},1), & \textit{при } 1-\frac{\nu}{2}<x<1,\end{cases}\qquad l(R_1(\nu,x))=\nu. \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим сначала случай $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. Имеем:

$$\|x-y\|=\begin{cases} x-y, & \text{при } 0\leqslant y\leqslant x,\\ y-x, & \text{при } x<y\leqslant x+\frac{1}{2},\\ 1+x-y, & \text{при } x+\frac{1}{2}<y<1.\end{cases}$$

Отсюда следуют первые два равенства из (13).

Теперь перейдём к случаю $\frac{1}{2}<x<1$. Получим:

$$\|x-y\|=\begin{cases} 1-x+y, & \text{при } 0\leqslant y\leqslant x-\frac{1}{2},\\ x-y, & \text{при } x-\frac{1}{2}<y\leqslant x,\\ y-x, & \text{при } x<y<1.\end{cases}$$

Отсюда следуют последние два равенства из (13).

Соотношение для длины множества $R_1(\nu,x)$ очевидно. □

Будем через $arc(t_1,t_2)$ обозначать дугу окружности $x^2+y^2=(2\pi)^{-2}$ от точки с параметром t_1 до точки с параметром t_2. Если $f(t)=\left(\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi},\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right)$, то для образа множества $R_1(\nu,x)$ всегда имеем дугу длины ν с центром в точке $f(x)$:

$$f(R_1(\nu,x))=\begin{cases} arc(1+x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}), & \text{при } 0\leqslant x<\frac{\nu}{2},\\ arc(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{\nu}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ arc(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}), & \text{при } \frac{1}{2}<x\leqslant 1-\frac{\nu}{2},\\ arc(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}-1), & \text{при } 1-\frac{\nu}{2}<x<1.\end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим движение по окружности m_x, которое точке с параметром t ставит в соответствие точку с параметрами $\{t-x\}$. В результате этого движения все дуги из (14) перейдут в дугу $arc(1-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2})$ длины ν с центром в точке $f(0)$. Через M^* будем обозначать множество движений по окружности m_x и соответствующее преобразование полуинтервала J в себя.

Кроме этого, рассмотрим движение m^-, которое точке с параметром t ставит в соответствие точку с параметром $\{-t\}$. В результате этого движения дуга $arc(1-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2})$ переходит в себя, но меняется направление движения по дуге.

При $0<x<\frac{\nu}{2}$ дуга $arc(1+x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2})=f(R_1(\nu,x))$ с центром в точке $f(x)$ переходит в дугу $arc(1-x-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}-x)=f(R_1(\nu,1-x))$ той же длины, но с центром в точке $f(1-x)$.

При $\frac{\nu}{2}<x<1-\frac{\nu}{2}$ дуга $arc(1-x-\frac{\nu}{2},1-x+\frac{\nu}{2})=f(R_1(\nu,1-x))$ с центром в точке $f(1-x)$ переходит в дугу $arc(x-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}+x)=f(R_1(\nu,x))$ той же длины, но с центром в точке $f(x)$.

При $1-\frac{\nu}{2}<x<1$ дуга $arc(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}-1)=f(R_1(\nu,x))$ с центром в точке $f(x)$ переходит в дугу $arc(2-x-\frac{\nu}{2},1+\frac{\nu}{2}-x)=f(R_1(\nu,1-x))$ той же длины, но с центром в точке $f(1-x)$.

Лемма 11. *Множество движений M^* образует коммутативную группу, сохраняющую метрику $\rho_1(x,y) = \|x-y\|$ на пространстве J_1.*

Доказательство. Действительно, $\rho_1(m_t(x), m_t(y)) = \|\{x-t\}-\{y-t\}\| = \|x-y\| = \rho_1(x,y)$ и, следовательно, m_t — движение.

Очевидно, что нейтральный элемент $e = m_0$, $m_t \circ m_u = m_{\{t+u\}}$, $m_t \circ m_{\{1-t\}} = m_0$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 12. *Для образов множества $R_1(\nu, x)$ справедливы равенства.*

$$m_t(R_1(\nu,x)) = \begin{cases} R_1(\nu, x-t), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ R_1(\nu, 1+x-t), & \text{при } x < t < 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$m^-(R_1(\nu,x)) = \begin{cases} R_1(\nu, 0), & \text{при } x = 0, \\ R_1(\nu, 1-x), & \text{при } 0 < x < 1. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Действительно, если $0 \leqslant y < 1$, $z = \{y-t\}$, то $y = \{z+t\}$ и

$$m_t(R_1(\nu,x)) = \left\{ z = \{y-t\} \,\middle|\, \|y-x\| < \frac{\nu}{2} \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \|z - \{x-t\}\| < \frac{\nu}{2} \right\} = R_1(\nu, \{x-t\}).$$

Так как

$$\{x-t\} = \begin{cases} x-t, & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 1+x-t, & \text{при } x < t < 1, \end{cases}$$

то равенство (15) доказано.

Далее имеем:

$$m^-(R_1(\nu,x)) = \left\{ z = \{-y\} \,\middle|\, \|y-x\| < \frac{\nu}{2} \right\} = \left\{ z \,\middle|\, \|z - \{-x\}\| < \frac{\nu}{2} \right\} = R_1(\nu, \{-x\}).$$

Так как

$$\{-x\} = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ 1-x, & \text{при } 0 < x < 1, \end{cases}$$

то равенство (16) доказано и утверждение леммы установлено полностью. □

Заметим, что группа преобразований M^* не является группой движений на пространстве J. Действительно, пусть $0 < x < 1$, тогда $m_x(x) = 0$, $m_x(0) = 1-x$ и при $x \neq \frac{1}{2}$ $\rho(0,x) = |0-x| = x \neq 1-x = \rho(m_x(0), m_x(x))$. Таким образом, для любого преобразования m_x ($x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$) найдётся пара точек, для которой расстояние между ними и расстояние между образами не равны.

Заметим, что из лемм 9 и 10 следует, что всегда $R(\nu,x) \subset R_1(\nu,x)$.

Лемма 13. *Справедливы соотношения*

$$R(\nu,\mu,x,z) \begin{cases} = \varnothing & \text{при } |x-z| \geqslant \frac{\nu+\mu}{2}, \\ \supset R\left(\min(\nu,\mu)\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{x-z}{\mu+\nu}\right|\right), \frac{\mu x+\nu z}{\mu+\nu}\right) & \text{при } |x-z| < \frac{\nu+\mu}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Действительно, $R(\nu,\mu,x,z) = R(\nu,x) \bigcap R(\mu,z)$. Пусть $y \in R(\nu,\mu,x,z)$, тогда по неравенству треугольника имеем:

$$|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z| < \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Отсюда следует, что если $|x-z| \geqslant \frac{\nu+\mu}{2}$, то $R(\nu,\mu,x,z) = \varnothing$ и первое равенство в (17) доказано.

Пусть теперь $|x-z| < \frac{\nu+\mu}{2}$. Положим $w = \frac{\mu x+\nu z}{\mu+\nu}$, тогда

$$|x-w| = \left|\frac{\nu(x-z)}{\mu+\nu}\right| < \frac{\nu}{2}, \quad |z-w| = \left|\frac{\mu(x-z)}{\mu+\nu}\right| < \frac{\mu}{2}.$$

Следовательно, $R(\nu,\mu,x,z) \neq \varnothing$ и $w \in R(\nu,\mu,x,z)$. Далее имеем:

$$|x-y| \leqslant |x-w|+|y-w| = \left|\frac{\nu(x-z)}{\mu+\nu}\right|+|y-w|, \quad |z-y| \leqslant |z-w|+|w-y| = \left|\frac{\mu(x-z)}{\mu+\nu}\right|+|y-w|.$$

Поэтому, если $|y-w| < \min(\nu,\mu)\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{x-z}{\mu+\nu}\right|\right)$, то $y \in R(\nu,\mu,x,z)$ и лемма полностью доказана. □

Лемма 14. *Справедливы соотношения*

$$R^*(\nu,\mu,x,z) = \begin{cases} \varnothing & \text{при } |x-z| \geqslant \frac{\nu+\mu}{2}, \\ R^*(\lambda,y) & \text{при } |x-z| < \frac{\nu+\mu}{2}, \end{cases} \tag{18}$$

где $\lambda = \min\left(\nu,\mu,\frac{\nu+\mu}{2} - |x-z|\right)$, $y = \frac{\max\left(x-\frac{\nu}{2},z-\frac{\mu}{2}\right)+\min\left(x+\frac{\nu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)}{2}$.

Доказательство. Действительно, $R^*(\nu,\mu,x,z) = R^*(\nu,x)\bigcap R^*(\mu,z)$.

Пусть $y \in R^*(\nu,\mu,x,z)$, тогда по неравенству треугольника имеем:

$$|x-z| \leqslant |x-y|+|y-z| < \frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}.$$

Отсюда следует, что если $|x-z| \geqslant \frac{\nu+\mu}{2}$, то $R^*(\nu,\mu,x,z) = \varnothing$ и первое равенство в (17) доказано.

Пусть теперь $|x-z| < \frac{\nu+\mu}{2}$. Нетрудно видеть, что

$$R^*(\nu,\mu,x,z) = \left(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}\right)\bigcap\left(z-\frac{\mu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right) = \left(\max\left(x-\frac{\nu}{2},z-\frac{\mu}{2}\right),\min\left(x+\frac{\nu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)\right).$$

Следовательно,

$$R^*(\nu,\mu,x,z) =$$
$$= R^*\left(\min\left(x+\frac{\nu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)-\max\left(x-\frac{\nu}{2},z-\frac{\mu}{2}\right),\frac{\max\left(x-\frac{\nu}{2},z-\frac{\mu}{2}\right)+\min\left(x+\frac{\nu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)}{2}\right) =$$
$$= R^*\left(\min\left(\nu,\mu,\frac{\nu+\mu}{2}-|x-z|\right),\frac{\max\left(x-\frac{\nu}{2},z-\frac{\mu}{2}\right)+\min\left(x+\frac{\nu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)}{2}\right) = R^*(\lambda,y)$$

и лемма полностью доказана. □

Покажем, что все значения для λ и y из доказанной леммы достижимы. Рассмотрим для этого четыре возможных случая.

Пусть $\left(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}\right) \subset \left(z-\frac{\mu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)$, тогда $\nu \leqslant \mu$ и $|x-z| < \frac{\mu-\nu}{2}$. В этом случае получаем $\lambda = \nu$, $y = x$.

Аналогично, если $\left(z-\frac{\mu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right) \subset \left(x-\frac{\nu}{2},x+\frac{\nu}{2}\right)$, то $\mu \leqslant \nu$, $|x-z| < \frac{\nu-\mu}{2}$ и $\lambda = \mu$, $y = z$.

Пусть теперь $R^*(\nu,\mu,x,z) = \left(x-\frac{\nu}{2},z+\frac{\mu}{2}\right)$, тогда $\frac{|\nu-\mu|}{2} \leqslant |x-z| < \frac{\nu+\mu}{2}$ и $\lambda = \frac{\nu+\mu}{2}-|x-z|$, $y = \frac{2(x+z)+\mu-\nu}{4}$.

Наконец, если $R^*(\nu,\mu,x,z) = \left(z-\frac{\mu}{2},x+\frac{\nu}{2}\right)$, тогда $\frac{|\nu-\mu|}{2} \leqslant |x-z| < \frac{\nu+\mu}{2}$ и $\lambda = \frac{\nu+\mu}{2}-|x-z|$, $y = \frac{2(x+z)+\nu-\mu}{4}$.

Лемма 15. *Справедливы соотношения*

$$m_x(R_1(\nu,\mu,x,z)) = R_1(\nu,\mu,0,\{z-x\}), \tag{19}$$
$$m^-(R_1(\nu,\mu,0,z)) = R_1(\nu,\mu,0,\{-z\}). \tag{20}$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 12. □

Лемма 16. *Справедливы соотношения*

$$R_1(\nu,\mu,x,z) = \varnothing \quad \text{при } \|x-z\| \geqslant \frac{\nu+\mu}{2}, \tag{21}$$

а при $\|x–z\| < \frac{\nu+\mu}{2}$ *множество* $R_1(\nu,\mu,x,z)$ *является открытой окрестностью вида* $R_1(\lambda,y)$, *либо объединением двух окрестностей такого вида.*

Доказательство. Действительно, $R_1(\nu,\mu,x,z)=R_1(\nu,x)\bigcap R_1(\mu,z)$. Пусть $y\in R_1(\nu,\mu,x,z)$, тогда по неравенству треугольника имеем:

$$\|x-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| < \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Отсюда следует, что если $\|x-z\| \geqslant \frac{\nu+\mu}{2}$, то $R_1(\nu,\mu,x,z) = \varnothing$ и равенство (21) доказано.

