ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-179-195

О некоторых аддитивных проблемах гольдбахова типа

Х. М. Салиба, В. Н. Чубариков

Салиба Ходем Мансур — кандидат физико-математических наук, университет Нотр-Дам-Луэз (Ливан, Бейрут).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В данной работе найдена асимптотическая формула для числа решений нелинейной тернарной проблемы с простыми числами, остаток в которой имеет степенное понижение. Вывод ее использует “явную формулу” для числа простых, не превосходящих любой наперед заданной границы, через нули дзета-функции Римана. По существу решается тернарная задача на “каждом нуле”.

Исследование подобных задач стало возможным после решения в 1937 г. И. М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха [1], [2]. В 1938 г. он нашел оценку среднего значения модуля тригонометрической суммы по простым со степенным понижением относительно длины промежутка суммирования ([2], теорема 3, с.82; теоремы 6 и 7, с.86).

Начиная с 1996 г. Г. И. Архипов, К.Буриев и автор [6]-[9], используя еще соображения из теории диофантовых приближений и “явную формулу” для числа простых чисел в теории дзета-функции Римана, получили несколько результатов для исключительного множества в бинарных проблемах гольдбахова типа. В работах Г. Л. Ватсона, Д. Брюдерна, Р. Д. Кука и А. Перелли [10]-[12] дополнительно к этому развивается подход, связанный с теорией меры, для уточнения оценок линейных тригонометрических сумм с простыми числами.

Ключевые слова: a ternary problem with primes, explicit formulas for the P.L.Chebyshev function, a “dense” theorem for zeros of the Riemann zeta-function.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Х. М. Салиба, В. Н. Чубариков. О некоторых аддитивных проблемах гольдбахова типа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 179–195.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-179-195

On some additive problems of Goldbach's type

H. M. Saliba, V. N. Chubarikov

Saliba Holem Mansour — Ph.D. in physics and mathematics, Notre Dame University-Louaize (Lebanon, Beirut).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

In this paper, we find an asymptotic formula with power-saving remainder term for the number of solutions of one non-linear ternary problem with primes. The proof is based on the "precise formula" for Chebyshev's function involving the zeros of Riemann zeta function. In fact, a ternary problem "at each zero" is solved. I. M. Vinogradov's solution of the ternary Goldbach problem (1937, see [1], [2]) opened the way of solving a wide class of problems of the above type. In 1938, he found a power-saving estimate (with respect to the length of the summation interval) for the mean value of the modulus of the exponential sum with primes (see [2], theorem 3, p.82; theorems 6 and 7, p.86). Starting at 1996, G.I. Arkhipov, K. Buriev and the author have obtained several results concerning the exceptional sets in some binary problems of Goldbach's type. These results used both the tools of the theory of Diophantine approximations and the "precise formulas" from Riemann's zeta function theory. At the same time, the method of estimating of linear sums with primes based on the measure theory was derived in the papers of G. L. Watson, D. Brüdern, R. D. Cook and A. Perelli.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

H. M. Saliba, V. N. Chubarikov, 2021, "On some additive problems of Goldbach's type", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 179–195.

1. Введение

Настоящая работа посвящена выводу асимптотики для числа представлений натурального числа суммой трех слагаемых, каждое из которых является целой частью от произведения заданного вещественного числа на простые числа, причем они пробегают всю последовательность простых в натуральном ряду чисел. Соответствующие три вещественных числа являются алгебраическими числами и линейно независимы над полем рациональных чисел. Остаток в найденной асимптотике имеет степенное понижение по отношению к представляемому числу, которое является достаточно большим.

Исследование подобных задач стало возможным после решения в 1937 г. И. М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха [1], [2]. В 1938 г. он нашел оценку среднего значения

модуля тригонометрической суммы по простым со степенным понижением относительно длины промежутка суммирования ([2], теорема 3, с.82; теоремы 6 и 7, с.86).

Начиная с 1996 г. Г.И.Архипов, К.Буриев и автор [6]-[9], используя еще соображения из теории диофантовых приближений и “явную формулу” для числа простых чисел в теории дзета-функции Римана, получили несколько результатов для исключительного множества в бинарных проблемах гольдбахова типа. В работах Г.Л.Ватсона, Д.Брюдерна, Р.Д.Кука и А.Перелли [10]-[12] дополнительно к этому развивается подход, связанный с теорией меры, для уточнения оценок линейных тригонометрических сумм с простыми числами.

Здесь мы существенно используем эти идеи и методы.

