ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-143-153

Многочлены с малыми значениями в окрестностях корней в архимедовой и неархимедовой метриках[1]

А. В. Луневич, Н. В. Шамукова

Луневич Артём Вадимович — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).
e-mail: lunevichav@gmail.com
Шамукова Наталья Валентиновна — кандидат физико-математических наук, доцент, Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь (г. Минск)
e-mail: shamukova_n@mail.ru

Аннотация

Для натурального $Q > 1$ обозначим I — интервал $I \subset \mathbb{R}$ длины $\mu_1 I = Q^{-v_1},\ v_1 > 0$ (μ_1 – мера Лебега) и $\mu_2 K = Q^{-v_2},\ v_2 > 0$ (μ_2 – мера Хаара измеримого цилиндра $K \subset \mathbb{Q}_p$). Введем множество полиномов степени $\leq n$ и высоты $H(P) \leq Q$

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] \ :\ \deg P \geq n,\ H(P) \leq Q\}.$$

Для таких многочленов обозначим $\mathcal{A}(n,Q)$ множество действительных корней, и p-адических корней $P(x)$, лежащих в пространстве $V = I \times K$. В работе доказано, что подходящем $c_1 = c_1(n)$ и $0 \leq v_1, v_2 \leqslant \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\#\mathcal{A}(n,Q) \geqslant c_1 Q^{n+1-v_1-v_2}.$$

Доказательство проводится методами метрической теории диофантовых приближений, разработанных В. Г. Спринджуком при доказательстве гипотезы Малера и В. И. Берника при доказательстве гипотезы А. Бейкера.

Ключевые слова: Мера Лебега, мера Хаара, алгебраические числа, диофантовы приближения, неприводимые многочлены

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. В. Луневич, Н. В. Шамукова. Многочлены с малыми значениями в окрестностях нулей в архимедовой и неархимедовой метриках // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 143–153.

[1]Исследование выполнено при содействии гранта БРФФИ (проект Ф19М-088).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-143-153

Polynomials with small values in the neighborhoods of zeros in Archimedean and non-Archimedean metrics

A. V. Lunevich, N. V. Shamukova

Lunevich Artyom Vadimovich — candidate of physical and mathematical sciences, researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk).
e-mail: lunevichav@gmail.com
Shamukova Natalya Valentinovna — candidate of physical and mathematical sciences, University of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of Belarus (Minsk).
e-mail: shamukova_n@mail.ru

Abstract

For a positive integer $Q > 0$, let $I \subset \mathbb{R}$ denote an interval of length $\mu_1 I = Q^{-\gamma_1}$ (where μ_1 is the Lebesgue measure) and $\mu_2 K = Q^{-\gamma_2}$, $\gamma_2 > 0$ (where μ_2 is the Haar measure of a measurable cylinder $K \subset \mathbb{Q}_p$). Let us denote the set of polynomials of degree $\le n$ and height $H(P) \le Q$ as

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] \; : \; \deg P \ge n, \; H(P) \le Q\}.$$

Let $\mathcal{A}(n, Q)$ denote the set of real and p-adic roots of such polynomials $P(x)$ lying in the space $V = I \times K$. In this paper it is proved that the following inequality holds for a suitable constant $c_1 = c_1(n)$ and $0 \le v_1, v_2 \leqslant \frac{1}{2}$:

$$\#\mathcal{A}(n, Q) \geqslant c_1 Q^{n+1-\gamma_1-\gamma_2}.$$

The proof relies on methods of metric theory of Diophantine approximation developed by V.G. Sprindzuk to prove Mahler's conjecture and by V.I. Bernik to prove A. Baker's conjecture.

Keywords: Lebesgue measure, Haar measure, algebraic numbers, Diophantine approximation, irreducible polynomials.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. V. Lunevich, N. V. Shamukova, 2021, “Polynomials with small values in the neighborhoods of zeros in Archimedean and non-Archimedean metrics”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 143–153.

1. Введение

Около ста лет тому назад А. Я. Хинчин [13] доказал теорему о точном порядке приближения почти всех действительных чисел рациональными числами. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ интервал, μB — мера Лебега измеримого множества $B \subset P$, ψ — монотонно убывающая функция при $x > 0$.