Согласно лемме 15 без ограничения общности можно считать $\nu \leqslant \mu$, $x=0$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $\|z\| < \frac{\nu+\mu}{2}$. Рассмотрим дуги, которые являются образами открытых окрестностей $R_1(\nu,0)$ и $R_1(\mu,z)$ точек 0 и z, соответственно, $f(R_1(\nu,0)) = arc\left(1-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right)$,

$$f(R_1(\mu,z)) = \begin{cases} arc\left(1+z-\frac{\mu}{2}, z+\frac{\mu}{2}\right), & \text{при } 0 \leqslant z < \frac{\mu}{2}, \\ arc\left(z-\frac{\mu}{2}, z+\frac{\mu}{2}\right), & \text{при } \frac{\mu}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что правая точка дуги $f(R_1(\mu,z))$ всегда лежит правее левой точки дуги $f(R_1(\nu,0))$. Действительно, если $0 \leqslant z < \frac{\mu}{2}$, то $1+z-\frac{\mu}{2} < 1$ и образ правой точки дуги $f(R_1(\mu,z))$ лежит правее образа $f(0)$, который правее образа $f\left(\frac{\nu}{2}\right)$. Если $\frac{\mu}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$, то в силу условия $z-\frac{\mu}{2} < \frac{\nu}{2}$, правая точка $f\left(z-\frac{\mu}{2}\right)$ правее точки $f\left(\frac{\nu}{2}\right)$ и соотношение между точками дуг установлено.

Теперь установим соотношение между точками $f\left(1+z-\frac{\mu}{2}\right)$ и $f\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$ при $0 \leqslant z < \frac{\mu}{2}$.

Точка $f\left(1+z-\frac{\mu}{2}\right)$ будет правее точки $f\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$ при $z < \frac{\mu-\nu}{2}$, и левее при $z \geqslant \frac{\mu-\nu}{2}$. Поэтому при $z < \frac{\mu-\nu}{2}$ будем иметь $R_1(\nu,0) \subset R_1(\mu,z)$, а при $\frac{\mu}{2} > z \geqslant \frac{\mu-\nu}{2}$ выполняется равенство

$$R_1(\nu,\mu,0,z) = \left(1+z-\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2}-z, \frac{1}{2}+\frac{z}{2}-\frac{\mu-\nu}{4}\right).$$

Перейдём к рассмотрению случая $z \geqslant \frac{\mu}{2}$. Точка $f\left(z+\frac{\mu}{2}\right)$ будет правее точки $f\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$ при $z < 1-\frac{\mu+\nu}{2}$, и левее при $z \geqslant 1-\frac{\mu+\nu}{2}$. Поэтому при $z < 1-\frac{\mu+\nu}{2}$ будем иметь $\left(z, z+\frac{\mu}{2}\right)\bigcap\left(1-\frac{\nu}{2},1\right) = \emptyset$, а при $z \geqslant 1-\frac{\mu+\nu}{2}$ выполняется равенство

$$\left(z, z+\frac{\mu}{2}\right)\bigcap\left(1-\frac{\nu}{2},1\right) = \left(1-\frac{\nu}{2}, z+\frac{\mu}{2}\right) = R_1\left(z+\frac{\mu+\nu}{2}-1, \frac{z}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\nu}{4}\right).$$

Так как $z \leqslant \frac{1}{2}$, то необходимо различать случай $\nu+\mu < 1$, в этом случае $1-\frac{\mu+\nu}{2} > \frac{1}{2}$, и случай $\nu+\mu \geqslant 1$, когда $1-\frac{\mu+\nu}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Заметим, что при $1-\nu \leqslant \mu \leqslant 1-\frac{\nu}{2}$ выполняется неравенство $\frac{\mu}{2} \leqslant 1-\frac{\mu+\nu}{2}$, а при $1-\frac{\nu}{2} < \mu < 1$ получаем неравенство $\frac{\mu}{2} > 1-\frac{\mu+\nu}{2}$.

Из предыдущего следует, что возможны только восемь случаев:

1. $0 \leqslant z < \frac{\mu-\nu}{2}$, $0 \leqslant \nu \leqslant \mu < 1$, тогда $R_1(\nu,0) \subset R_1(\mu,z)$, $\quad R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1(\nu,0)$;

2. $\frac{\mu-\nu}{2} \leqslant z < \frac{\mu}{2}$, $\nu \leqslant \mu < 1-\nu$, тогда $R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2}-z, \frac{z}{2}-\frac{\mu-\nu}{4}\right)$;

3. $\frac{\mu}{2} \leqslant z < \frac{\nu+\mu}{2}$, $\nu \leqslant \mu < 1-\nu$, тогда $R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right)$;

4. $\frac{\mu-\nu}{2} \leqslant z < \frac{\mu}{2}$, $1-\nu \leqslant \mu \leqslant 1-\frac{\nu}{2}$, тогда $R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right)$;

5. $\frac{\mu}{2} \leqslant z < 1-\frac{\mu+\nu}{2}$, $1-\nu \leqslant \mu \leqslant 1-\frac{\nu}{2}$, тогда $R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right)$;

6. $1-\frac{\mu+\nu}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$, $1-\nu \leqslant \mu \leqslant 1-\frac{\nu}{2}$, тогда

$$R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right) \bigcup R_1\left(z + \frac{\mu+\nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4}\right);$$

7. $1-\frac{\mu+\nu}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\mu}{2}$, $1-\frac{\nu}{2} < \mu < 1$, тогда

$$R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right) \bigcup R_1\left(z + \frac{\mu+\nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4}\right);$$

8. $\frac{\mu}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$, $1-\frac{\nu}{2} < \mu < 1$, тогда

$$R_1(\nu,\mu,0,z) = R_1\left(\frac{\nu+\mu}{2} - z, \frac{z}{2} - \frac{\mu-\nu}{4}\right) \bigcup R_1\left(z + \frac{\mu+\nu}{2} - 1, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4}\right).$$

Из перечисленных равенств следует утверждение леммы. □

3. Метрики на пространстве сдвинутых решёток

Обозначим через CPR_s множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$, где $\Lambda \in PR_s$ — произвольная s – мерная вещественная решётка и $\vec{x} \in R^s$ — произвольный вектор.

Мы далее будем рассматривать только случай $s = 1$, что позволит существенно упростить многие доказательства и сделать изложение более наглядным.

Из свойств решётки непосредственно вытекает, что $\Lambda + (x + y) = \Lambda + x$ для любого $y \in \Lambda$.

Лемма 17. *Если*

$$\Lambda_1 + x_1 = \Lambda_2 + x_2, \tag{22}$$

то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ *и* $x_1 - x_2 \in \Lambda_1$.

Доказательство. Действительно, из (22) вытекает $\Lambda_1 + x_1 - x_2 = \Lambda_2$. Так как $0 \in \Lambda_1$ и $0 \in \Lambda_2$, то $x_1 - x_2 \in \Lambda_2$, $x_2 - x_1 \in \Lambda_1$. Но последнее означает, что $\Lambda_1 + x_1 - x_2 = \Lambda_1$. Следовательно, $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $x_1 - x_2 \in \Lambda_1$. Что и требовалось доказать. □

Доказанная лемма наводит на мысль дать следующее определение канонического представления сдвинутой решётки $\Lambda + x$.

Определение 1. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки* $\Lambda + x = \lambda\mathbb{Z} + x$, $\lambda > 0$ *её каноническим представлением называется пара* $\varphi(\Lambda + x) = \left(\ln\lambda, \left\{\frac{x}{\lambda}\right\}\right)$.

Обозначим через $Cy_\infty = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \theta_2 < 1\}$ — бесконечный цилиндр (здесь нижняя и верхняя границы бесконечной горизонтальной полосы склеиваются). Таким образом, $Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ и для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ определена единственная сдвинутая решётка

$$\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \Lambda + x = e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2),$$

заданная своим каноническим представлением.

Другой естественной интерпретацией бесконечного цилиндра Cy_∞ является его представление как декартового произведения: $Cy_\infty = \mathbb{R} \times J_1$ (см. 201).

Нетрудно видеть, что бесконечный цилиндр Cy_∞ гомеоморфен другому бесконечному открытому цилиндру $C_\infty^+ = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 > 0,\ 0 \leqslant \theta_2 < 1\}$. Гомеоморфизм $\psi : Cy_\infty \to C_\infty^+$ задается равенством $\psi(\theta_1, \theta_2) = (e^{\theta_1}, \theta_2)$, $\psi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\ln \theta_1, \theta_2)$.

Наряду с цилиндром Cy_∞ рассмотрим сдвинутый цилиндр

$$C_\infty^* = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \,\middle|\, \theta_1 \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{2} \leqslant \theta_2 < \frac{1}{2} \right\}.$$

Определение 2. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + x = \lambda\mathbb{Z} + x$, $\lambda > 0$ её абсолютно наименьшим каноническим представлением называется пара*

$$\varphi^*(\Lambda + x) = (\ln \lambda, \theta), \quad \text{где} \quad \theta = \begin{cases} \left\{\frac{x}{\lambda}\right\}, & \text{при } 0 \leqslant \left\{\frac{x}{\lambda}\right\} < \frac{1}{2}, \\ \left\{\frac{x}{\lambda}\right\} - 1, & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant \left\{\frac{x}{\lambda}\right\} < 1. \end{cases}$$

Таким образом, $C_\infty^* = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ и для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in C_\infty^*$ определена единственная сдвинутая решётка

$$(\varphi^*)^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \Lambda + x = e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2),$$

заданная своим абсолютно наименьшим каноническим представлением.

Мы видим, что функции φ^{-1} и $(\varphi^*)^{-1}$ отличаются только областью определения и для них выполнено соотношение

$$(\varphi^*)^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) & \text{при } 0 \leqslant \theta_2 < \frac{1}{2}, \\ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2 + 1), & \text{при } -\frac{1}{2} \leqslant \theta_2 < 0. \end{cases}$$

С помощью обыкновенного сдвига на $\mathbb{R}$ и движения m_x на J_1 (см. 204) определим представление произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + y\lambda = \lambda\mathbb{Z} + y\lambda$, $\lambda > 0$, $0 \leqslant y < 1$ с центром в сдвинутой решётке $M + ax = a\mathbb{Z} + xa$.

Определение 3. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + y\lambda = \lambda\mathbb{Z} + y\lambda$, $\lambda > 0$, $0 \leqslant y < 1$ её представлением с центром в сдвинутой решётке $M + ax = a\mathbb{Z} + xa$ называется пара $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln \lambda - \ln a, \{y - x\})$.*

Нетрудно видеть, что эти два представления связаны равенством

$$\varphi(\Lambda + y\lambda) = (\theta_1, \theta_2), \quad \varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\theta_1^*, \theta_2^*), \quad \theta_1^* = \theta_1 - \ln a, \quad \theta_2^* = \{\theta_2 - x\}. \tag{23}$$

Для задания структуры метрического пространства на множестве CPR_1 определим для произвольного $a \neq 0$ вложение $\varphi_a : CPR_1 \to PR_2$ следующим образом.

Пусть $\Lambda \in PR_1$, $\vec{\lambda} = (\lambda)$ — ее базис и $\vec{x} = (x) \in R^1$ — произвольный вектор. Решётку $\varphi_a(\Lambda + x)$ зададим базисом $\vec{\lambda}'_j$ $(j = 1, 2)$, где $\vec{\lambda}'_1 = (\lambda, 0)$, $\vec{\lambda}'_2 = (x, a)$.