Сформулируем и докажем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. При $N \rightarrow +\infty$ для числа $J = J(N)$ решений уравнения

$$[\beta_1 p_1] + [\beta_2 p_2] + [\beta_3 p_3] = N$$

справедлива асимптотическая формула вида

$$J(N) = \frac{N^2}{2\beta_1\beta_2\beta_3 \ln^3 N} + \Delta_1,$$

где $\Delta_1 = N^{\frac{19}{10}+\varepsilon}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ — алгебраические числа, линейно-независимые над полем рациональных чисел, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Докажем здесь только следующую теорему 2. Утверждение теоремы 1 выводится из нее преобразованием Абеля.

Пусть

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. При $N \rightarrow +\infty$ для числа $I = I(N)$

$$I = \sum_{\substack{n_1 \leq N\beta_1^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_2 \leq N\beta_2^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_3 \leq N\beta_3^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)$$

справедлива асимптотическая формула вида

$$I(N) = \frac{N^2}{2\beta_1\beta_2\beta_3} + \Delta,$$

где $\Delta = N^{19/10}(\ln N)^{3,5}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 1$ — квадратичные иррациональности, линейно-независимые над полем рациональных чисел.

В случае, если $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ — алгебраические числа, линейно-независимые над полем рациональных чисел, то $\Delta = N^{\frac{19}{10}+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

2. Предварительные преобразования

Пусть

$$S_\beta(\alpha) = \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha [\beta n]}.$$

Тогда имеем

$$I = \sum_{\substack{n_1 \leq N\beta_1^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_2 \leq N/\beta_2^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \sum_{\substack{n_3 \leq N\beta^{-1} \\ [\beta_1 n_1] + [\beta_2 n_2] + [\beta_3 n_3] = N}} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3) =$$

$$= \int_0^1 S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Положим $\kappa = N^{-3/4}$. Обозначим $E_1 = [-\kappa, \kappa)$, $E_2 = [\kappa, 1 - \kappa)$. Поскольку $S_\beta(\alpha)$ — периодическая функция по α с периодом единица, получим

$$I = \int_0^1 S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \int_{-\kappa}^{1-\kappa} \dots = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\kappa}^{\kappa} S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

$$I_2 = \int_{\kappa}^{1-\kappa} S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

3. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. (П.Л.Г.Дирихле). Пусть $\tau \geq 1$. Тогда любое вещественное число α можно представить в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, [3], вопрос 4.в, с.21.

ЛЕММА 2. (И.М.Виноградов). Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1,$$

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$S(\alpha, x) \ll x \ln^{3,5} x (q^{0,5} x^{-0,5} + q^{-0,5} + x^{-0,2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [16], теорема 5.12, с. 74.

ЛЕММА 3. (О.В. Попов). Пусть α — вещественное число, $0 < |\alpha| \leq 1/2$, $P < P_1 \leq 2P$ — натуральные числа, $f(x)$ — вещественнозначная функция натурального аргумента,

$$V_0(\alpha) = \sum_{P < n \leq P_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha [f(n)]}.$$

Тогда при любом натуральном $K \geq 2$, $M = [(2K + 1)\pi/2] + 1$, $M_0 = [M \ln M]$ справедлива оценка

$$|V_0(\alpha)| \leq \sum_{|m| \leq M} \left| \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha + m} V(\alpha + m) \right| + 36 \sum_{0 < |m| \leq M_0} |V(m)| \cdot |\sin \pi \alpha| \frac{\ln M}{M} +$$

$$+ 136 |\sin \pi \alpha| \frac{P \ln M}{M},$$

где

$$V(\alpha) = \sum_{P < n \leq P_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha f(n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [22], лемма 3, с. 28.

ЛЕММА 4. (Д.Касселс). Пусть q_n и q_{n+1} — знаменатели последовательных подходящих дробей любого вещественного иррационального числа μ . Тогда справедливо неравенство

$$\|q_n \mu\| > \frac{1}{2q_{n+1}},$$

где $\|t\|$ обозначает расстояние от числа t до ближайшего к нему целого числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [19], неравенство (16), с.16.

Рассмотрим функцию П.Л.Чебышёва

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольда

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\rho = \beta + i\gamma$ обозначает нуль дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, лежащий в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

ЛЕММА 5. При $T \geq 2$ и $x \geq 2$ справедливо соотношение

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x, T),$$

где

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T} \ln^2(xT) + \ln x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [20], теорема 4.5, с.264.

ЛЕММА 6. (Формула Абеля суммирования значений гладкой функции в интегральной форме). Пусть функция $g(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, x]$, пусть, также, заданы неубывающая последовательность $\{\lambda_n\}$ и произвольная последовательность $\{a_n\}$, и пусть

$$A(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} a_n.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n g(\lambda_n) - A(x)g(x) = - \int_{\lambda_1}^x A(t)g'(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [21], гл. VIII, теорема 6, с. 208.