Пусть $\mathcal{L}_1(\psi)$ — множество действительных чисел $x \in I$, для которых неравенство

$$|qx - p| < \psi(q) \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в натуральных числах q и целых числах p. Тогда согласно теореме Хинчина [13] верно равенство

$$\mu\mathcal{L}_1(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty}\psi(q) < \infty; \\ \mu I, & \sum_{q=1}^{\infty}\psi(q) = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

В неравенстве (1) в левой части стоит многочлен первой степени $qx - p$. Обобщение неравенства (1) на многочлены произвольной степени

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3}$$

является актуальной задачей, которой скоро исполняется семьдесят лет. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H) \tag{4}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах (1) высоты $H = H(P) = \max_{1\le j\le n}|a_j|$. Равенство $\mu\mathcal{L}_n\left(H^{-1-\epsilon}\right) = 0,\ \epsilon > 0$ — длительное время было проблемой Малера [14] которую решил В. Г. Спринджук [4,5]. При произвольной функции $\psi(x)$ аналогичное утвреждение было известно как гипотеза А. Бейкера [7] и имело вид

$$\mu\mathcal{L}_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty}\psi(q) < \infty; \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty}\psi(q) = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

В случае сходимости ряда в (5) гипотезу доказал В. И. Берник [9], а в случае расходимости В. В. Бересневич [8].

В монографии [5] Спринджук доказал гипотезу Малера в поле комплексных чисел и p-адических чисел и в поле формальных степенных рядов. Еще более общие теоремы в случае совместных приближений в трех полях $\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{Q}$, доказали Н. В. Бударина, Д. Диккинсон, В. И. Берник [11,12].

В настоящей работе мы покажем, как указанные выше идеи позволяют находить точки $\bar{\beta} = (\alpha, \gamma)$, которые лежат в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$ с алгебраическими числами $\alpha \in I$ и алгебраическим p-адическими числами из p-адического цилиндра K.

С помощью принципа ящиков Дирихле [6,10] нетрудно доказать, что для любого натурального числа $Q > 1$ и любой точки $(x, \omega) \in I \times K \subset \mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$ можно найти полином $P(t) \in \mathbb{Z}$ из класса полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] \ :\ \deg P \ge n,\ H(P) \le Q\},$$

удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{aligned} &|P(x)| < c_1(n)\,Q^{-v_1}, \\ &|P(\omega)|_p < c_1(n)\,Q^{-v_2},\ v_1 \ge -1,\ v_2 \ge 0,\ v_1 + v_2 = n. \end{aligned} \tag{6}$$

В (6) и далее $c_1,\ c_2,\ \ldots$ — величины, зависят от n и не зависящие от H и Q.

Из работ [5,10] можно получить, что для большей части (x, ω) (в смысле меры $\mu = \mu_1\mu_2$, μ_1 — мера Лебега в $\mathbb{R}$ и μ_2 — мера Хаара в $\mathbb{Q}_p$) ни одно из неравенств в (6) нельзя заменить на $Q^{-v_i-\epsilon},\ i = 1, 2,\ \epsilon > 0$.

Обозначим через $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ — корни полинома $P(x)$ из $\mathbb{C}$, а через $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ — корни $P(\omega)$ в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{Q}_p$. Для $\epsilon_1 > 0$ и натурального $T > T_0(\epsilon_1, n)$ упорядочим корни следующим образом

$$\begin{aligned} &|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - \alpha_3| \le\ \ldots\ \le |\alpha_1 - \alpha_n|, \\ &|\gamma_1 - \gamma_2|_p \le |\gamma_1 - \gamma_3|_p \le\ \ldots\ |\gamma_1 - \gamma_n|_p. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_1-\alpha_j|\le Q^{-\rho_j},\ (l_j-1)\,T^{-1}<\rho_j\le l_jT^{-1},\ j=2,\ \dots,\ n\\
&|\gamma_1-\gamma_i|_p\le Q^{-\sigma_i},\ (m_i-1)\,T^{-1}<\sigma_i\le m_iT^{-1},\ i=2,\ \dots,\ n\\
&p_j=T^{-1}\textstyle\sum_{s=j+1}^{n}l_s,\quad q_i=T^{-1}\sum_{s=1}^{n}m_s.
\end{aligned}
$$

В монографии В. Г. Спринджука [5] показано, как метрические задачи с многочленами сводятся к многочленам с дополнительными условиями

$$|a_n|>dH,\ 0<d=d\,(n)<1,\ |a_n|_p>p^{-d_1(n)}. \tag{7}$$

Эти оценки предполагаются выполненными в теореме Условия (7) приводят к неравенствам (Леммы 5, 6)

$$|\alpha_j|<c_3,\ |\gamma_j|_p<c_4,\ 1\le j\le n. \tag{8}$$

2. Основной текст статьи

Пусть $I_1\subset\mathbb{R}$ — некоторый интервал длины $Q^{-v_1},\ 0\le v_1<\frac{1}{2},\ K_1\subset\mathbb{Q}_p$ — цилиндр из $\mathbb{Q}_p$ с мерой Хаара $\mu_2K_1=Q^{-v_2},\ 0\le v_2<\frac{1}{2}$. Обозначим через $\bar{M}=(\alpha_1,\gamma_1)$ вектор, координаты которого алгебраические числа $\alpha_1\in\mathbb{R}$ и $\gamma_1\in K_1\subset\mathbb{Q}_p$, являются корнями $P\,(t)\in\mathcal{P}_n\,(Q)$. Множество таких корней обозначим $\mathcal{P}_n\,(Q,I_1,K_1)$.