Лемма 18. *Решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}$ или замены вектора x на $x + y$, где $y \in \Lambda$.*

Доказательство. Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma)$ — другой базис решётки Λ и вектор $(y) = n \cdot \vec{\lambda} \in \Lambda$, где n — произвольное целое число, (y) — произвольный вектор из Λ. Тогда по свойству базисов для унимодулярной матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $\det A = -1$ выполняется $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \end{pmatrix}$. Но тогда для целочисленной унимодулярной матрицы B

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ x+y & a \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базисы $\vec{\lambda}_1', \vec{\lambda}_2'$ и $\vec{\gamma}_1', \vec{\gamma}_2'$ задают одну и ту же решётку и лемма полностью доказана. □

Теперь для любого $a \neq 0$ на пространстве CPR_1 можно задать метрику $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ с помощью вложения φ_a и метрики $\rho(\cdot,\cdot)$ на пространстве PR_2 равенством

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \rho(\varphi_a(\Lambda + x), \varphi_a(\Gamma + y)). \tag{24}$$

Теорема 1. *Функция $\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y)$ задает метрику на пространстве CPR_1.*

Доказательство. Симметричность функции $\rho_a(\cdot,\cdot)$ и неравенство треугольника следуют из свойств метрики $\rho(\cdot,\cdot)$ на PR_2. Таким образом, требуется доказать, что $\rho_a(\Lambda+x, \Gamma+y) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda + x = \Gamma + y$. Для этого достаточно доказать, что из $\varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(\Gamma + y)$ вытекает $\Lambda + x = \Gamma + y$.

Пусть $\vec{\lambda} = (\lambda)$ — базис решётки Λ и $\vec{\gamma} = (\gamma)$ — базис решётки Γ. Тогда из свойств базисов решётки и равенства $\varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(\Gamma + y)$ вытекает, что найдется целочисленная унимодулярная матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

такая, что справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ y & a \end{pmatrix}.$$

Из этого матричного равенства, рассматривая соотношение для последнего столбца матрицы произведения, в силу $a \neq 0$, получим

$$c_{12} = 0, \quad c_{22} = 1.$$

Но отсюда вытекает, что целочисленная матрица $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \end{pmatrix}$ является унимодулярной, то есть $c_{11} = \pm 1$, и для нее выполнены соотношения $\begin{pmatrix} c_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \end{pmatrix}$. Следовательно, $\Lambda = \Gamma$, $y = x + c_{21} \cdot \lambda$, что и доказывает утверждение теоремы. □

После введения метрики на пространстве сдвинутых решёток сразу возникает вопрос о вычислении расстояния между двумя сдвигами одной и той же решётки. Второй естественный вопрос: как согласована метрика в пространстве сдвинутых решёток с уже имеющейся метрикой на подпространстве решёток. Перейдем к решению этих вопросов.

Лемма 19. *Если решётка $\Lambda \in PR_1$ задана одномерной невырожденной матрицей $A = (a_1) : \Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, то решётка $\varphi_a(\Lambda + x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Lambda + y)$ линейным преобразованием с матрицей*

$$B(x, y, k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y-x+ka_1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любого целого $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. По определению решётки $\varphi_a(\Lambda + x)$ она задается произвольной двумерной невырожденной матрицей $A(x, k)$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_a(\Lambda + x) = A(x, k) \cdot \mathbb{Z}^2, \quad A(x, k) = \begin{pmatrix} a_1 & x + ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & x+ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(m+kn)+xn \\ an \end{pmatrix}.$$

Далее имеем

$$B(x,y,k)\cdot A(x,l) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y-x+ka_1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & x+la_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & x+y-x+a_1(k+l) \\ 0 & a \end{pmatrix} = A(y,k+l)$$

и лемма доказана. □

Следствие 1. *Для любой решётки $\Lambda \in PR_1$, заданой одномерной невырожденной матрицей $A=(a_1)$, $a_1>0:\ \Lambda = A\cdot\mathbb{Z}$, для расстояния между её сдвигами справедливо равенство*

$$\rho_a(\Lambda+x,\Lambda+y) = \ln\left(1+2\frac{a_1}{a}\left\|\frac{x-y}{a_1}\right\|\right).$$

Доказательство. Согласно (4) и (24) необходимо найти

$$\mu = \inf_{\varphi_a(\Lambda+x)=B_1\cdot\varphi_a(\Lambda+y)} \|B_1-I\|, \quad \nu = \inf_{\varphi_a(\Lambda+y)=B_2\cdot\varphi_a(\Lambda+x)} \|B_2-I\|.$$

Так как, согласно лемме 19 $B_1=B(x,y,k)$ и $B_2=B(y,x,k)$, то $\mu=\nu=2\frac{a_1}{a}\left\|\frac{x-y}{a_1}\right\|$ и следствие полностью доказано. □

Лемма 19 допускает простое обобщение.

Лемма 20. *Если решётки Λ и $\Gamma\in PR_1$ заданы одномерными невырожденными матрицами $A=(a_1)$ и $B=(b)$, соответственно:*

$$\Lambda = A\cdot\mathbb{Z}, \quad \Gamma = B\cdot\mathbb{Z},$$

то решётка $\varphi_a(\Lambda+x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Gamma+y)$ линейным преобразованием с матрицей

$$C(A,B,x,y,k,l) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любых целых $k,l\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. По определению решёток $\varphi_a(\Lambda+x)$ и $\varphi_a(\Gamma+y)$ они задаются двумерными невырожденными матрицами $A(x,k)$ и $B(y,l)$ соответственно:

$$\varphi_a(\Lambda+x) = A(x,k)\cdot\mathbb{Z}^2, \quad \varphi_a(\Gamma+y) = B(y,l)\cdot\mathbb{Z}^2,$$

$$A(x,k) = \begin{pmatrix} a_1 & x+ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B(y,l) = \begin{pmatrix} b & y+lb \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Далее имеем

$$C(A,B,x,y,k,l)\cdot A(x,k) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & x+ka_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b & y+lb \\ 0 & a \end{pmatrix} = B(y,l),$$

и, значит, лемма доказана. □

Лемма 21. *Если решётки Λ и $\Gamma \in PR_1$ заданы одномерными невырожденными матрицами $A = (a_1)$ и $B = (b)$, соответственно:*

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}$$

и решётка $\varphi_a(\Lambda+x)$ переводится в решётку $\varphi_a(\Gamma+y)$ линейным преобразованием с матрицей C, то справедливо равенство

$$C = C(A, B, x, y, k, l) = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно, если $C \cdot A(x, k) = B(y, l)$ и

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix},$$

то

$$C = B(y, l) \cdot A(x, k)^{-1} = \begin{pmatrix} b & y + lb \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{x+ka_1}{a \cdot a_1} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba_1^{-1} & \frac{-b(a_1^{-1}x+k-l)+y}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и лемма полностью доказана. □

Следствие 2. *Для любых одномерных решёток Λ и $\Gamma \in PR_1$, заданных одномерными невырожденными матрицами $A = (a_1)$ и $B = (b)$, соответственно: $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}$, $\Gamma = B \cdot \mathbb{Z}$, для расстояния между их сдвигами справедливо равенство*

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) =$$

$$= \ln\left(1 + 2\max\left(\max\left(\left|ba_1^{-1} - 1\right|, \frac{b}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right), \max\left(\left|a_1b^{-1} - 1\right|, \frac{a_1}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right)\right)\right).$$

Доказательство. Согласно (4) и (24) необходимо найти

$$\mu = \inf_{\varphi_a(\Gamma+y)=B_1\cdot\varphi_a(\Lambda+x)} \|B_1 - I\|, \quad \nu = \inf_{\varphi_a(\Lambda+x)=B_2\cdot\varphi_a(\Gamma+y)} \|B_2 - I\|.$$

Так как, согласно леммам 20 и 21 $B_1 = C(A, B, x, y, k, l)$ и $B_2 = C(B, A, y, x, l, k)$, то $\mu = 2\max\left(\left|ba_1^{-1} - 1\right|, \frac{b}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right)$, $\nu = 2\max\left(\left|a_1b^{-1} - 1\right|, \frac{a_1}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right)$ и следствие полностью доказано. □

Нетрудно видеть, что формулу для расстояния можно переписать в более компактном виде:

$$\rho_a(\Lambda + x, \Gamma + y) = \ln\left(1 + 2\max\left(\frac{|b - a_1|}{\min(b, a_1)}, \frac{\max(b, a_1)}{a}\left\|\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b}\right\|\right)\right).$$

Так как пространство одномерных сдвинутых решёток CPR_1 и бесконечный цилиндр Cy_∞ гомеоморфны, то задание метрики на CPR_1 индуцирует метрику на Cy_∞. Согласно лемме 19 для двух сдвигов решётки Λ, заданных каноническими представлениями $(\theta_1, \theta_2), (\theta_1, \theta_3) \in Cy_\infty$ матрицы $B_1(\varepsilon)$ и $B_2(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in \mathbb{Z}$:

$$B_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_3-\theta_2+\varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_2-\theta_3+\varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразуют решётки

$$\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2)) = \varphi_a(\Lambda + x) = \varphi_a(e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_2)), \quad \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1, \theta_3)) = \varphi_a(\Lambda + y) = \varphi_a(e^{\theta_1}(\mathbb{Z} + \theta_3)),$$

друг в друга:

$$B_1(\varepsilon)\cdot\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_2))=\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_3)),\quad B_2(\varepsilon)\cdot\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_3))=\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_2)).$$

Действительно, для решёток имеем:

$$\varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_2))=\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_2 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\mathbb{Z}^2,\quad \varphi_a(\varphi^{-1}(\theta_1,\theta_3))=\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\mathbb{Z}^2,$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_3-\theta_2+\varepsilon)}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_2 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}(\theta_3+\varepsilon) \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{\theta_1}(\theta_2-\theta_3+\varepsilon))}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}\theta_3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & e^{\theta_1}(\theta_2+\varepsilon) \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\rho_a((\theta_1,\theta_2),(\theta_3,\theta_4))=\ln\left(1+2\max\left(\frac{|e^{\theta_3}-e^{\theta_1}|}{\min(e^{\theta_3},e^{\theta_1})},\frac{\max(e^{\theta_3},e^{\theta_1})}{a}\,\|\theta_2-\theta_4\|\right)\right)$$

В случае PR_1 для $\Lambda=\lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma=\gamma\mathbb{Z}$ метрика задается простой формулой $\rho(\Lambda,\Gamma)=|\ln(\gamma^{-1}\lambda)|$.

Из следствия 2 следует, что $\rho_a(\Lambda,\Gamma)=\ln\left(1+2\frac{|\gamma-\lambda|}{\min(\gamma,\lambda)}\right)$.

Без ограничения общности предположим, что $\gamma=t\lambda$, $t\geqslant 1$. Тогда $\rho(\Lambda,\Gamma)=\ln t$, $\rho_a(\Lambda,\Gamma)=\ln(2t-1)$. Нетрудно видеть, что функция $\frac{\ln(2t-1)}{\ln t}$ монотонно убывает при $t>1$ и выполняются неравенства $2\geqslant\frac{\ln(2t-1)}{\ln t}>1$. Отсюда следует, что метрики $\rho(\Lambda,\Gamma)$ и $\rho_a(\Lambda,\Gamma)$ — эквивалентны на пространстве одномерных решёток.

Аналогично, рассмотрим вопрос об эквивалентности различных метрик $\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)$ и $\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)$. Положим $b=ta_1$, $x=\theta_1a_1$, $y=\theta_2b$ и без ограничения общности будем считать, что $t\geqslant 1$. Тогда

$$\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)=\ln\left(1+2\max\left(t-1,\frac{ta_1}{a}\,\|\theta_1-\theta_2\|\right)\right),$$

$$\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)=\ln\left(1+2\max\left(t-1,ta_1\,\|\theta_1-\theta_2\|\right)\right).$$

В зависимости от величины a имеем соотношения:

при $0<a<1$

$$\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)\leqslant\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y),$$

при $a>1$

$$\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)\geqslant\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y).$$

Лемма 22. *Для любого $a>0$ метрика $\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)$ эквивалентна метрике $\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)$.*

Доказательство. При $\|\theta_1-\theta_2\|=0$ величины расстояний совпадают и в этом случае утверждение леммы выполнено.

Пусть теперь $\|\theta_1-\theta_2\|>0$, тогда оба расстояния отличны от нуля.