ЛЕММА 7. (Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений гладкой функции). Пусть функция $f(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, x]$ и $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a < n \leq x} f(n) - \rho(x)f(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f'(t)\rho(t) dt - \rho(a)f(a).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [21], гл. VIII, теорема 4, с.206.

ЛЕММА 8. (Ван дер Корпут). Пусть функция $f(t)$ имеет монотонную и знакопостоянную производную на отрезке $[a, x]$, причем на этом отрезке $|f'(t)| \leq \delta$ при некотором постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$. Тогда имеем

$$\sum_{a < n \leq x} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^x e^{2\pi i f(t)} dt + \theta \left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta} \right),$$

где θ — абсолютная постоянная с условием $|\theta| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [1], гл. II, лемма 3, с.25.

ЛЕММА 9. Пусть $\rho = \beta + i\gamma$ — нули дзета-функции Римана. Тогда при $y \rightarrow +\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{|\gamma| < y^{0,4}} y^{\beta-1} \ll e^{-c(\ln y)^{0,2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма — частный случай леммы 11.20 из [18], с. 210.

ЛЕММА 10. Пусть в промежутке $q < x \leq r$ функция $f''(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{A} \ll |f''(x)| \ll \frac{1}{A}.$$

Кроме того, пусть $\varphi(x)$ монотонна и $\varphi(x) \ll H$.

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{q < x \leq r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} \ll H \left(\frac{r-q}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U \right),$$

где $U = \max\{r-q, A\}$.

Если же имеет место неравенство

$$\delta \leq |f'(x)| \leq 0,5,$$

то справедлива оценка

$$\sum_{q < x \leq r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} \ll H \left(\frac{1}{\delta} + \ln(r-q) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма — прямое следствие лемм 1 и 1а из [2], с. 14-16.

ЛЕММА 11. Имеем

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha} d\alpha = \frac{1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, [17], лемма 4, с. 188-190 (вычисление особого интеграла в проблеме Варинга). Положим

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha x} d\alpha.$$

Поскольку справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right| = \frac{|\sin \pi \alpha|}{\pi |\alpha|} \leq \min(1, (\pi |\alpha|)^{-1}),$$

интеграл, представляющий функцию $f(x)$, абсолютно сходится.

Более того, функция $f(x)$ является непрерывной на промежутке $0 \leq x \leq 2$. В самом деле, находим

$$\begin{aligned} |f(x + \Delta x) - f(x)| &\leq 4 \int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right|^3 |\sin \pi \alpha \Delta x| d\alpha \leq \\ &\leq 4\pi |\Delta x| \int_0^{|\Delta x|^{-1/3}} \alpha d\alpha + 4\pi^2 \int_{|\Delta x|^{-1/3}}^{+\infty} \alpha^{-3} d\alpha \ll |\Delta|^{1/3}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл $F(y) = \int_0^y f(x) dx$ будет дифференцируемой функцией на интервале $0 < y < 2$.

Пользуясь теоремой о равенстве повторных интегралов (см., например, [14], гл. 17, §7, с.421, теорема 16), имеем

$$F(y) = \int_0^y f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 \int_0^y e^{-2\pi i \alpha x} dx d\alpha.$$

Выполняя интегрирование по переменной x и вновь пользуясь той же теоремой о равенстве повторных интегралов, находим

$$F(y) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha (u_1 + u_2 + u_3)} - e^{2\pi i \alpha (u_1 + u_2 + u_3 - y)}}{2\pi i \alpha} d\alpha.$$

Для краткости положим $\lambda = u_1 + u_2 + u_3$. Тогда предыдущее выражение примет вид

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\pi \alpha \lambda - \sin 2\pi \alpha (\lambda - y)}{\alpha} d\alpha.$$

Воспользуемся известным тождеством $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$. Получим

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\operatorname{sgn} \lambda - \operatorname{sgn}(\lambda - y)) du_1 du_2 du_3 = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

$0 \leq \lambda \leq y$

После замены переменных интегрирования $u_1 = v_1 y, u_2 = v_2 y, u_3 = v_3 y$ приходим к интегралу Дирихле (см., например, [17], гл. III, теорема 6, с.58)

$$F(y) = y^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dv_1 dv_2 dv_3 = y^3 \frac{1}{\Gamma(4)} = \frac{y^3}{6}.$$

$0 \leq v_1 + v_2 + v_3 \leq 1$

Следовательно,

$$f(y) = F'(y) = \frac{y^2}{2}, \theta = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