Теорема 1. *При некотором c_5 справедливо равенство*

$$\#\mathcal{P}_n\,(Q,I_1,K_1)>c_5Q^{n+1}\mu_1I\times\mu_2K_1.$$

Теорема 1 доказана только в действительном случае в работе [3] и основана на метрической теореме, являющейся эффективной версией теоремы Спринджука. Доказательство теоремы 1 несложно следует из следующей теоремы.

Теорема 2. *Обозначим через B множество решений системы неравенств*

$$|P\,(x)|<Q^{-v_1},\ |P\,(\omega)|_p<Q^{-v_2}. \tag{9}$$

И пусть дополнительно выполняется одно из неравенств

$$\left|P'\,(x)\right|<\delta_0Q, \tag{10}$$

$$\left|P'\,(\omega)\right|_p<\delta_0. \tag{11}$$

Тогда $\mu B_1<\frac{1}{4}\mu\,(I_1\times K_1)$.

При доказательстве будем пользоваться леммами, нечетные из которых верны в поле действительных чисел, а четные в поле $\mathbb{Q}_p$.

Лемма 1 ([5]). *Если α_1 — ближайший к x корень многочлена $P\,(x)$, то*

$$|x-\alpha_1|<\begin{cases} n\,|P\,(x)|\,|P'\,(x)|^{-1}, \\ 2^n\,|P\,(x)|\,|P'\,(\alpha_1)|^{-1}, \\ 2^n\left(|P\,(x)|\,|\alpha_1-\alpha_2|\,|P'\,(\alpha_1)|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Лемма 2 ([5,10]). *Если γ_1 — ближайший к ω корень многочлена $P\,(\omega)$, то*

$$|\omega-\gamma_1|_p<\begin{cases} |P\,(\omega)|_p\,|P'\,(\omega)|_p^{-1}, \\ |P\,(\omega)|_p\,|P'\,(\gamma_1)|_p^{-1}, \\ \left(|P\,(\omega)|_p\,|\gamma_1-\gamma_2|_p\,|P'\,(\gamma_1)|_p^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Лемма 3. *При* $|P'(x)| > 2n^2 Q^{-\frac{v_1-1}{2}}$ *верно равенство*

$$\frac{1}{2}\left|P'(x)\right| < \left|P'(\alpha_1)\right| < 2\left|P'(x)\right|.$$

Лемма 4. *При* $|P'(\omega)| > 2n^2 Q^{-\frac{v_2-1}{2}}$ *верно равенство*

$$\frac{1}{2}\left|P'(\omega)\right| < \left|P'(\gamma_1)\right| < 2\left|P'(\omega)\right|.$$

Леммы 3,4 доказываются с использованием разложения $P'(x)$ и $P'(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности α_1 и γ_1.

Лемма 5. *Если у многочлена* $P(s)$ *старший коэффициент* a_n *удовлетворяет условию* $|a_n| > dH$*, то*

$$|\alpha_j| < c,\ 1 \le j \le n.$$

Лемма 6. *Если у многочлена* $P(s)$ *старший коэффициент* a_n *удовлетворяет условию* $|a_n|_p > p^{-S_n}$*, то*

$$|\gamma_j|_p < c,\ 1 \le j \le n.$$

Лемма 7. *Пусть полиномы* $P_1(x)$ *и* $P_2(x)$ *степени* n *и высоты* $\le Q$ *без общих корней на отрезке* $I_1,\ \mu_1 I_1 = Q^{-\gamma_1},\ \gamma_1 > 0$ *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{x\in I_1}\left(|P_1(x)|, |P_2(x)|\right) < Q^{-\tau_1},\ \tau_1 > 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ *и* $Q > Q_0(\delta)$ *верно неравенство*

$$\tau_1 + 1 + 2\max\left(\tau_1 + 1 - \gamma_1, 0\right) < 2n + \delta.$$

Лемма 8. *Пусть полиномы* $P_1(\omega)$ *и* $P_2(\omega)$ *степени* n *и высоты* $\le Q$ *без общих корней в алгебраическом замыкании* Q_p *и в цилиндре* $K_1,\ \mu_2 K_1 = Q^{-\gamma_2},\ \gamma_2 > 0$ *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{\omega\in K_1}\left(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p\right) < Q^{-\tau_2},\ \tau_2 > 0.$$