Рассмотрим сначала случай $0<a<1$.

Если $a_1\,\|\theta_1-\theta_2\|\geqslant 1$, то

$$\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)=\ln\left(1+2ta_1\,\|\theta_1-\theta_2\|\right),\quad \rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)=\ln\left(1+2\frac{ta_1}{a}\,\|\theta_1-\theta_2\|\right)$$

и

$$\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)=\ln\left(1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|\right)+\ln\left(\frac{1+2\frac{ta_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|}{1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|}\right).$$

Так как функция

$$\frac{1+2\frac{ta_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|}{1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|}=\frac{1}{a}-\frac{1-a}{a\left(1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|\right)}$$

монотонно возрастает при возрастании t, то её наибольшее значение не превосходит величины $\frac{1}{a}$. Отсюда следует, что найдутся положительные константы $c_1>0$, $c_2>0$, такие, что

$$\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)\leqslant c_1\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y),\quad \rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)\geqslant c_2\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)$$

и утверждение леммы при $a_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|\geqslant 1$ установлено.

Если $a_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|<1$, то

$$\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)=\begin{cases}\ln(1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|), & \text{при } 1\leqslant t\leqslant\frac{1}{1-a_1\|\theta_1-\theta_2\|},\\ \ln(2t-1), & \text{при } t>\frac{1}{1-a_1\|\theta_1-\theta_2\|}.\end{cases}$$

Аналогично, имеем:

если $\frac{a_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|\geqslant 1$, то $\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)=\ln\left(1+2\frac{ta_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|\right)$;

если $\frac{a_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|<1$, то

$$\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)=\begin{cases}\ln(1+2t\frac{a_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|), & \text{при } 1\leqslant t\leqslant\frac{1}{1-\frac{a_1}{a}\|\theta_1-\theta_2\|},\\ \ln(2t-1), & \text{при } t>\frac{1}{1-\frac{a_1}{a}\|\theta_1-\theta_2\|}.\end{cases}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что найдутся положительные константы $c_3>0$, $c_4>0$, такие, что

$$\rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)\leqslant c_3\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y),\quad \rho_a(\Lambda+x,\Gamma+y)\geqslant c_4\rho_1(\Lambda+x,\Gamma+y)$$

и утверждение леммы при $a_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|<1$ установлено.

Теперь перейдём к случаю $a>1$. Этот случай рассматривается аналогично, но с учетом, что функция

$$\frac{1+2\frac{ta_1}{a}\left\|\theta_1-\theta_2\right\|}{1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|}=\frac{1}{a}-\frac{1-a}{a\left(1+2ta_1\left\|\theta_1-\theta_2\right\|\right)}$$

монотонно убывает при возрастании t и её наибольшее значение достигается при $t=1$. □

Доказанная лемма позволяет ограничиться случаем $a=1$. В этом случае для

$$\Lambda+xa=a\mathbb{Z}+xa,\quad \Gamma+yb=b\mathbb{Z}+yb,\quad 0\leqslant x,y<1$$

имеем:

$$\rho_1(\Lambda+xa,\Gamma+yb)=\ln\left(1+2\max\left(\frac{|b-a|}{\min(b,a)},\max(b,a)\left\|x-y\right\|\right)\right). \tag{25}$$

В частности, расстояние от произвольной сдвинутой решётки $\Lambda+xa=a\mathbb{Z}+xa$, $0\leqslant x<1$ до фундаментальной решётки $\mathbb{Z}$ вычисляется по формуле

$$\rho_1(\Lambda+xa,\mathbb{Z})=\ln\left(1+2\max\left(\frac{|1-a|}{\min(1,a)},\max(1,a)\left\|x\right\|\right)\right). \tag{26}$$

Как обычно, через $B_\nu(M+ax)$ обозначим шар радиуса ν, т. е. множество всех сдвинутых решёток $\Lambda+by$ таких, что расстояние $\rho_1(M+ax,\Lambda+by)<\nu$:

$$B_\nu(M+ax)=\{\Lambda+by|\rho_1(M+ax,\Lambda+by)<\nu\}.$$

Таким образом, сдвинутая решётка $\Lambda + by$ принадлежит шару $B_\nu(M + ax)$, если найдутся матрицы C и D такие, что

$$\varphi_1(M + ax) = A(x,k) \cdot \mathbb{Z}^2, \quad \varphi_1(\Lambda + by) = B(y,l) \cdot \mathbb{Z}^2,$$
$$A(x,k) = \begin{pmatrix} a & a(x+k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(y,l) = \begin{pmatrix} b & b(y+l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k,l \in \mathbb{Z};$$
$$A(x,k) = C \cdot B(y,l), \quad B(y,l) = D \cdot A(x,k), \quad \|C - I\| < e^\nu - 1, \quad \|D - I\| < e^\nu - 1.$$

Согласно лемме 21 имеем:

$$C = C(a,b,x,y,k,l) = \begin{pmatrix} ba^{-1} & -b(x-y+k-l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = D(a,b,x,y,k,l) = \begin{pmatrix} ab^{-1} & -a(y-x+l-k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому сдвинутая решётка $\Lambda + by$ принадлежит шару $B_\nu(M + ax)$ при $0 < \nu < \ln 2$ тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$\begin{cases} \frac{3-e^\nu}{2}a < b < \frac{1+e^\nu}{2}a \\ \frac{3-e^\nu}{2}b < a < \frac{1+e^\nu}{2}b \\ b\|x-y\| < \frac{e^\nu-1}{2} \\ a\|x-y\| < \frac{e^\nu-1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \max\left(\frac{3-e^\nu}{2}, \frac{2}{1+e^\nu}\right) a < b < \min\left(\frac{1+e^\nu}{2}, \frac{2}{3-e^\nu}\right) a \\ \|x-y\| < \frac{e^\nu-1}{2\max(b,a)} \end{cases}. \tag{27}$$

4. Гладкое многообразие сдвинутых одномерных решёток

На пространстве CPR_1 всех одномерных сдвинутых решёток, следуя за Касселсом (см. [13] стр. 165), зададим структуру топологического пространства, определив систему открытых окрестностей, согласованную с метрикой $\rho_1(\Lambda + x, \Gamma + y)$.

Пусть далее решётка M задана матрицей $A = (a)$, $a > 0$ и сдвинутая решётка имеет вид $M + ax$, $0 \leqslant x < 1$. Аналогично, решётка Λ задана матрицей $B = (b)$, $b > 0$ и сдвинутая решётка имеет вид $\Lambda + by$, $0 \leqslant y < 1$, решётка N задана матрицей $C = (c)$, $c > 0$, сдвинутая решётка имеет вид $N + cz$, $0 \leqslant z < 1$, решётка K задана матрицей $d = (d)$, $d > 0$, сдвинутая решётка имеет вид $K + dw$, $0 \leqslant w < 1$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$ сдвинутых решёток $\Lambda + by$ является *открытой μ-окрестностью* сдвинутой решётки $M + ax$, если оно состоит из всех сдвинутых решёток $\Lambda + by$ таких, что

$$\varphi_1(\Lambda + by) = C \cdot \varphi_1(M + ax), \quad \Lambda + by = \varphi_1^{-1}(C \cdot \varphi_1(M + ax)), \tag{28}$$

для которых невырожденная матрица C удовлетворяет соотношению

$$\|C - I\| < \mu. \tag{29}$$

Согласно лемме 21 матрица C имеет вид

$$C = C(\varepsilon) = \begin{pmatrix} ba^{-1} & b(y-x+\varepsilon) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что в случае одномерных сдвинутых решёток $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = 2\max_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} |a_{i\,j}|$.[4]

[4] Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\|-A\| = \|A\|$, $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы C с $\|C - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \frac{\mu}{2} < ba^{-1} < 1 + \frac{\mu}{2}$ и являются невырожденными.

Нетрудно записать окрестность $\mathbb{L}_\mu(M+ax)$ для произвольной сдвинутой решётки $M+ax = M(a) + ax = a\mathbb{Z} + ax$ с базисом (a):

$$\mathbb{L}_\mu(M+ax) = \left\{\Lambda + by = b\mathbb{Z} + by \,\middle|\, \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) a < b < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) a,\ b\|x - y\| < \frac{\mu}{2}\right\} = \\ = \left\{\Lambda + by = b\mathbb{Z} + by \,\middle|\, b \in R^*(a\mu, a), y \in R_1\left(\frac{\mu}{b}, x\right)\right\}. \tag{30}$$

Остановимся на вопросе о каноническом представлении открытой μ-окрестности сдвинутой решётки $M + ax$.

Лемма 23. *Каноническое представление открытой μ-окрестности сдвинутой решётки $M + ax$ является открытым множеством в бесконечном цилиндре Cy_∞.*

Доказательство. Согласно определению 1 для канонического представления сдвинутой решётки $M + ax$ имеем $\varphi(M + ax) = (\ln a, x)$ (здесь предполагается, что $a > 0$, $0 \leqslant x < 1$). Отсюда следует, что

$$\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax)) = \left\{(\theta_1, \theta_2) \,\middle|\, \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) a < e^{\theta_1} < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) a,\ e^{\theta_1}\|x - \theta_2\| < \frac{\mu}{2}\right\} = \\ = \left\{(\theta_1, \theta_2) \,\middle|\, \theta_1 \in \ln a + \left(\ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\right),\ \theta_2 \in R_1\left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, x\right)\right\}, \tag{31}$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 24. *Для любой сдвинутой решётки $M + ax$ её открытая μ-окрестностью содержит открытый шар $B_{\ln(1+\mu)}(M + ax)$ и при $\mu < \frac{1}{2}$ содержится в открытом шаре $B_{\ln(1+\mu_1)}(M + ax)$, где $\mu_1 = \frac{3\mu}{2-\mu}$.*

Доказательство. Действительно, согласно (27), открытый шар $B_{\ln(1+\mu)}(M+ax)$ задается неравенствами

$$\begin{cases} \frac{3-e^{\ln(1+\mu)}}{2} a < b < \frac{1+e^{\ln(1+\mu)}}{2} a \\ \frac{3-e^{\ln(1+\mu)}}{2} b < a < \frac{1+e^{\ln(1+\mu)}}{2} b \\ b\|x-y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu)}-1}{2} \\ a\|x-y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu)}-1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2-\mu}{2} a < b < \frac{2+\mu}{2} a \\ \frac{2-\mu}{2} b < a < \frac{2+\mu}{2} b \\ b\|x-y\| < \frac{\mu}{2} \\ a\|x-y\| < \frac{\mu}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) a < b < \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) a \\ b\|x-y\| < \frac{\mu}{2} \end{cases}.$$

Отсюда следует, что открытый шар $B_{\ln(1+\mu)}(M + ax)$ содержится в открытой μ-окрестности $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$.

Аналогично, имеем:

$$\begin{cases} \frac{3-e^{\ln(1+\mu_1)}}{2} a < b < \frac{1+e^{\ln(1+\mu_1)}}{2} a \\ \frac{3-e^{\ln(1+\mu_1)}}{2} b < a < \frac{1+e^{\ln(1+\mu_1)}}{2} b \\ b\|x-y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu_1)}-1}{2} \\ a\|x-y\| < \frac{e^{\ln(1+\mu_1)}-1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2-\mu_1}{2} a < b < \frac{2+\mu_1}{2} a \\ \frac{2}{2+\mu_1} a < b < \frac{2}{2-\mu_1} a \\ b\|x-y\| < \frac{\mu_1}{2} \\ b\|x-y\| < \frac{\mu_1}{2} ba^{-1} \end{cases}.$$

Отсюда следует, что открытая μ-окрестность $\mathbb{L}_\mu(M + ax)$ содержится в открытом шаре $B_{\ln(1+\mu_1)}(M + ax)$, если выполнены условия:

$$\mu \leqslant \mu_1, \quad \frac{2}{2 + \mu_1} \leqslant \frac{2 - \mu}{2}, \quad \frac{2}{2 - \mu_1} \geqslant 1 + \frac{\mu}{2}, \quad \frac{\mu_1}{2} ba^{-1} \geqslant \frac{\mu}{2}.$$

Последние неравенства выполнены, если выполнены неравенства

$$\mu \leqslant \mu_1, \quad \frac{2\mu}{2-\mu} \leqslant \mu_1, \quad \mu_1 \geqslant \frac{2\mu}{2+\mu}, \quad \frac{\mu_1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{2}\right) \geqslant \frac{\mu}{2}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}$ и $\mu_1 = \frac{3\mu}{2-\mu}$ эти неравенства выполняются, что и доказывает утверждение леммы. □

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x), \quad 0 \leqslant y_x < 1, a_x > 0, \quad M_x = a_x \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Естественно, что прежде всего надо установить, что пересечение двух окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M+ax)$ снова является открытым множеством.