4. Асимптотика $S_\beta(\alpha)$ на E_1

Напомним, что $E_1 = [-\kappa, \kappa], \kappa = N^{-3/4}$. Преобразуем сумму $S_\beta(\alpha)$ при $\alpha \in E_1$. Если $|\alpha| \leq N^{-1} \ln^7 N$, то воспользуемся тривиальной оценкой $|S_\beta(\alpha)| \ll N/\beta$. Пусть $\tau^{-1} = N^{-\omega}$ и $|\alpha| > N^{-1} \ln^7 N$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_\beta(\alpha) &= \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha [\beta n]} = \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} e^{-2\pi i \alpha \{\beta n\}} = \\ &= \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} (1 + O(|\alpha|)) = \sum_{n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} + R_2, \end{aligned}$$

где

$$R_2 \ll |\alpha| N \ll N \tau^{-1} \ll N^{1/4}.$$

Поскольку β — постоянная, справедливы оценки $N^{-1} \ll \alpha \beta \ll N^{-3/4}$. По лемме 1 находим следующее представление числа в виде

$$\alpha \beta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1, q \geq 1, |\theta| < 1.$$

Отсюда выводим, что

$$\frac{a}{q} = \frac{1}{[1/(\alpha \beta)]}, \quad \text{если} \quad \left\{ \frac{1}{\alpha \beta} \right\} < \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{a}{q} = \frac{1}{[1/(\alpha \beta)] + 1}, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2} \leq \left\{ \frac{1}{\alpha \beta} \right\}.$$

Поэтому, используя лемму 2, находим

$$S_\beta(\alpha) \ll N q^{1/2} N^{-1/2} (\ln N)^{3,5} \ll N^{1/2} \alpha^{-1/2} (\ln N)^{3,5}.$$

Заметим, что эта оценка нетривиальна, если $|\alpha| \gg N^{-1} (\ln N)^7$. Далее, применяя преобразование Абеля, получим

$$S_\beta(\alpha) = \sum_{n \leq N\beta^{-1}} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n} + O(N^{1-\omega}) = -2\pi i \alpha \int_2^N \psi(t) e^{2\pi i \alpha t} dt + \psi(N) e^{2\pi i \alpha N}.$$

Положим $T = N^{0,4}$. Воспользуемся при $v \rightarrow \infty$ асимптотикой (лемма 6)

$$\psi(v) = v - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{v^\rho}{\rho} + R(v),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль дзета-функции Римана,

$$R(v) \ll \frac{v \ln^2 v}{T}.$$

Затем выполним интегрирование по частям. Находим

$$S(\alpha) = S_0(\alpha) - \int_2^N e^{2\pi i \alpha t} \left(\sum_{|\gamma| \leq T} t^{\rho-1} \right) dt + R_1,$$

где

$$\begin{aligned} S_0(\alpha) &= \int_0^N e^{2\pi i \alpha t} dt, \\ R_1 &= R(N)e^{2\pi i \alpha N} + 2\pi i \alpha \int_2^N R(t)e^{2\pi i \alpha t} dt \ll \\ &\ll \frac{|\alpha| N^2 \ln^2 N}{T} + \frac{N \ln^2 N}{T} \ll \frac{N^{5/4} \ln^2 N}{T}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл “на нуле” дзета-функции Римана $\rho = \beta_0 + i\gamma_0$, $\beta_0 \leq 1 - c(\ln T)^{-2/3}$, $|\gamma_0| \leq T$. Имеем

$$\int_0^N t^{\rho-1} e^{2\pi i \alpha t} dt = \int_0^N t^{\beta_0-1} t^{i\gamma_0} e^{2\pi i \alpha t} dt = \sum_{s=0}^l J_s,$$

где

$$J_s = \int_{n_{s+1}}^{n_s} t^{\beta_0-1} t^{i\gamma_0} e^{2\pi i \alpha t} dt, \quad n_s = N e^{-s}, \quad 0 \leq s \leq l, \quad l = [\ln N] + 1.$$

По второй теореме о среднем, примененной отдельно к вещественной и мнимой частям интеграла, при некотором $n_{s+1} \leq \xi \leq n_s$ находим

$$|J_s| \ll n_{s+1}^{\beta_0-1} \left| \int_{n_{s+1}}^{\xi} e^{2\pi i \alpha t + i\gamma_0 \ln t} dt \right|.$$

Воспользуемся при $v \rightarrow \infty$ асимптотикой

$$\psi(v) = v - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{v^\rho}{\rho} + R(v), \quad R(v) = O\left(\frac{v \ln^2 v}{T}\right)$$

К сумме

$$U(\alpha\beta) = \sum_{0 < n \leq N/\beta} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha \beta n}$$