Тогда при любом $\delta_1 > 0$ *и* $Q > Q_0(\delta_1)$ *верно неравенство*

$$\tau_2 + 2\max\left(\tau_2 - \gamma_2, 0\right) < 2n + \delta_1.$$

Лемма 9 ([5]). *При подходящих* c_7, c_8*,* $R(x) = t_1(x)\dots t_k(x)$ *справедливы неравенства*

$$c_7\prod_{j=1}^{k} H(t_j) < H(R) < c_8\prod_{j=1}^{k} H(t_j).$$

Лемма 10 ([10]). *Пусть неравенство*

$$|R(x)| <^{H} -\tau,\ \tau > 0$$

выполняется для всех $x \in B_4,\ \mu B_4 > \frac{1}{2}\mu I$*. Тогда для всех* $x \in I$*, при подходящем* c_9*, верно неравенство*

$$|R(x)| < c_9 H^{-\tau}.$$

Покажем, как из теоремы 2 можно получить теорему 1. Введем множество

$$B_2 = (I_1 \times K_1) \backslash B_1$$

Из теоремы 2 следует, что $\mu B_2 \geq \frac{3}{4}\mu (I_1 \times \ K_1)$. Возьмем точку $u_1 = (x_1, \omega_1) \in B_2$. В этой точке верна система неравенств

$$\begin{gathered} |P(x)| \ll Q^{-v_1}, \ |P(\omega)|_p \ll Q^{-v_2}, \\ |P'(x)| > \delta_0 Q, \ |P'(\omega)|_p > \delta_0. \end{gathered} \tag{12}$$

Воспользовавшись леммами 3 и 4 систему неравенств (12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} |P(x_1)| \ll Q^{-v_1}, \ |P(\omega_1)|_p \ll Q^{-v_2}, \\ |P'(\alpha_1)| > \delta_0/2Q, \ |P'(\gamma_1)|_p > \delta_0/2. \end{gathered} \tag{13}$$

Применим к первому неравенству в (13) лемму 1. Получим

$$|x_1 - \alpha_1| \ll 2\delta_0^{-1} Q^{-v_1-1}. \tag{14}$$

Из второго неравенства (13) и леммы 2 имеем

$$|\omega_1 - \gamma_1| \ll 2\delta_0^{-1} Q^{-v_2}. \tag{15}$$

Нетрудно доказать, что корень α_1 в (14) действительный. Воспользуемся леммой Гензеля [10] и покажем, что корень γ_1 лежит в $\mathbb{Q}_p$. Мы получим в окрестности $\sigma(P)$ точки $u_1 \in B_2$ точку $v_1 = (\alpha_1, \gamma_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ с алгебраическими действительными и алгебраическими p-адическими координатами, причем

$$\mu\sigma_1(P) \ll 4\delta_0^{-2} Q^{-v_1-v_2-1}.$$

Исключим $\sigma(P_1)$ из B_2 и рассмотрим точку $u_2 = (x_2, \omega_2)$ из множества

$$B_3 = B_2 \backslash \sigma_1(P_1).$$

В этой точке также выполняется система неравенств (13) для некоторого полинома P_2 и вновь можно получить неравенства (14) и (15) с алгебраической действительной точкой α_{12} и алгебраической p-адической точкой γ_{12}, так, что вектор $v_2 = (\alpha_{12}, \gamma_{12}) \in B_3 \subset I_1 \times K_1$. Исключим $\sigma_1(P_2)$ из множества B_3 и рассмотрим точку

$$u_3 = (x_3, \omega_3) \in B_4 = B_3 \backslash (\sigma_1(P_1) \cup \sigma_1(P_2)).$$

Опять построим третий вектор $v_3 = (\alpha_{13}, \gamma_{13})$ с алгебраическими координатами. Построение новых векторов $v_j, \ j = 1, 2, \ldots, T$ можно проводить до тех пор, пока их окрестностями не исчерпаем множество B_j. Для числа T справедливо неравенство

$$T \gg \frac{\mu B_2}{4\delta_0^{-2} Q^{-v_1-v_2-1}} \gg \frac{3}{4}\mu(I_1 \times K_1) \cdot 4^{-1}\delta_0^2 Q^{v_1+v_2+1} \gg 2^{-3}\delta_0^2 Q^{v_1+v_2+1} \mu(I_1 \times K_1).$$