Лемма 25. *Для любой сдвинутой решетки $N+cz$ из открытой окрестности $\mathbb{L}_\mu(M+ax)$ найдется открытая окрестность $\mathbb{L}_\nu(N+cz)$ такая, что $\mathbb{L}_\nu(N+cz) \subset \mathbb{L}_\mu(M+ax)$.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$\rho = \inf_{N+cz \in \mathbb{L}_{\mu_1}(M+ax)} \mu_1$$

и $\nu = \frac{\mu-\rho}{1+\rho}$, тогда $\varphi_1(N+cz) = C_1 \cdot \varphi_1(M+ax)$, $\|C_1 - I\| = \rho$.

Если $K+dw$ произвольная сдвинутая решётка из открытой окрестности $\mathbb{L}_\nu(N+cz)$, то $\varphi_1(K+dw) = D_1\varphi_1(N+cz)$, $\|D_1 - I\| < \nu$. Отсюда следует, что $\varphi_1(K+dw) = D_1C_1 \cdot \varphi_1(M+ax)$, $\|D_1C_1 - I\| = \|(D_1-I)(C_1-I) + C_1 - I + D_1 - I\| \leqslant \nu\rho + \nu + \rho = \mu$. Тем самым доказано, что сдвинутая решётка $K+dw$ принадлежит открытой окрестности $\mathbb{L}_\mu(M+ax)$ и лемма полностью доказана. □

Лемма 26. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M+ax)$ и $\mathbb{L}_\nu(N+cz)$ снова является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая. Если пересечение пустое множество, то утверждение леммы выполнено, так как пустое множество есть объединение пустого множества открытых окрестностей и, следовательно, открытое множество.

Рассмотрим второй случай, когда пересечение непустое множество. Обозначим его через $\mathbb{L}$. Пусть $K+dw$ произвольная сдвинутая решётка из $\mathbb{L}$. В силу леммы 25 найдется открытая окрестность $\mathbb{L}_\lambda(K+dw)$ с $\lambda = \lambda(K+dw)$, такая, что $\mathbb{L}_\lambda(K+dw) \subset \mathbb{L}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{L} = \bigcup_{K+dw \in \mathbb{L}} \mathbb{L}_{\lambda(K+dw)}(K+dw),$$

что и доказывает открытость множества $\mathbb{L}$. □

Из леммы 23 следует, что каноническое представление сдвинутых решёток задает гомеоморфное отображение пространства сдвинутых одномерных решёток на бесконечный цилиндр Cy_∞:

$$\varphi : CPR_1 \leftrightarrow Cy_\infty,$$

при котором сдвинутой решётке $\Lambda + \lambda x = \lambda\mathbb{Z} + \lambda x$ ($\lambda > 0$, $0 \leqslant x < 1$) ставится в соответствие точка (θ_1, θ_2):

$$\varphi(\Lambda + \lambda x) = (\ln\lambda, x) \in Cy_\infty, \quad (\theta_1, \theta_2) = (\ln\lambda, x),$$

а точке $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ ставится в соответствие сдвинутая решётка

$$\Lambda + \lambda x = \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1}\mathbb{Z} + e^{\theta_1}\theta_2 \in CPR_1, \quad x = \theta_2, \lambda = e^{\theta_1}.$$

Нетрудно видеть, что таким образом на CPR_1 задана структура топологического пространства $T_2 = (CPR_1, \tau_2)$, где τ_2 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_2 = (CPR_1, \tau_2)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}_1$, состоящую из всех μ-окрестностей рациональных сдвинутых решёток $M + \lambda x$ с рациональными λ, x, μ, и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество CPQ_1 всех рациональных сдвинутых решёток, т.е. решёток $M + \lambda x = M(\lambda) + \lambda x$ с $\lambda, x \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$, $0 \leqslant x < 1$.

Введем группы треугольных матриц $\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$, $\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{Q})$, заданные равенствами:

$$\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} ba^{-1} & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, a > 0,\ x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} ba^{-1} & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, a > 0,\ b, a, x \in \mathbb{Q} \right\},$$
$$\mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} ba^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b, a > 0,\ b, a \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{pmatrix} ba^{-1} & bx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ab^{-1} & -ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, множества треугольных матриц $\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$, $\mathfrak{M}_2^0(\mathbb{Q})$ являются некоммутативными группами. Очевидно, что множество диагональных матриц $\mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q})$, также, образуют коммутативную группу.

Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$ определим действие матрицы A на произвольную сдвинутую решётку $\Lambda + \lambda x$ с помощью равенства

$$A(\Lambda + \lambda x) = \varphi_1^{-1}(A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x)).$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} ba^{-1} & by \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda + \lambda x = \lambda\mathbb{Z} + \lambda x,$$

тогда

$$\varphi_1(\Lambda + \lambda x) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2, \quad A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x)) = \begin{pmatrix} ba^{-1} & by \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x)) = \begin{pmatrix} \lambda ba^{-1} & by + \frac{b\lambda x}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2 = \begin{pmatrix} \lambda ba^{-1} & \lambda ba^{-1}\left\{\frac{ay}{\lambda} + x\right\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2,$$
$$A(\Lambda + \lambda x) = \varphi_1^{-1}(A(\varphi_1(\Lambda + \lambda x))) = \lambda ba^{-1}\mathbb{Z} + \lambda ba^{-1}\left\{\frac{ay}{\lambda} + x\right\}.$$

Лемма 27. *Топология τ_2 инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования пространства $\mathbb{R}^2$, заданного матрицей $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$. Счетная база $\mathbb{B}_1$ инвариантна только относительно рациональных преобразований, заданных матрицами $D \in \mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q})$.*

Доказательство. Так как под действием линейного невырожденного преобразования пространства $\mathbb{R}^2$, заданного матрицей $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$, образ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda + \lambda x$ переходит в образ сдвинутой решётки $\lambda b a^{-1}\mathbb{Z} + \lambda b a^{-1}\left\{\frac{ay}{\lambda} + x\right\}$, то из равенства

$$A \cdot \mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x)$$

следует, для инвариантности топологии достаточно доказать, что $A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x)$ — открытое множество для любого $x \in X$.

Действительно, пусть $M(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — мера обусловленности матрицы A (всегда $M(A) \geqslant 2$ для матриц второго порядка) и

$$A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x) = \{\Lambda + \lambda y = \lambda\mathbb{Z} + \lambda y \mid \varphi_1(\Lambda + \lambda x) = A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x),\ \|B - I\| < \mu_x\}.$$

Пусть

$$\|B - I\| < \mu_x, \quad \delta = \frac{\mu_x - \|B - I\|}{\|B\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|A\|} = \frac{\mu_x - \|B - I\|}{\|B\| \cdot M(A)},$$
$$\varphi_1(\Lambda + \lambda y) = A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x), \quad \varphi_1(\Lambda_1 + \lambda_1 y_1) = C \cdot A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x) \in \mathbb{L}_\delta(\Lambda + \lambda y).$$

Таким образом, $\|C - I\| < \delta$ и $\delta < 1$ так как $\mu_x < 1 < \|I - B\| + \|B\| \leqslant \|I - B\| + \|B\| \cdot M(A)$.

Тогда

$$\varphi_1(\Lambda_1 + \lambda_1 y_1) = C \cdot A \cdot B \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x) = A \cdot B_1 \cdot \varphi_1(M_x + a_x y_x), \quad B_1 = A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot B$$

и справедливы неравенства

$$\|A^{-1} \cdot C \cdot A - I\| = \|A^{-1} \cdot C \cdot A - A^{-1} \cdot A\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|C - I\| \cdot \|A\| = M(A) \cdot \|C - I\|,$$
$$\|B_1 - I\| = \|A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot B - I\| \leqslant \|A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot B - B\| + \|B - I\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B\| \cdot \|A^{-1} \cdot C \cdot A - I\| + \|B - I\| \leqslant \|B\| \cdot \delta \cdot M(A) + \|B - I\| < \mu_x.$$

Отсюда следует

$$\mathbb{L}_\delta(\Lambda + \lambda y) \subset A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x), \quad A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x) = \bigcup_{\Lambda + \lambda y \in A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + a_x y_x)} \mathbb{L}_\delta(\Lambda + \lambda y)$$

и инвариантность топологии τ_2 относительно невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^2$, заданных матрицами $A \in \mathfrak{M}_2^0(\mathbb{R})$, доказана.

Перейдём к доказательству инвариантности счётной базы $\mathbb{B}_1$ относительно рациональных преобразований, заданных матрицами $D \in \mathfrak{D}_2^0(\mathbb{Q})$. Действительно, если

$$D = \begin{pmatrix} bd^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d, b \in \mathbb{Q}, \quad \mathbb{L}_\mu(M + ax) \in \mathbb{B}_1, \quad a > 0, \quad a, \mu, x \in \mathbb{Q},$$

то

$$D(\Lambda + y\lambda) = \lambda b d^{-1}\mathbb{Z} + \lambda b d^{-1} y, \quad D(M + ax) = a b d^{-1}\mathbb{Z} + a b d^{-1} x,$$
$$D\mathbb{L}_\mu(M + ax) = \{D(\Lambda + y\lambda) | \varphi_1(\Lambda + y\lambda) = C \cdot \varphi_1(M + ax),\ \|C - I\| < \mu\} =$$
$$= \{\varphi_1^{-1}(D\varphi_1(\varphi_1^{-1}(C\varphi_1(M + ax)))) | \|C - I\| < \mu\} = \{\varphi_1^{-1}(DC\varphi_1(M + ax)) | \|C - I\| < \mu\} =$$
$$= \{\varphi_1^{-1}(C_1\varphi_1(M + ax)) | \|C_1 - I\| < \mu_1\} = \mathbb{L}_{\mu_1}(M + ax),$$

где $\mu_1 = \max\left(\left|bd^{-1} - 1 + \frac{\mu_1 b d^{-1}}{2}\right|, \left|bd^{-1} - 1 - \frac{\mu_1 b d^{-1}}{2}\right|, \frac{\mu_1 b d^{-1}}{2}\right)$, что и доказывает последнее утверждение леммы. □

Пусть $M + ax = a\mathbb{Z} + ax$ и $N + cz = c\mathbb{Z} + cz$ — две произвольные сдвинутые решётки. Определим отрезок сдвинутых решёток $[M + ax; N + cz]$ с помощью равенства

$$[M + ax; N + cz] = \left\{ \Lambda + by = b\mathbb{Z} + by \;\middle|\; b = c \cdot t + (1-t) \cdot a,\ y = \frac{ax \cdot (1-t) + czt}{a \cdot (1-t) + t \cdot c} \right\}.$$

Ясно, что

$$\varphi_1(\Lambda + \lambda y) = \begin{pmatrix} a \cdot (1-t) + t \cdot c & ax \cdot (1-t) + czt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^2 =$$

$$= \left((1-t) \cdot \begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c & cz \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbb{Z}^2 = (1-t) \cdot \varphi_1(M + ax) + t \cdot \varphi_1(N + cz). \qquad (33)$$

Длина отрезка $l([M + ax; N + cz]) = \rho_1(M + ax, N + cz)$. Положим $c = ua$ и без ограничения общности будем считать, что $u \geqslant 1$. Тогда

$$\rho_1(M + ax, N + cz) = \ln\left(1 + 2\max\left(u - 1, ua\,\|x - z\|\right)\right). \qquad (34)$$

Далее имеем: $b = a \cdot (1-t) + t \cdot c = (1 - t + tu)a$, $y = \frac{x \cdot (1-t) + uzt}{(1-t) + t \cdot u}$,

$$\rho_1(M + ax, \Lambda + by) = \ln\left(1 + 2\max\left(t(u-1), (1-t+tu)a \left\| x - \frac{x \cdot (1-t) + uzt}{(1-t) + t \cdot u} \right\|\right)\right) =$$

$$= \ln\left(1 + 2\max\left(t(u-1), (1-t+tu)a \left\| \frac{tu(x-z)}{(1-t) + t \cdot u} \right\|\right)\right). \qquad (35)$$

Аналогично, имеем: $b = \left(\frac{1-t}{u} + t\right) c$,

$$\rho_1(\Lambda + by, N + cz) = \ln\left(1 + 2\max\left(\frac{1 - \frac{1-t}{u} - t}{\frac{1-t}{u} + t}, ua \left\| z - \frac{x \cdot (1-t) + uzt}{(1-t) + t \cdot u} \right\|\right)\right) =$$

$$= \ln\left(1 + 2\max\left(\frac{u - 1 + t - ut}{1 - t + ut}, ua \left\| \frac{(1-t)(x-z)}{(1-t) + t \cdot u} \right\|\right)\right). \qquad (36)$$

Из формул (34)–(36) видно, что длина отрезка определенная через метрику $\rho_1(\cdot, \cdot)$ не обладает свойством аддитивности, а отрезок в этой метрике не является геодезической кривой.