при $\alpha \in E_1$ применим формулу Абеля суммирования значений функции по целым точкам в интегральной форме (лемма 6). Получим

$$U(\alpha\beta) = \psi(N/\beta) e^{2\pi i \alpha N} - \int_0^{N/\beta} \psi(t) d(e^{2\pi i \alpha \beta t}) =$$

$$= \left(\frac{N}{\beta} - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(N/\beta)^\rho}{\rho} \right) e^{2\pi i \alpha N} - \int_0^{N/\beta} \left(t - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{t^\rho}{\rho} \right) d(e^{2\pi i \alpha \beta t}) + R_1(N),$$

$$R_1(N) = R(N/\beta) e^{2\pi i \alpha N} - \int_1^{N/\beta} R(t) d(e^{2\pi i \alpha \beta t}).$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$U(\alpha\beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^N e^{2\pi i \alpha t} dt - \int_1^{N/\beta} \left(\sum_{|\gamma| \leq T} t^{\rho-1} \right) e^{2\pi i \alpha \beta t} dt + R_1(N).$$

Оценим $R_1(N)$. Имеем

$$|R_1(N)| \ll |R(N)| + |\alpha|N + |\alpha| \int_{\sqrt{N}}^N |R(t)| dt \ll N^{7/8}.$$

§4. АСИМПТОТИКА I_1 .

Перейдем к выводу асимптотики при $N \rightarrow \infty$ величины I_1 . Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\kappa}^{\kappa} S_{\beta_1}(\alpha) S_{\beta_2}(\alpha) S_{\beta_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_{-\kappa}^{\kappa} \left(\int_0^N e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha + R_0. \end{aligned}$$

После замены переменных $\alpha_0 = \alpha N$, $u_0 = u/N$ находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{N^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_{-\kappa N}^{\kappa N} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha_0 u_0} du_0 \right)^3 e^{-2\pi i \alpha_0} d\alpha_0 + R_0 = \\ &= \frac{N^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha} d\alpha + R_0 + R_1 = \end{aligned}$$

По лемме 11 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha u} du \right)^3 e^{-2\pi i \alpha} d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{N^2}{2\beta_1 \beta_2 \beta_3} + R_{11}, R_{11} \ll |R_0| + |R_1| \ll N^{5/4}.$$

5. Оценка $S_\beta(\alpha)$ на E_2

Пусть $F(\alpha)$ обозначает величину

$$F(\alpha) = \min(|S_{\beta_1}(\alpha)|, |S_{\beta_2}(\alpha)|, |S_{\beta_3}(\alpha)|).$$

Тогда при любом α находим

$$|S_{\beta_1}(\alpha)S_{\beta_2}(\alpha)S_{\beta_3}(\alpha)| \leq F(\alpha)(|S_{\beta_1}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_2}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_3}(\alpha)|^2).$$

Как и раньше, обозначим $E_2 = [\kappa, 1 - \kappa)$, $\kappa = N^{-3/4}$.

При $\alpha \in E_2$ по лемме 1 представим всякое α в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau},$$

где $1 \leq q \leq \tau$, $(a, q) = 1$, $|\theta| < 1$ и $\tau = N^{3/4}$.

Оценим $F(\alpha)$ при $\alpha \in E_2$. Рассмотрим два возможных случая:

1) $N^{1/4} \leq q \leq N^{3/4}$;

2) $1 \leq q < N^{1/4}$.

В случае 1) воспользуемся леммой 2. При $N^{1/4} \leq q \leq N^{3/4}$, для некоторого $\beta = \beta_s$, $1 \leq s \leq 3$, находим

$$F(\alpha) \leq |S_\beta(\alpha)| \ll N(\ln)^{3,5}(q^{0,5}N^{-0,5} + q^{-0,5} + N^{-0,2}) \ll N^{7/8}(\ln N)^{3,5}.$$

Оценим теперь $F(\alpha)$ в случае 2). Воспользуемся неравенством леммы 3 для оценки суммы $S_\beta(\alpha)$ для некоторого $\beta = \beta_s$, $s = 1, 2, 3$.

Положим в ней $K = N^{1/10}$, $f(n) = \beta n$, $P = 1$, $P_1 = N$. Тогда $M \ll K$, $M_0 \ll N^{1/10} \ln N$. Имеем

$$T(\gamma) = \sum_{P < n \leq P_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma n},$$

где $1 \leq P \leq N/\beta$, $P_1 \leq 2P$, причем $\gamma = (\alpha + m)\beta$, $m \ll M$ и $\gamma = m\beta$, $m \ll M_0$.