Доказательство теоремы 2. При применении лемм 1 и 2 мы видим, что оценки мер покрытия решения системы неравенств

$$|P(x)| \ll Q^{-v_1}, \ |P(\omega)|_p \ll Q^{-v_2} \tag{16}$$

зависит от величин $|P'(\alpha_1)|$ и $|P'(\gamma_1)|_p$ в ближайших к x и ω корнях $P(x)$ и $P(\omega)$. Значения $P_1(\alpha)$ и $|P'(\gamma_1)|_p$ поделим на не пересекающиеся промежутки. Начнем с тривиальных неравенств $|P'(\alpha_1)| \ll Q$, $|P'(\gamma_1)|_p \ll 1$. Проанализируем случаи усиления этих неравенств

Предложение 1.

$$Q^{v_1} < \left|P'(\alpha_1)\right| < \delta_0 Q,\ \left|P'(\gamma_1)\right|_p \ll 1,\ v_1 = \frac{5}{8} \tag{17}$$

Покажем, что мера покрытия решений системы неравенств в этом случае не превосходит $1/32\mu(I_1 \times K_1)$. Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n,\ \ldots,\ a_1)$, координаты которого — коэффициенты многочлена $P(x)$. Множество полиномов с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим через $V\left(\bar{b}\right)$. Ясно, что $\#V\left(\bar{b}\right) < 2^{n+1}\delta_0 Q^n$. При фиксированных $P_1(x)\,,\ P_2(x) \in \#V\left(\bar{b}\right) \cap \mathcal{P}_n(Q)$ множество решений σP_j неравенств не пересекаются. Для доказательства разложим многочлен $P_1(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки α_1 на отрезке I_1.

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2 + \sum_{j=3}^{n}(j!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j \tag{18}$$

По лемме 1 верно неравенство

$$|x-\alpha_1| \ll Q^{-v_1}\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}, \tag{19}$$

поэтому $|P'(\alpha_1)|\,|x-\alpha_1| \ll Q^{-v_1}$. учитывая тривиальные оценки $\left|P^{(j)}(\alpha_1)\right| \ll Q$ и (19) остальные члены разложения в (18) имеют лучшие оценки и поэтому

$$|P(x)| \ll Q^{-v_1} < \frac{1}{2} \tag{20}$$

при достаточно большом Q. Оценка (20) справедлива и для многочлена $P_2(x)$. Если $\sigma(P_1) \cap \sigma(P_2) \neq \emptyset$, то на пересечении $\sigma(P_1) \cap \sigma(P_2)$ для многочлена $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ верны неравенства

$$1 \le |a_{01} - a_{02}| = |R(x)| < |P_1(x)| + |P_2(x)| < 1,$$

что противоречиво.

Предложение 2.

$$Q^{-\delta_2} < \left|P'(\gamma_1)\right|_p < \delta_0,\ \left|P'(\alpha_1)\right| \ll Q,\ \delta_2 = -\frac{5}{8}.$$

Опять зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n,\ \ldots,\ a_1)$ и подмножество $P(x) \subset \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим $V\left(\bar{b}\right)$. Разложим многочлены $P_i(w)\,,\ i = 1, 2$ в точке γ_1 на цилиндре V_1 в ряд Тейлора

$$P(\omega) = P(\gamma_1) + P'(\gamma_1)(\omega-\gamma_1) + \frac{1}{2}P''(\gamma_1)^2 + \sum_{j=3}^{n}(j!)^{-1}P^{(j)}(\gamma_{11})(\omega-\gamma_1)^j \tag{21}$$

Из леммы 2 из неравенства $|P_1(\omega)|_p \ll Q^{-v_2}$ имеем

$$\left|P'(\gamma_1)\right|_p^{-1}|\omega-\gamma_1|_p \ll Q^{-\frac{5}{2}}$$

Остальные слагаемые в (21) оцениваются лучше и поэтому $|P_1(\omega)|_p \ll Q^{-v_2}$. Многочлен $P_2(\omega)$ также допускает на V_1 оценку $|P_2(\omega)|_p \ll Q^{-v_2}$. Многочлен $R(\omega) = P_2(\omega) - P_1(\omega)$ есть целое число b, $\ |b| \le 2Q$ и поэтому $|b|_p > \frac{1}{2}Q^{-1}$.