Топологическое пространство CPR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух сдвинутых решеток $\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1$, $\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые μ-окрестности $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1)$ и $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2)$ не пересекаются.

Действительно, пусть $\Lambda(\lambda) + z\lambda \in \mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1) \bigcap \mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2)$, тогда

$$\varphi_1(\Lambda(\lambda) + z\lambda) = C \cdot \varphi_1(\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1), \quad \varphi_1(\Lambda(\lambda) + z\lambda) = D \cdot \varphi_1(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2),$$

$$C = C(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1^{-1} & \lambda(z - x + \varepsilon_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = D(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_2^{-1} & \lambda(z - y + \varepsilon_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Z}, \quad \|C - I\| < \mu, \quad \|D - I\| < \mu.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1(\Lambda(\lambda_2) + y\lambda_2) = D^{-1}C \cdot \varphi_1(\Lambda(\lambda_1) + x\lambda_1), \quad D^{-1}C = \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_1^{-1} & \lambda_2(y - x + \varepsilon_1 - \varepsilon_) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее имеем:

$$(1-\mu)\lambda_1 < \lambda < (1+\mu)\lambda_1, \quad (1-\mu)\lambda_2 < \lambda < (1+\mu)\lambda_2,$$

поэтому

$$\lambda_2\lambda_1^{-1} < \frac{\lambda(1-\mu)^{-1}}{\lambda(1+\mu)^{-1}} = \frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}{1-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

что доказывает отсутствие непустого пересечения.

Всё пространство сдвинутых одномерных решёток CPR_1 гомеоморфно $Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является

$$\varphi : CPR_1 \leftrightarrow Cy_\infty = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z},$$

при котором сдвинутой решётке $\Lambda + \lambda x = \lambda\mathbb{Z} + \lambda x$, $0 \leqslant x < 1$ ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda + \lambda x) = (\ln(\lambda), x) \in Cy_\infty,$$

а паре чисел $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ ставится в соответствие сдвинутая решётка

$$\Lambda + x\lambda = \varphi^{-1}((\theta_1, \theta_2)) = e^{\theta_1}\mathbb{Z} + e^{\theta_1}\theta_2 \in CPR_1.$$

Отсюда следует, что пространство сдвинутых одномерных решёток CPR_1 локально евклидово пространство размерности 2.

Согласно Уорнеру (см. [20], стр. 13) пара (U, φ), где $U = \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ — открытая μ-окрестность сдвинутой решётки $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$, а φ — гомеоморфное отображение U на открытое множество $\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax))$ (31) из Cy_∞, называется системой координат, φ — координатным отображением. На самом деле, гомеоморфное отображение φ отображает всё пространство сдвинутых одномерных решёток CPR_1 на весь бесконечный цилиндр Cy_∞. Так как $\varphi(\mathbb{Z}) = (0, 0)$, то фундаментальная одномерная решётка $\mathbb{Z}$ с нулевым сдвигом является началом данной системы координат.

Чтобы произвольная сдвинутая решётка $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$ была бы началом координат надо использовать гомеоморфное отображение $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln\lambda - \ln a, \{y - x\})$.

Согласно Арнольду (см. [1], стр. 205) открытое множество $\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax))$ (31) из Cy_∞ является картой открытой μ-окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ и $\varphi(\Lambda + y\lambda_1)$ изображением сдвинутой решётки $\Lambda + y\lambda_1 \in \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ на карте $\varphi(\mathbb{L}_\mu(M + ax))$.

Лемма 28. *Открытая μ-окрестность сдвинутой решётки $M + ax$ при гомеоморфное отображение $\varphi_{M+ax}(\Lambda + y\lambda) = (\ln\lambda - \ln a, \{y - x\})$ отображается в открытое множество в бесконечном цилиндре $Cy_\infty = \mathbb{R} \times J_1$.*

Доказательство. Согласно определению 3 для представления сдвинутой решётки $M+ax$ имеем $\varphi_{M+ax}(M + ax) = (0, 0)$ (здесь предполагается, что $a > 0$, $0 \leqslant x < 1$). Отсюда следует, что

$$\varphi_{M+ax}(\mathbb{L}_\mu(M + ax)) = \left\{(\theta_1, \theta_2) \,\middle|\, \ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) < \theta_1 < \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right),\ e^{\theta_1}\|\theta_2\| < \frac{\mu}{2}\right\} =$$
$$= \left\{(\theta_1, \theta_2) \,\middle|\, \theta_1 \in \left(\ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\right),\ \theta_2 \in R_1\left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, 0\right)\right\}, \tag{37}$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Будем через φ_ν обозначать ограничение на окрестность $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu + x_\nu\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ гомеоморфного отображения φ пространства сдвинутых одномерных решёток CPR_1 на весь бесконечный цилиндр Cy_∞: $\varphi_\nu = \varphi|\mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu + x_\nu\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$.

Лемма 29. *Для любых двух открытых пересекающихся μ-окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu + x_\nu\lambda_\nu)$ сдвинутых решёток $M_\nu + x_\nu\lambda_\nu = M_\nu(\lambda_\nu) + x_\nu\lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на образы $\varphi_\nu(U_\nu)$ связаны соотношениями*

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2)$$

для любой точки (θ_1, θ_2) из пересечения образов $\varphi_1(U_1) \bigcap \varphi_2(U_2)$.

Доказательство. Действительно, пусть

$$U = U_1 \bigcap U_2 = \mathbb{L}_{\mu_1}(M_1 + x_1\lambda_1) \bigcap \mathbb{L}_{\mu_2}(M_2 + x_2\lambda_2)$$

и

$$U^* = \varphi_1(\mathbb{L}_{\mu_1}(M_1 + x_1\lambda_1)) \bigcap \varphi_2(\mathbb{L}_{\mu_2}(M_2 + x_2\lambda_2)),$$

тогда $\varphi(U) = U^*$, так как $\varphi_\nu(U_\nu) = \varphi(U_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$.

Так как для $(\theta_1, \theta_2) \in U^*$ имеем:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \varphi \circ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2), \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta_1, \theta_2) = \varphi \circ \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2),$$

то это и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 30. *Гомеоморфное отображение*

$$\varphi : CPR_1 \leftrightarrow Cy_\infty$$

при котором сдвинутой решётке $\Lambda + x\lambda = \lambda\mathbb{Z} + x\lambda$ *ставится в соответствие точка*

$$\varphi(\Lambda + x\lambda) = (\ln(\lambda), x) \in Cy_\infty,$$

а точке $(\theta_1, \theta_2) \in Cy_\infty$ *ставится в соответствие сдвинутая решётка*

$$\Lambda + x\lambda = \varphi^{-1}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1}\mathbb{Z} + e^{\theta_1}\theta_2 \in CPR_1,$$

переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + y_x\lambda_x)$ *в открытое множество*

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x \in X} \left\{ (\theta_1, \theta_2) \middle| \theta_1 \in \ln \lambda_x + \left(\ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \right), \theta_2 \in R_1\left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, y_x\right) \right\}. \tag{38}$$

Доказательство. Действительно, согласно (31) имеем:

$$\varphi(\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x + y_x\lambda_x)) = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \middle| \theta_1 \in \ln \lambda_x + \left(\ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \right), \theta_2 \in R_1\left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, y_x\right) \right\},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda + x\lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{CM} = CPR_1$ следующим образом.

Пусть $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda \in CPR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M + x\lambda)$ — открытая μ-окрестность, координатная функция $\varphi_{M+x\lambda}$ для произвольной сдвинутой решетки $\Lambda + y\lambda_1 = \lambda_1\mathbb{Z} + y\lambda_1 \in U$ задается равенством $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1) = (\ln \lambda_1 - \ln \lambda, \{y - x\})$. Так как $\varphi_{M+x\lambda}(M + x\lambda) = (0, 0)$, то сдвинутая решётка $M + x\lambda$ является началом данной системы координат. Для любой точки $(\theta_1, \theta_2) \in \left\{ (\theta_1, \theta_2) \middle| \theta_1 \in \left(\ln\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \ln\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \right), \theta_2 \in R_1\left(\frac{\mu}{e^{\theta_1}}, 0\right) \right\}$ имеем:

$$\varphi^{-1}_{M+x\lambda}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\}.$$

Касательное пространство многообразия $\mathcal{CM}$ в точке $M + x\lambda$ будем обозначать через $\mathcal{CM}_{M+x\lambda}$, оно имеет размерность два.

Касательный вектор $\left.\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right|_{M+x\lambda} \in \mathcal{CM}_{M+x\lambda}$ $(i = 1, 2)$ зададим равенством

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right|_{M+x\lambda} \right)(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial\theta_i}\right|_{\varphi(M+x\lambda)} \tag{39}$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности сдвинутой решётки $M + x\lambda \in \mathcal{CM}$. Также будет использоваться обозначение

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right|_{M+x\lambda} = \left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right|_{M+x\lambda} \right)(f). \tag{40}$$

5. Функции на пространстве сдвинутых решёток

В теоретико-числовом методе в приближенном анализе следующие функции на пространстве сдвинутых решёток представляют особый интерес, это — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки и сдвинутой решётки, норменный минимум, дзета-функция решётки и гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки. Рассмотрим эти понятия последовательно в случае пространства CPR_1 одномерных сдвинутых решёток.

Детерминант решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ задается равенством $\det\Lambda = \lambda$ и остается неизменным для всех сдвинутых решёток $\Lambda(\lambda) + x\lambda$. Ясно, что $\det\Lambda^* = (\det\Lambda)^{-1}$, $\det\mathbb{Z} = 1$. Для вычисления $\frac{\partial\det\Lambda}{\partial\theta_i}\Big|_{M+x\lambda}$ заметим следующее: для сдвинутой решётки $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$ координатная функция $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda+y\lambda_1)$ задается равенством $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda+y\lambda_1) = (\ln(\lambda_1) - \ln(\lambda), \{y-x\}) = (\theta_1, \theta_2)$, где $\Lambda = \Lambda(\lambda_1)$. Далее имеем $\varphi^{-1}_{M+x\lambda}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1}\cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x+\theta_2\}$ и $\det\Lambda\circ\varphi^{-1} = \det(e^{\theta_1}\cdot M) = e^{\theta_1}\lambda$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\det\Lambda}{\partial\theta_1}\Big|_{M+x\lambda} = \frac{\partial e^{\theta_1}\lambda}{\partial\theta_1}\Big|_0 = \lim_{h\to 0}\frac{e^h\lambda - \lambda}{h} = \lambda = \det M, \qquad \frac{\partial\det\Lambda}{\partial\theta_2}\Big|_{M+x\lambda} = 0.$$

В одномерном случае для решёток с детерминантом более 1 все три величины — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум — совпадают. Начиная с размерности $s = 2$ справедливы неравенства $N(\Lambda) \leqslant q(\Lambda) \leqslant \det\Lambda$, где

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x}\in\Lambda,\,\vec{x}\neq\vec{0}} |x_1\cdot\ldots\cdot x_s| \text{ — норменный минимум,}$$

$$q(\Lambda) = \inf_{\vec{x}\in\Lambda,\,\vec{x}\neq\vec{0}} \overline{x_1}\cdot\ldots\cdot\overline{x_s} \text{ — гиперболический параметр решетки.}$$

Гиперболический параметр одномерной решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$, $0 < \lambda \leqslant 1$ тождественно равен 1, поэтому гиперболический параметр одномерной решётки непрерывная, кусочно дифференцируемая функция. Разрыв производной в точке $\lambda = 1$.