Неполные частные q_k квадратичных иррациональностей β ограничены. Следовательно, для любого натурального k справедливы неравенства $q_k \ll q_{k+1} \ll q_k$. Поскольку подходящие дроби являются дробями наилучшего приближения, для любого m с условием $q_k \leq m < q_{k+1}$ имеем

$$\|m\gamma\| \geq \|q_k\gamma\| > \|q_{k+1}\gamma\|.$$

Для алгебраических иррациональностей β воспользуемся теоремой Рота (см. замечание к лемме 4).

Дальнейшее рассмотрение случая 2) разобьем на три подслучая:

21) $\gamma = m\beta$, $m \ll N^{1/10} \ln N$;

22) $\gamma = \alpha\beta$;

23) $\gamma = (m + \alpha)\beta$, $m \ll N^{1/10}$.

Начнем рассмотрение с условия 21). При фиксированном m по лемме 1 имеем

$$m\beta = \frac{a_1}{r_1} + \frac{\theta_1}{r_1\tau_1},$$

где $a_1 \geq 1$, $(a_1, r_1) = 1$, $|\theta_1| < 1$, $r_1 \leq \tau_1 = N^{1/2}$.

Отсюда находим $r_1 m\beta - a_1 = \theta_1 \tau_1^{-1}$. Используя свойство подходящих дробей как дробей наилучшего приближения, при некотором k находим

$$\tau_1^{-1} \geq \|r_1 m\beta\| \geq \|q_k \beta\| > \frac{1}{2q_{k+1}},$$

т.е. $q_{k+1} > \tau_1/2$, причем для знаменателей q_k, q_{k+1} подходящих дробей β справедливы неравенства $q_k \leq r_1 m < q_{k+1}$. В силу ограниченности неполных частных имеем

$$q_{k+1} \leq q_k \ll r_1 m.$$

Стало быть,

$$r_1 m \gg \tau_1 = N^{3/8}, r_1 \ll N^{1/2}.$$

Используя неравенства $r_1 \leq \tau_1, m \leq N^{1/8} \ln N$, получим

$$\frac{N^{3/8}}{\ln N} \ll r_1 \leq N^{1/2}.$$

Применяя лемму 2, находим

$$T(m\beta) \ll N^{0,8}(\ln N)^{3,5}.$$

Случай 21) рассмотрен.

Перейдем к случаю 22). Имеем $\gamma = \alpha\beta$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, (a, q) = 1, |\theta| < 1, q < N^{1/8}, \tau = N^{3/4}.$$

По лемме 1 при $\tau = N^{3/4}$ представим $\gamma = \alpha\beta$ в виде

$$\gamma = \frac{a_2}{r_2} + \frac{\theta_2}{r_2\tau},$$

где $a_2 \geq 1, (a_2, r_2) = 1, |\theta_2| < 1, r_2 \leq \tau$.

Отсюда находим

$$\alpha\beta = \left(\frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}\right)\beta = \frac{a_2}{r_2} + \frac{\theta_2}{r_2\tau}, \frac{a\beta}{q} - \frac{a_2}{r_2} \ll \frac{1}{q\tau} + \frac{1}{r_2\tau}.$$

Следовательно,

$$\|ar_2\beta\| \ll ar_2\beta - a_2q \ll \frac{r_2 + q}{\tau}.$$

Пусть k таково, что знаменатели подходящих дробей удовлетворяют условиям $q_k \leq ar_2 < q_{k+1}$. Тогда из условий наилучших приближений, рассмотренных выше, получим

$$q_{k+1} \gg \frac{\tau}{q + r_2}, q_k \leq ar_2 < q_{k+1}.$$

Откуда

$$ar_2 \gg \frac{\tau}{q + r_2}, r_2(r_2 + q) \gg \frac{\tau}{a} \ll N^{1/2}.$$

При $r_2 \gg q$ имеем

$$r_2 \gg r_2 + q, r_2^2 \gg (r_2 + q)r_2 \gg N^{1/2}, r_2 \gg N^{1/4},$$

а при $r_2 \ll q \ll N^{1/4}$ имеем

$$r_2q \gg (r_2 + q)r_2 \gg N^{1/2}, r_2 \gg N^{1/2}q^{-1} \gg N^{1/4}.$$

Поскольку $\tau = N^{3/4} \geq r_2 \gg N^{1/4}$, по лемме 2 находим

$$T(\alpha\beta) \ll N^{7/8}(\ln N)^{3,5}.$$

Случай 22) рассмотрен.

Осталось рассмотреть случай 23): $\gamma = (\alpha + m)\beta$, $m \ll N^{1/10}$, $q < N^{1/4}$.