Введем два „прямоугольника“

$$\sigma(P)\ :\ |x-\alpha_1| < 2^n Q^{-v_1}|P'(\alpha_1)|\,,\ |\omega-\gamma_1|_p < Q^{-v_2}|P'(\gamma_1))|_p^{-1}$$
$$\sigma_2(P)\ :\ |x-\alpha_1| < c_{11}|P'(\alpha_1)|^{-1},\ |\omega-\gamma_1|_p < Q^{-\delta_2}|P'(\gamma_1))|_p^{-1}$$

Справедливо неравенство

$$\mu\sigma(P) < 2^n c_1 1 \mu\sigma_1(P) Q^{-v_1-v_2}$$

поскольку прямоугольники $\sigma_1(P)$ и $\sigma_2(P)$ не пересекаются, то при подходящем выборе δ_0 имеем

$$\sum\nolimits_{P\in V(\bar b)} \mu\sigma_1(P) < \mu(I_1 \times K_1),$$
$$\sum\nolimits_{P\in V(\bar b)} \mu\sigma(P) < \delta_0 2^{2n+1} c_{11} Q^{-v_1-v_2+n} \mu(I_1 \times K_1) < \tfrac{1}{32}\mu(I_1 \times K_1).$$

Зафиксируем p_1, q_1 и предположим, что количество полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с такими величинами не превосходит

$$\#\mathcal{P}_n(Q, p_1, q_1) \ll Q^{n+1-p_1-q_1}. \qquad (22)$$

Тогда воспользуемся леммами 1 и 2 и (22) и получим оценку меры покрытия множества решений системы неравенств $\frac{1}{32}\mu(I_1 \times K_1)$. Если верно противоположное () неравенство, то существуют интервалы L_1, $\mu_1 L_1 = Q^{-l_2 T^{-1}}$ и цилиндры M_1, $\mu_2 M_1 = Q^{-k_2 T^{-1}}$, такие, что

$$\#\mathcal{P}_n\left(Q, p_1 + l_2 T^{-1}, q_1 + k_2 T{-1}\right) \gg Q^{n+1-\left(p_1 + l_2 T^{-1} + q_1 + k_2 T^{-1}\right)}. \quad (23) \qquad (23)$$

Обозначим $m = p_1 + l_2 T^{-1} + q_1 + k_2 T^{-1}$ и предположим, что $n + 1 - m > 0$ и

$$\{m\} \ll \epsilon. \qquad (24)$$

Зафиксируем вектор $b_1 = \left(a_n, \ldots, a_{[m]+1}\right)$ и разложим все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие системе неравенств (16) в ряды, в точках α_{1i}, γ_{1i} на интервалах L_1 и в цилиндрах M_1. Получим оценки

$$\max_{x\in L_1} |P(x)| < Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}}, \ \max_{\omega\in M_1} |P(\omega)|_p \ll Q^{-q_1-k_2 T^{-1}} \qquad (25)$$

Применим к $c_{11} Q^{n+1-\left(p_1 + l_2 T-1 + q_1 + k_2 T^{-1}\right)}$ многочленам принцип ящиков Дирихле. Тогда получим, что неравенства (24) выполняются для многочленов у которых $n-m$ первых коэффициентов совпадают. Это означает, что для разности многочленов $R_j(x) = P_j(x) - P_1(x)$, $j = 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$|R_j(x)| \ll Q^{1-p_1-l_2 T-1}, \ |R_j(x)|_p \ll Q^{-q_1-k_2 T-1}, \ \deg R_j \leq [m]. \qquad (26)$$

Если среди многочленов $|R_j(x)|$ найдутся хотя бы два многочлена без общих корней ни в $\mathbb{C}$ ни в алгебраическом замыкании $\mathbb{Q}_p$, то примениим к ним леммы 7 и 8. В данном случае

$$\begin{array}{ll} \tau_1 + 1 = p_1 + l_2 T^{-1}, & 2\left(\tau_1 + 1 - l_2 T^{-1}\right) = 2p_1 \\ \tau_2 = q_1 + k_2 T^{-1}, & 2\left(\tau_2 - k_2 T^{-1}\right) = 2q_1 \end{array}$$

Неравенство

$$3p_1 + l_2 T^{-1} + 3q_1 + k_2 T^{-1} < 2[m] + \delta = 2m + \delta - \left(2p_1 + 2l_2 T^{-1} + 2q_1 + 2k_2 T^{-1} + \delta\right)$$

противоречиво, что завершает доказательство. Если неравенство (24) не выполняется, то величину $l_2 T$ в определении меры L_1 надо заменить на $l_2 T + \frac{1}{2}$ и вновь получить противоречивость неравенства (25).