Для сдвинутой одномерной решётки $\Lambda(\lambda) + x\lambda$ $0 < x < 1$ функции норменного минимума и гиперболического параметра существенно различаются:

$$N(\Lambda(\lambda) + x\lambda) = \inf_{y\in\Lambda(\lambda)+x\lambda,\,y\neq 0} |y| = \lambda\|x\| = (\det\Lambda)\|x\| \text{ — норменный минимум сдвинутой решётки,}$$

$$q(\Lambda(\lambda) + x\lambda) = \inf_{y\in\Lambda(\lambda)+x\lambda,\,y\neq 0} \overline{y} = \overline{\lambda\|x\|} \text{ — гиперболический параметр сдвинутой решетки.}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial N(\Lambda(\lambda) + x\lambda)}{\partial\theta_1}\Big|_{M+x\lambda} = (\det M)\|x\|,$$

$$\frac{\partial N(\Lambda(\lambda) + x\lambda)}{\partial\theta_2}\Big|_{M+x\lambda} = \lim_{h\to 0}(\det M)\frac{\|x+h\| - \|x\|}{h} = \begin{cases} \det M, & \text{при } 0 < \{x\} < \frac{1}{2}, \\ -\det M, & \text{при } \frac{1}{2} < \{x\} < 1. \end{cases}$$

При $\{x\} = 0$ и $\{x\} = \frac{1}{2}$ производная $\|x\|'$ не определена.

Дзета-функция сдвинутой решётки в одномерном случае всегда определена и мы для сдвинутой решётки $\Lambda(\lambda) + x\lambda$ при $\lambda > 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем:

$$\zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \sum_{y\in\Lambda(\lambda)+x\lambda}{}' |y|^{-\alpha} = \frac{\zeta(\alpha; x) + \zeta(\alpha; 1-x)}{\lambda^\alpha},$$

где $\zeta(\alpha; x)$ — периодизированная дзета-функция Гурвица (см. [7], стр. 78). Напомним, что $\zeta(\alpha; x) = \sum_{n+x>0}(n+x)^{-\alpha}$ и при этом $\lim_{x\to m^{+0}}\zeta(\alpha; x) = +\infty$, $\lim_{x\to m^{-0}}\zeta(\alpha; x) = \zeta(\alpha)$ для

любой целой точки m. Таким образом, периодическая функция $\zeta(\alpha;x)$ непрерывна во всех нецелых точках x и разрывна в целых.

Отсюда следует, что для $\Lambda(\lambda_1)+y\lambda_1=\varphi^{-1}_{M+x\lambda}(\theta_1,\theta_2)=e^{\theta_1}\cdot M+e^{\theta_1}\lambda\{x+\theta_2\}$ имеем:

$$\zeta(\Lambda(\lambda_1)+y\lambda_1|\alpha)=\frac{\zeta(\alpha;\{x+\theta_2\})+\zeta(\alpha;1-\{x+\theta_2\})}{(e^{\theta_1}\lambda)^\alpha},$$

$$\left.\frac{\partial\zeta(\Lambda(\lambda_1)+y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_1}\right|_{M+x\lambda}=\left.\frac{\partial\frac{\zeta(\alpha;\{x\})+\zeta(\alpha;1-\{x\})}{(e^{\theta_1}\lambda)^\alpha}}{\partial\theta_1}\right|_0=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\zeta(\alpha;\{x\})+\zeta(\alpha;1-\{x\})}{(e^h\lambda)^\alpha}-\frac{\zeta(\alpha;\{x\})+\zeta(\alpha;1-\{x\})}{(\lambda)^\alpha}}{h}=-\alpha\zeta(M+x\lambda|\alpha).$$

Для вычисления частной производной по θ_2 рассмотрим производную периодической функции $g(x)=\zeta(\alpha;\{x\})+\zeta(\alpha;1-\{x\})$.

Будем для простоты считать, что $0<x<1$. Имеем:

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha}+\frac{1}{(n+1-x)^\alpha}\right)'=-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^{\alpha+1}}-\frac{1}{(n+1-x)^{\alpha+1}}\right)=$$
$$=\alpha(\zeta(\alpha+1;1-x)-\zeta(\alpha+1;x)).$$

Заметим, что периодическая функция $g(x)=\zeta(\alpha;\{x\})+\zeta(\alpha;1-\{x\})$ разрывна во всех целых точках x.

Из предыдущего следует, что

$$\left.\frac{\partial\zeta(\Lambda(\lambda_1)+y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_2}\right|_{M+x\lambda}=\left.\frac{\partial\frac{\zeta(\alpha;\{x+\theta_2\})+\zeta(\alpha;1-\{x+\theta_2\})}{\lambda^\alpha}}{\partial\theta_2}\right|_0=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\zeta(\alpha;\{x+h\})+\zeta(\alpha;1-\{x+h\})}{\lambda^\alpha}-\frac{\zeta(\alpha;\{x\})+\zeta(\alpha;1-\{x\})}{\lambda^\alpha}}{h}=\frac{\alpha(\zeta(\alpha+1;1-x)-\zeta(\alpha+1;x))}{\lambda^\alpha}.$$

Относительно дзета-функции решётки и гиперболической дзета-функции решётки необходимо сказать следующее в случае размерности $s\geqslant2$. Дзета-функция решётки определена для произвольной декартовой решётки, но неопределена для произвольной алгебраической решётки. Поэтому её как функцию на всём пространстве многомерных решёток рассматривать нельзя, так как множество алгебраических решёток всюду плотно в пространстве всех решёток (см. [18]).

Гиперболической дзета-функции сдвинутых решёток посвящены следующие два раздел.

5.1. Гиперолическая дзета-функция сдвинутых решёток

Гиперболическая дзета-функция произвольной решётки $\Lambda\in PR_s$ имеет важное значение в теоретико-числовом методе в приближенном анализе, так как она равна норме линейного функционала приближенного интегрирования с помощью квадратурной формулы с обобщённой параллелепипедальной сетки на классе E^α_s, если решётка Λ — целочисленная, или дает оценку сверху в противном случае. Гиперболическая дзета-функция произвольной сдвинутой решётки $\Lambda+\vec{x}\in CPR_s$ является естественным обобщением гиперболической дзета-функции аналогичное обобщению дзета-функции Римана через дзета-функцию Гурвица.

В одномерном случае гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки $\Lambda+x\lambda=\Lambda(\lambda)+x\lambda$ имеет наиболее простой вид

$$\zeta_H(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha)=\sum_{y\in\Lambda(\lambda)+x,\,y\neq0}\frac{1}{\overline{y}^\alpha}=\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq-x}\frac{1}{\overline{\lambda(n+x)}^\alpha}.$$

Заметим, что

$$\zeta_H(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha)=\zeta_H(\Lambda(\lambda)+\|x\|\lambda|\alpha). \tag{41}$$

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha)=\zeta(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha)+f_1(\alpha,\lambda,x)$, где

$$f_1(\alpha,\lambda,x)=\sum_{-\frac{1}{\lambda}<n+x<\frac{1}{\lambda}}{}' (1-|\lambda n+x\lambda|^{-\alpha}).$$

Так как при $0<\lambda<1$ имеем $\lim_{x\to m^{+0}} f_1(\alpha,\lambda,x)=+\infty$, $\lim_{x\to m^{-0}} f_1(\alpha,\lambda,x)=+\infty$ для любой целой точки m, то периодическая функция $f_1(\alpha,\lambda,x)$ непрерывна во всех нецелых точках x и разрывна в целых. Аналогично, при $\lambda\geqslant 1$ имеем $\lim_{x\to m^{+0}} f_1(\alpha,\lambda,x)=+\infty$, $\lim_{x\to m^{-0}} f_1(\alpha,\lambda,x)=+\infty$ и периодическая функция $f_1(\alpha,\lambda,x)$ непрерывна во всех нецелых точках x и разрывна в целых и в в этом случае.

Для исследования свойств гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки нам потребуется другое представление для неё. Прежде всего введём следующие обозначения $K(\lambda,x)=\left\lceil\frac{1}{\lambda}-x\right\rceil$, где для $y>0$ $\lceil y\rceil=k$ при $k-1<y\leqslant k$, $k\in\mathbb{N}$. Положим при $k\in\mathbb{N}$, $\alpha>1$

$$\zeta(\Lambda(\lambda)+x\lambda|k,\alpha)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^{\alpha}}.$$

Нетрудно видеть, что $K(\lambda,1-\|x\|)\leqslant K(\lambda,\|x\|)$ и $0\leqslant K(\lambda,\|x\|)-K(\lambda,1-\|x\|)\leqslant 1$, так как $0\leqslant 1-2\|x\|\leqslant 1$.

При $k=0$ и $0<x<1$ имеем $\zeta(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha)=\frac{\zeta(\Lambda(\lambda)+x\lambda|0,\alpha)+\zeta(\Lambda(\lambda)+(1-x)\lambda|0,\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$.

Используя сделанные обозначения, можно записать следующее простое выражение для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки $\Lambda(\lambda)+x\lambda$

$$\zeta_H(\Lambda+x\lambda|\alpha)=$$
$$=\begin{cases}\frac{\zeta(\alpha;\|x\|)+\zeta(\alpha;1-\|x\|)}{\lambda^{\alpha}} & \text{при } \lambda\|x\|\geqslant 1,\\ K(\lambda,\|x\|)-1+\frac{\zeta(\Lambda(\lambda)+\|x\|\lambda|K(\lambda,\|x\|),\alpha)+\zeta(\alpha;1-\|x\|)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } \lambda\|x\|<1\leqslant\lambda(1-\|x\|),\\ K(\lambda,\|x\|)+K(\lambda,1-\|x\|)-2+ & \\ +\frac{\zeta(\Lambda(\lambda)+1-\|x\|\lambda|K(\lambda,1-\|x\|),\alpha)+\zeta(\Lambda(\lambda)+\|x\|\lambda|K(\lambda,\|x\|),\alpha)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } \lambda(1-\|x\|)<1, 0<\lambda.\end{cases} \tag{42}$$

Непрерывность гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки $\Lambda+x\lambda=\Lambda(\lambda)+x\lambda$ очевидна для всех $\lambda\neq\frac{1}{k+x},\frac{1}{k+1-x}$, где k — любое натуральное число. Непрерывность слева в точке $\lambda=\frac{1}{k+\|x\|}$ также очевидна, так как при $\frac{1}{k+\|x\|}<\lambda<\frac{1}{k-1+\|x\|}$ имеем $K(\lambda,\|x\|)=k$, а при $\frac{1}{k+1-\|x\|}<\lambda<\frac{1}{k-\|x\|}$ имеем $K(\lambda,1-\|x\|)=k$, поэтому указанные точки разбивают положительную полуось $\lambda>0$ а интервалы знакопостоянства величин $K(\lambda,\|x\|)$ и $K(\lambda,1-\|x\|)$, при этом на каждом из интервалов эти величины непрерывны справа в своих левых границах.

Рассмотрим $\lim\limits_{\lambda\to\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^{-}}\zeta_H(\Lambda+\|x\|\lambda|\alpha)$. Имеем:

$$\lim_{\lambda\to\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^{-}}\zeta_H(\Lambda+\|x\|\lambda|\alpha)=k-1+\frac{\zeta\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)+\|x\|\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)\middle|\,k,\alpha\right)+\zeta(\alpha;1-\|x\|)}{\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^{\alpha}}=$$
$$=(k-1)-1+\frac{\zeta\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)+\|x\|\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)\middle|\,k-1,\alpha\right)+\zeta(\alpha;1-\|x\|)}{\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)^{\alpha}}=$$
$$=\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)+\|x\|\left(\frac{1}{k-1+\|x\|}\right)\middle|\,\alpha\right)$$

и непрерывность слева также установлена.