Вновь воспользуемся леммой 1 Дирихле. Положим $\tau_3 = N^{3/4}m^{1/2}$. Имеем

$$\gamma = (\alpha + m)\beta = \frac{a_3}{r_3} + \frac{\theta_3}{r_3\tau_3}, (a_3, q_3) = 1, |\theta_3| < 1, r_3 \leq \tau_3.$$

Используя разложение для $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, находим

$$\gamma = \frac{a + mq}{q}\beta + \frac{\theta\beta}{q\tau} = \frac{a_3}{r_3} + \frac{\theta_3}{r_3\tau_3},$$

что приводит к оценке

$$r_3(a + mq)\beta - a_3q \ll \frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}.$$

Вновь, пользуясь соображениями о наилучших приближениях подходящими дробями, получим

$$\|r_3(a + mq)\beta\| \ll \frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}, r_3(a + mq) \gg \left(\frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}\right)^{-1}.$$

При $r_3/\tau \geq q/\tau_3$ имеем

$$\left(\frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}\right)^{-1} \gg \frac{\tau}{r_3},$$

что приводит к неравенствам

$$r_3(a + mq) \gg \frac{\tau}{q_3}, r_3^2 \gg \frac{\tau}{mq} \geq \frac{N^{1/2}}{m}, r_3 \gg N^{1/4}m^{-1/2}.$$

При $r_3/\tau \leq q/\tau_3$ имеем

$$\left(\frac{r_3}{\tau} + \frac{q}{\tau_3}\right)^{-1} \gg \frac{\tau_3}{q}, r_3(a + mq) \gg \frac{\tau_3}{q},$$

$$r_3 \gg \frac{\tau_3}{q^2m} \geq \frac{N^{3/4}m^{1/2}}{N^{1/4}m} = N^{1/2}m^{-1/2}.$$

Поскольку $r_3 \leq \tau_3$, всегда справедливы неравенства

$$N^{1/4}m^{-1/2} \ll r_3 \ll N^{3/4}m^{1/2}.$$

Далее, пользуясь леммой 2, получим

$$T((\alpha + m)\beta) \ll N^{7/8}m^{1/4}(\ln N)^{3,5}.$$

Наконец, используя оценки сумм $T(\gamma\beta)$ для случаев 2.1)-2.3), получим оценку величины $F(\alpha)$.

Имеем

$$\begin{aligned} |F(\alpha)| &\ll \sum_{|m| \leq M} \left| \frac{V_0((\alpha + m)\beta)}{\alpha + m} \right| + \sum_{0 < |m| \leq M_0} |V_0(m\beta)| \frac{\ln M}{M} + \frac{N \ln M}{M} \ll \\ &\ll N^{9/10}(\ln N)^{3,5}. \end{aligned}$$

6. Оценка I_2

Отсюда имеем, обозначая $E_2 = [\kappa, 1 - \kappa)$, $\kappa = N^{-3/4}$,

$$I_2 \leq \max_{\alpha \in E_2} |F(\alpha)| I_{21},$$

$$I_{21} = \int_0^1 (|S_{\beta_1}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_2}(\alpha)|^2 + |S_{\beta_3}(\alpha)|^2) d\alpha.$$

Отсюда получим

$$I_{21} \ll N.$$

Это завершает оценку I_2 .

7. Завершение вывода асимптотики I

Имеем

$$I = I(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = I_1 + I_2 = \frac{N^2}{2\beta_1\beta_2\beta_3} + O(N^{19/10} \ln^{3,5} N).$$

Теорема 2 доказана.

Вывод теоремы 1 из теоремы 2 получается с помощью формулы Абеля суммирования значений гладкой функции по целым числам (лемма 6).

8. Заключение

Асимптотическая формула при $N \rightarrow \infty$ для числа решений уравнения $[\beta_1 p_1] + [\beta_2 p_2] + [\beta_3 p_3] = N$, p_1, p_2, p_3 — простые числа, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 1$ — квадратичная иррациональность, отличается от асимптотики для числа решений уравнения $p_1 + p_2 + p_3 = N$ более точным остаточным членом, имеющим степенное понижение по отношению к главному члену. Это связано с тем, что “стирается арифметика” при распределении простых чисел в арифметических прогрессиях при иррациональных числах $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Физматлит. 1976, 144 с.
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Физматлит. 1983
4. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.
5. Hua Loo-Keng. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. Oxford. 1938. V.9. P.68-80.
6. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
7. Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. О мощности исключительного множества в бинарной аддитивной проблеме гольдбахова типа // Тр. МИАН, 1997, т.218, с. 28-57.

8. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. РАН, 2002, т.387, №3, с. 295-296.
9. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О мере “больших дуг” в разбиении Фарея // Чебышевский сборник, 2011, т.12, вып. 4, с. 39-42.
10. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // In book: Sieve Methods, Exponential Sums and their Applications in Number Theory. Greaves G. R. H., Harman G., Huxley M. N., Eds. Cambridge University Press, 1996, p. 87-100.
11. Brüdern J. Some additive problems of Goldbach’s type // Functiones et Approximatio. 2000, V. XXVIII, p. 45-73.
12. Watson G. L. On indefinite quadratic forms in five variables // Proc. London Math. Soc., 1953, 3(3), p. 170-181.
13. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987, 368 с.
14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.
15. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set of Goldbach’s problem // Acta arithm. 1975. V. 27. P. 353–370.
16. Cheng Jing-run, Liu Jian Min. The exceptional set of Goldbach-numbers (III) // Chinese Quart. J. Math. 1989. V.4. No. 1. P. 1–15.
17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 240 с.
18. Pan Chengdong, Pan Chenbiao. Goldbach conjecture. — Beijing (China), Science Press, 1992. pp.240.
19. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит. 1961. pp.213.
20. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир. 1967. pp.512.
21. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.
22. Попов О. В. Арифметические приложения оценок сумм Г.Вейля от многочленов растущей степени. Канд. дис. — М.: МГУ. 1995.
23. Тырина О. В. Средние значения тригонометрических сумм. Канд. дис. — М.: МГУ. 1989.
24. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, 278, No. 2, 302–304.
25. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, 49, No. 5, 1031–1067.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1980. The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct. and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.
2. Vinogradov I. M. 1976. Special variants of the trigonometrical sums method. — M.: Fizmatlit, pp. 144.
3. Vinogradov I. M. 1983. Elements of the number theory. — M.: Fizmatlit, pp. 160.
4. Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, pp. 888.
5. Hua Loo-Keng. Some results in the additive prime number theory. Quart. J. Math. Oxford. 1938. V.9. P. 68-80.
6. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ. House of the Orjol University, pp. 464.
7. Arkhipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N., 1997. On a cardinality of an exceptional set in the binary additive problem of Goldbach's type. Proc. of Steklov institute, v. 218, p. 28-57.
8. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., 2002. On the exceptional set in the binary problem of the Goldbach's type. Dokl. RAS, v. 387, №3, p. 295-296.
9. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., 2011. On the measure of "large arcs" in the Farey tiling. Chebyshev sbornik, v. 12, issue. 4, p. 39-42.
10. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. 1996. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. In book: Sieve Methods, Exponential Sums and their Applications in Number Theory. Greaves G. R. H., Harman G., Huxley M. N., Eds. Cambridge University Press, p. 87-100.
11. Brüdern J. 2000. Some additive problems of Goldbach's type. Functiones et Approximatio. V. XXVIII, p. 45-73.
12. Watson G. L. 1953. On indefinite quadratic forms in five variables. Proc. London Math. Soc., 3(3), p. 170-181.
13. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987. The theory of multiple trigonometric sums. — Moscow.: Nauka. Fizmatlit. 368 c.
14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.
15. Montgomery H. L., Vaughan R. C. 1975. The exceptional set of Goldbach's problem. Acta arithm. V. 27. P. 353-370.
16. Cheng Jing-run, Liu Jian Min. 1989. The exceptional set of Goldbach-numbers (III). Chinese Quart. J. Math. V.4. No. 1. P. 1-15.
17. Karatsuba A. A. 1983. Foundations of analytic number theory. 2nd Ed. — M.: Nauka. Gl. red. phis. -math. literature, pp. 240 (in Russian).
18. Pan Chengdong, Pan Chenbiao. 1992. Goldbach conjecture. — Beijing (China), Science Press, pp. 240.
19. Cassels J. B. C. 1961. An introduction to Diophantine approximation. — M.: Izd-vo inostr. lit., pp. 213.

-
20. Prahar K. 1967. Distribution of prime numbers. — М.: Mir, pp.512.
 21. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lecture on mathematical analysis. 4th Ed., corr. — М.: Drofa. pp. 640.
 22. Popov O. V. 1995. Arithmetical applications of the H.Weyl's sums estimates from polynomials of a rising degree. Candidate thesis. — М.: MSU.
 23. Tyrina O. V. 1989. Mean-values of trigonometric sums. Candidate thesis. — М.: MSU.
 24. Chubarikov V. N. 1984. Multiple trigonometric sums with primes. Doklady AN SSSR, 278, № 2, 302–304.
 25. Chubarikov V. N. 1985. Estimates of multiple trigonometric sums with primes. Izvestija. AN SSSR, Ser. Matem., 49, № 5, 1031–1067.

Получено 11.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.