Если среди $R_x(x)$ нет полиномов без общих корней, то полиномы $R_j(x)$ приводимы. Запишем их в виде

$$R_j(x) = t_{1j}(x) t_{2j}(x).$$

Обозначим

$$s = [m] = l_2 T^{-1} + p_1 + k_2 T^{-1} + q_1 - 1 + \theta\epsilon, \ |\theta| \leq 1$$

где s степень $t_1(x) = n_1, (1 \le n_1 \le s-1)$ — степень $t_{12}(x) = s - n_1$ $(1 \le s - n_1 \le s-1)$, $H(t_{1j}) = Q^{\lambda}$, $H(t_{2j}) = Q^{1-\lambda}$ — высоты многочленов t_{1j}, t_{2j} соответственно. Неравенство

$$|R_j(x)| \ll Q^{-m+\theta\epsilon}$$

выполняется для всех $(x,\omega) \in I_1 \times K_1$. Множество решений системы

$$|t_{1j}| < Q^{-a_1},\ |t_{1j}(\omega)|_p < Q^{-a_2} \tag{27}$$

обозначим $\sigma(t_{1j})$, гду a_1 и a_2 такие действительные числа, при которых неравенства (27) верны для $(x,\omega) \in E_1 \subset I_1 \times K_1$ с мерой $\mu E_1 > \frac{1}{2}\mu\sigma(t_{1j})$, а множество решений системы неравенств

$$|t_{1j}| < Q^{-a_1-\epsilon},\ |t_{1j}(\omega)|_p < Q^{-a_2-\epsilon}$$

верна для $(x,\omega) \in E_2 \subset I_1 \times K_1,\ \mu E_2 < \frac{1}{2}\mu\sigma(t_{1j})$.

Применим к системе неравенств (27) лемму (9). Получим, что система неравенств

$$|t_{1j}(x)| < c_{12}Q^{-a_1},\ |t_{1j}(\omega)|_p < c_{12}Q^{-a_2}$$

выполняется для всех $(x,\omega) \in \sigma(t_{1j})$ как и система неравенств

$$|t_{2j}(x)| \ll Q^{-m+a_1+2\epsilon},\ |t_{2j}|_p \ll Q^{-m+a_2+2\epsilon_1}. \tag{28}$$

Многочлены $t_{1j}(x)$ и $t_{2j}(x)$ имеют степень $< n$ и поэтому по индукции множество решений систем (27) и (28) можно покрыть прямоугольниками F_1 и F_2 суммарной мерой, не превосходящей

$$\mu F_1 \ll Q^{-a_1-a_2+n_1},\ \mu F_2 \ll Q^{-m+a_1+l_2+m-n_1+2\epsilon}$$

соответственно. Если справедливо хотя бы одно из неравенств

$$a_1 + a_2 > \lambda n_1,\ m - a_1 - a_2 > (1-\lambda)(m-n_1) + 2\epsilon_1, \tag{29}$$

то $\mu < \frac{1}{32}\mu(I_1 \times K_1)$ и теоремы 2 доказана. Покажем, что система неравенств

$$a_1 + a_2 \le \lambda n_1,\ m - a_1 - a_2 \le (1-\lambda)(m-n_1) + 2\epsilon_1,$$

несовместна на множестве

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le \lambda \le 1 \\ 1, \le n_1 \le m-1 \end{array} \right\}$$

На координатной плоскости (λ, n_1) неравенства (29) представляют собой области лежащие над гиперболами $\lambda n_1 = a_1 + a_2$ и под гиперболой $m - a_1 - a_2 \le (1-\lambda)(m-n_1) + 2\epsilon$. покажем, что эти гиперболы не пересекаются. Запишем равенство

$$\lambda n_1 = m - (m - n_1) - 2\epsilon$$

и исследуем функцию $f(\lambda, n_1) = \lambda n_1 + (m-n_1) + 2\epsilon$ в области D на максимум. получим, что максимум достигается в точках $(0, m-1)$, $(1,1)$ и равен $m - 1 + 2\epsilon < m$ при $\epsilon_1 < \frac{1}{2}$.

Приведенный метод действует при условии

$$l_2T^{-1} + p_1 + k_2T{-}1 + q_1 \le n+1.$$

Если же

$$l_2T^{-1} + p_1 + k_2T{-}1 + q_1 > n+1.$$

то можно использовать метод Фолькмана [15] и завершить доказательство.