Предыдущие рассуждения доказывают непрерывность гиперболической дзета-функции по одному параметру λ. Для доказательства непрерывности по двум параметрам λ и x воспользуемся следующими соображениями. Во-первых, без ограничения общности согласно (41) можно считать, что $\lambda > 0$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Во-вторых, разобьём множество всех точек (λ, x) на подмножества: множество A_k состоит из всех точек (λ, x), для которых $K(\lambda, x) = k$ $(k \in \mathbb{N})$; множество B_k состоит из всех точек (λ, x), для которых $K(\lambda, 1-x) = k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Если точка (λ, x) — внутренняя точка и множества A_k и множества B_m, то гиперболическая дзета-функции сдвинутой решётки $\zeta_H(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha) = \zeta(\Lambda(\lambda)+x\lambda|\alpha)+f_1(\alpha,\lambda,x)$ непрерывна в этой точке, так как в некоторой окрестности этой точки величины $K(\lambda, x) = k$ и $K(\lambda, 1-x) = m$ постоянные, а соответствующие ряды Дирихле равномерно сходятся и задают непрерывные функции.

Если точка (λ, x) — граничная точка или множества A_k, или множества B_m, то гиперболическая дзета-функции сдвинутой решётки $\zeta_H(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) = \zeta(\Lambda(\lambda) + x\lambda|\alpha) + f_1(\alpha, \lambda, x)$ непрерывна в этой точке, так как в некоторой окрестности этой точки величины $K(\lambda, x) = k$ и $K(\lambda, 1-x) = m$ величины либо увеличиваются на единицу, либо уменьшаются, а соответствующие ряды Дирихле равномерно сходятся и задают непрерывные функции при этом либо добавляется, либо удаляется одно слагаемое, сходящиеся к единице.

Таким образом, установлена непрерывность гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки на пространстве CPR_1, что согласуется с общей теоремой из работы [17].

5.2. Производная от гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

Определим множества $C_{k,m}$ как пересечение множеств A_k и B_m. Для большинства пар индексов (k, m) множество $C_{k,m}$ является пустым. Непустыми могут быть только множества $C_{k,k}$ и $C_{k,k-1}$.

Для любого непустого множества $C_{k,m}$ для всех внутренних точек сохраняется один и тот же вид из формулы (42). Поэтому во внутренних точках можно дифференцировать.

Итак, пусть $M + x\lambda$ — внутренняя точка непустого множества $C_{k,m}$. Тогда для сдвинутой решётки $M + x\lambda = M(\lambda) + x\lambda$ координатная функция $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda + y\lambda_1)$ задается равенством $\varphi_{M+x\lambda}(\Lambda+y\lambda_1) = (\ln(\lambda_1) - \ln(\lambda), \{y-x\}) = (\theta_1, \theta_2)$, где $\Lambda = \Lambda(\lambda_1)$. Далее имеем $\varphi^{-1}_{M+x\lambda}(\theta_1, \theta_2) = e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\}$.

Рассмотрим три случая.

Пусть, во-первых, $e^{\theta_1}\lambda\|x + \theta_2\| \geqslant 1$, тогда имеем равенство для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

$$\zeta_H(e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\})|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha; \|x + \theta_2\|) + \zeta(\alpha; 1 - \|x + \theta_2\|)}{(\theta_1\lambda)^\alpha}.$$

Отсюда следует справедливость следующих равенств в этом случае

$$\left.\frac{\partial\zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_1}\right|_{M+x\lambda} = -\alpha\zeta_H(M + x\lambda|\alpha),$$
$$\left.\frac{\partial\zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_2}\right|_{M+x\lambda} = \frac{\alpha(\zeta(\alpha+1; 1-x) - \zeta(\alpha+1; x))}{\lambda^\alpha}.$$

Пусть, во-вторых, $e^{\theta_1}\lambda\|x + \theta_2\| < 1 \leqslant e^{\theta_1}\lambda(1 - \|x + \theta_2\|)$, тогда имеем равенство для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

$$\zeta_H(e^{\theta_1} \cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x + \theta_2\})|\alpha) =$$

$$= K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|) - 1 + \frac{\zeta(e^{\theta_1}M + \|x+\theta_2\|e^{\theta_1}\lambda \,|\, K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|), \alpha) + \zeta(\alpha; 1-\|x+\theta_2\|)}{(e^{\theta_1}\lambda)^{\alpha}}.$$

Так как величина $K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|)$ — постоянная на множестве $C_{k,m}$ и при $k = K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|)$

$$\frac{\partial\zeta(e^{\theta_1}M + \|x+\theta_2\|e^{\theta_1}\lambda \,|\, K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|), \alpha)}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^{\alpha}}}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial\zeta(M + \|x+\theta_2\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x+\theta_2\|), \alpha)}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^{\alpha}}}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} =$$

$$= -\alpha\varepsilon(x)\zeta(M + \|x\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x\|), \alpha+1),$$

где $\varepsilon(x) = 1$ при $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon(x) = -1$ при $\frac{1}{2} < \{x\} < 1$, то

$$\frac{\partial\zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = -\alpha\frac{\zeta(M + \|x\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x\|), \alpha) + \zeta(\alpha; 1-\|x\|)}{\lambda^{\alpha}},$$

$$\frac{\partial\zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} = \frac{-\alpha\varepsilon(x)\zeta(M + \|x\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x\|), \alpha+1) - \alpha\varepsilon(x)\zeta(\alpha+1; 1-\|x\|)}{\lambda^{\alpha}}.$$

Пусть, в-третьих, $e^{\theta_1}\lambda(1-\|x+\theta_2\|) < 1$, тогда имеем равенство для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки

$$\zeta_H(e^{\theta_1}\cdot M + e^{\theta_1}\lambda\{x+\theta_2\})|\alpha) =$$
$$= K(e^{\theta_1}\cdot\lambda, \|x+\theta_2\|) + K(e^{\theta_1}\cdot\lambda, 1-\|x+\theta_2\|) - 2 +$$
$$+ \frac{\zeta(e^{\theta_1}M + (1-\|x+\theta_2\|)e^{\theta_1}\lambda \,|\, K(e^{\theta_1}\lambda, 1-\|x+\theta_2\|), \alpha)}{(e^{\theta_1}\lambda)^{\alpha}} +$$
$$+ \frac{\zeta(e^{\theta_1}\Lambda(\lambda) + \|x+\theta_2\|e^{\theta_1}\lambda \,|\, K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|), \alpha)}{(e^{\theta_1}\lambda)^{\alpha}}.$$

Так как величины $K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|)$ и $K(e^{\theta_1}\cdot\lambda, 1-\|x+\theta_2\|)$ — постоянные на множестве $C_{k,k'}$ и при $k = K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|)$, $k' = K(e^{\theta_1}\lambda, 1-\|x+\theta_2\|)$

$$\frac{\partial\zeta(e^{\theta_1}M + \|x+\theta_2\|e^{\theta_1}\lambda \,|\, K(e^{\theta_1}\lambda, \|x+\theta_2\|), \alpha)}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^{\alpha}}}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial\zeta(e^{\theta_1}M + (1-\|x+\theta_2\|)e^{\theta_1}\lambda \,|\, K(e^{\theta_1}\lambda, 1-\|x+\theta_2\|), \alpha)}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = \sum_{n=k'}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+1-\|x+\theta_2\|)^{\alpha}}}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial\zeta(M + \|x+\theta_2\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x+\theta_2\|), \alpha)}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+\|x+\theta_2\|)^{\alpha}}}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} =$$

$$= -\alpha\varepsilon(x)\zeta(M + \|x\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x\|), \alpha+1),$$

$$\frac{\partial\zeta(M + 1 - \|x+\theta_2\|\lambda \,|\, K(\lambda, 1-\|x+\theta_2\|), \alpha)}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} = \sum_{n=k'}^{\infty} \frac{\partial \frac{1}{(n+1-\|x+\theta_2\|)^{\alpha}}}{\partial\theta_2}\bigg|_{M+x\lambda} =$$

$$= \alpha\varepsilon(x)\zeta(M + (1-\|x\|)\lambda \,|\, K(\lambda, 1-\|x\|), \alpha+1),$$

где $\varepsilon(x) = 1$ при $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon(x) = -1$ при $\frac{1}{2} < \{x\} < 1$, то

$$\frac{\partial\zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial\theta_1}\bigg|_{M+x\lambda} =$$

$$= -\alpha \frac{\zeta(M+\|x\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x\|), \alpha) + \zeta(M+(1-\|x+\theta_2\|)\lambda \,|\, K(\lambda, 1-\|x+\theta_2\|), \alpha)}{\lambda^\alpha},$$

$$\left.\frac{\partial \zeta_H(\Lambda + y\lambda_1|\alpha)}{\partial \theta_2}\right|_{M+x\lambda} =$$
$$= \frac{-\alpha\varepsilon(x)\zeta(M+\|x\|\lambda \,|\, K(\lambda, \|x\|), \alpha+1) + \alpha\varepsilon(x)\zeta(M+(1-\|x\|)\lambda \,|\, K(\lambda, 1-\|x\|), \alpha+1)}{\lambda^\alpha}.$$

Таким образом, мы видим, что гиперболическая дзета-функция сдвинутой решётки кусочно дифференцируемая функция, у которой отсутствуют производные в граничных точках множеств $C_{k,m}$.

6. Заключение

В работе [19] были построенные основы теории гладких многообразий только для простейшего случая пространства одномерных теоретико-числовых решёток. Он более простой, так как любая одномерная решётка имеет только два базиса, отличающихся знаком. Как было указано в этой статье, уже рассмотрение сдвинутых решёток осложнено тем, что для задания метрики на пространстве таких решёток необходимо рассмотреть их погружение в пространство решёток большой размерности. А как известно, уже для любой двумерной решётки количество базисов решётки счётно. Поэтому возникли определенные трудности для построения теории гладких многообразий сдвинутых одномерных решёток, но они были успешно преодолены в настоящей работе.

В работе были выделены множества $C_{k,m}$, во внутренних точках которых гиперболическая дзета-функция сдвинутых решёток дифференцируемая функция на гладком многообразии сдвинутых одномерных решеток, а в граничных точках этих множеств дифференцируемость нарушается.

Решению возникающих проблем при построении теории гладких многообразий решёток в общем случае многомерных решёток и многомерных сдвинутых решёток будут посвящены следующие статьи по этой тематике.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток и сдвинутых многомерных решёток гораздо сложнее, чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток (см. стр. 220). Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток и многомерных сдвинутых решёток, а также в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получение теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшим направлением исследований может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах решёток и многомерных решёток. Как известно (см. [2], [21]), аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространстве решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

3. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

4. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10—15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54—80.

7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72—105.

8. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

9. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

10. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.

12. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

13. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.

14. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

15. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

17. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета–функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

18. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.

19. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.

20. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.

21. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1975, "Ordinary differential equations", M .: Science, 240 p.

2. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

3. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

5. Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090-84.

6. Dobrovolsky N. M. "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis", Sb. IV International conference glqq Modern problems of number theory and its applications grqq dedicated to the 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov. Tula, 10 — 15 September, 2001 Actual problems Ch. I. M. MGU, 2002. p. 54–80.

7. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev, L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova, 2016, "ON HYPERBOLIC HURWITZ ZETA FUNCTION", *Chebyshevskii sbornik*, vol 17, no. 3, P. 72—105.

8. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, "On the continuity of the zeta function of a grid with weights", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.

9. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices", *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

10. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, "Number of lattice points in the hyperbolic cross", Math. Notes, 63:3 (1998), 319–324.

11. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, "On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross", Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh, p. 53.

12. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices", Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. T. 2. Issue 1. Tula: Publishing house of Tula State University, p. 77–87.

13. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

14. A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

15. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

16. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

17. Rebrova, I. YU. 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

18. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, "Algebraic lattices in the metric space of lattices", Chebyshev sb., vol. 18, no. 4, p. 326–338.

19. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Smooth manifold of one-dimensional lattices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.

20. Warner F. Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups. — M .: Mir, 1987. — 304 p.

21. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky, 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" . *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications.* Vol. 211. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 27.05.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.