3. Заключение

Таким образом, было показано, как количество элементов множества $\mathcal{A}(n,Q)$ зависит от параметров v_1 и v_2, определяющих меру множества V. Установлено, что при $0 \leq v_1, v_2 \leqslant \frac{1}{2}$ и подходящей константе c_1 множество $\mathcal{A}(n,Q)$ не пусто и количество его элементов не менее, чем $c_1 Q^{n+1-v_1-v_2}$. Данный результат может быть использован для дальнейших исследований оценок количества алгебраических точек из множеств малой меры и неархимедовой метрикой, в частности, для получения аналогичного результата с другими ограничениями на v_1 и v_2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. I. Bernik, An application of Haudorff dimension in the theory of Diophantine approximation // Acta. Arith. 1983. Vol. 42, P. 219-253.
2. V. I. Bernik. N. Kalosha. Approximation of zero by values ol integral polvnomials in space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Vesti NAN of Belarus Ser. fiz-mat nauk. 2004. Vol. 1. P. 121-123.
3. Bernik, V. I., Gotze, F., Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izvestiya: Mathematics. 2015. Vol. 79, №. 1. P. 18-39.
4. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1965. — Т. 29, №2. — С. 379-436.
5. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук // Минск: Наука и техника. — 1967. — 181 с.
6. Schmidt, W. M., Diophantine Approximation // Springer. 1980. P. 312.
7. Baker, A., Linear Forms in the Logarithms of Algebraic Numbers // I, Mathematika. 1966. Vol.12. P.204–216.
8. Beresnevich, V. V., On approximation of real numbers bv real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. Vol. 90. P. 97-112.
9. Bernik, V. I., The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. Vol. 53, №. 1. P. 17-28.
10. Bernik, V. I., Dodson, M. M., Metric Diophantine Approximation on Manifolds // Cambridge University Press. 1999.
11. Bernik, V. Budarina, N., Dickinson, H., A divergent Khintchine theorem in the real, complex and p-adic fields // Lith. Math. J. 2008. Vol. 48. № 2., P. 158-173.
12. Bernik., V,, Budarina., N., Dickinson, H., Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149. № 2. P. 193-216.
13. Khintchine, A. Ya., Einige Satze uber Kcttenbriiche mit Anwvndungen auf die Theorie dear Diophan-tischen Approximationeii // Math. Ann. 1924. Vol. 92. P. 115-125.
14. Mahler, K., Uber das MaB der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. 1932. Vol. 106. P. 131-139.
15. Volkmann, B., Zur metrischen Theorie der S-Zahlen // J. reine und angew. Math. 1963. Vol. 213, № 1-2. P. 58-65.

REFERENCES

1. V. I. Bernik. 1983, "An application of Haudorff dimension in the theory of Diophantine approximation", *Acta. Arith.*, Vol. 42, P. 219-253.

2. V. I. Bernik. N. Kalosha. 2004, "Approximation of zero by values ol integral polvnomials in space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$", *Vesti NAN of Belarus Ser. fiz-mat nauk*, Vol. 1. P. 121-123.

3. Bernik, V. I., Gotze, F. 2015, "Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals", *Izvestiya: Mathematics.*, Vol. 79, №. 1. P. 18-39.

4. Sprindzuk, V. G. 1965, "Dokazatelstvo gipotezi malera o mere mnozesstva S-chisel", *Izv. AN SSSR, ser. mat.*, Vol. 29, № 2. P. 379-436.

5. Sprindzuk, V. G. 1967, "Problema malera v metricheskoi teorii chisel", *Minsk: Nauka i tehnika*, P. 181.

6. Schmidt, W. M. 1980, "Diophantine Approximation", *Springer*, P. 312.

7. Baker, A. 1996, "Linear Forms in the Logarithms of Algebraic Numbers", *I, Mathematika*, Vol. 12. P.204–216.

8. Beresnevich, V. V. 1999, "On approximation of real numbers bv real algebraic numbers", *Acta Arith.*, Vol. 90. P. 97-112.

9. Bernik, V. I. 1989, "The exact order of approximating zero by values of integral polynomials", *Acta Arith.*, Vol. 53, №. 1. P. 17-28.

10. Bernik, V. I., Dodson, M. M. 1999, "Metric Diophantine Approximation on Manifolds", *Cambridge University Press.*

11. Bernik, V. Budarina, N. & Dickinson, H. 2008, "A divergent Khintchine theorem in the real, complex and p-adic fields", *Lith. Math. J.*, Vol. 48. № 2., P. 158-173.

12. Bernik., V" Budarina., N. & Dickinson, H.2010, "Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 149. № 2. P. 193-216.

13. Khintchine, A. Ya. 1924, "Einige Satze uber Kcttenbriiche mit Anwvndungen auf die Theorie dear Diophan-tischen Approximationeii", *Math. Ann.*, Vol. 92. P. 115-125.

14. Mahler, K. 1932, "Uber das MaB der Menge aller S-Zahlen", *Math. Ann.* Vol. 106. P. 131-139.

15. Volkmann, B. 1963, "Zur metrischen Theorie der S-Zahlen", *J. reine und angew. Math.*, Vol. 213, №. 1-2. P. 58-65.

Получено 20.12.20 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.