ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-122-132

Неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами¹

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля построен красивый и содержательный гармонический анализ. Классический анализ Фурье на $\mathbb{R}^d$ соответствует безвесовому случаю. В гармоническом анализе Данкля важную роль играют потенциал Данкля–Рисса и преобразования Данкля–Рисса. В частности, весовые неравенства для них позволяют доказывать весовые неравенства типа Соболева для градиента Данкля. Ранее нами для потенциала Данкля–Рисса были доказаны (L^q, L^p) -неравенства с двумя радиальными кусочно-степенными весами. Для преобразований Данкля–Рисса было доказано L^p -неравенство с одним радиальным степенным весом и как следствие для градиента Данкля были получены (L^q, L^p) -неравенства с двумя радиальными степенными весами. В настоящей работе эти результаты для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля с радиальными степенными весами обобщаются на случай радиальных кусочно-степенных весов.

Ключевые слова: потенциал Данкля–Рисса, преобразования Данкля–Рисса, градиент Данкля, неравенство Соболева.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 122–132.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-122-132

Inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient with radial piecewise power weights²

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

A beautiful and meaningful harmonic analysis has been constructed on the Euclidean space $\mathbb{R}^d$ with Dunkl weight. The classical Fourier analysis on $\mathbb{R}^d$ corresponds to the weightless case. The Dunkl–Riesz potential and the Dunkl–Riesz transforms play an important role in the Dunkl harmonic analysis. In particular, they allow one to prove the Sobolev type inequalities for the Dunkl gradient. Earlier we proved (L^q, L^p) -inequalities for the Dunkl–Riesz potential with two radial piecewise power weights. For the Dunkl–Riesz transforms, we proved L^p -inequality with one radial power weight and, as a consequence, we obtained (L^q, L^p) -inequalities for the Dunkl gradient with two radial power weights. In this paper, these results for the Dunkl–Riesz transforms and the Dunkl gradient for radial power weights are generalized to the case of radial piecewise power weights.

Keywords: Dunkl–Riesz potential, Dunkl–Riesz transforms, Dunkl gradient, Sobolev inequality.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

V. I. Ivanov, 2021, "Inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient with radial piecewise power weights", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 122–132.

1. Введение

В гармоническом анализе в пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля важную роль играют потенциал Данкля–Рисса и преобразования Данкля–Рисса. В частности, они позволяют доказывать неравенства Соболева для градиента Данкля. Нами ранее были получены (L^q, L^p) -неравенства для потенциала Данкля–Рисса и L^p -неравенства для преобразований Данкля–Рисса с радиальными степенными весами, позволившие доказать (L^q, L^p) -неравенства Соболева для градиента Данкля с радиальными степенными весами. Настоящая работа посвящена обобщению этих неравенств для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля на случай радиальных кусочно-степенных весов. Для потенциала Данкля–Рисса они были установлены в [1].

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$, нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ и стандартным ортонормированным базисом $\{e_1, \dots, e_d\}$. Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leq cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров.

²Acknowledgments: The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Пусть $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ — система корней, $R_+ \subset R$ — положительная подсистема, $G \subset O(d)$ — конечная группа отражений, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha: \alpha \in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $\langle \alpha, x \rangle = 0$, $k: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно G , $v_k(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle \alpha, x \rangle|^{k(\alpha)}$ — вес Данкля, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x) dx$ — мера Данкля, где $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$ — нормировочная константа Макдональда–Мета–Сельберга, $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p, d\mu_k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_k \right)^{1/p},$$

$\langle k \rangle = \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)$, $\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \langle k \rangle$, $d_k = 2\lambda_k + 2$ — обобщенная размерность евклидова пространства с весом Данкля.

Пусть V_k — оператор сплетения Данкля, $e_k(x, y) = V_k(e^{i\langle \cdot, y \rangle})(x)$ — ядро Данкля,

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x)$$

— преобразование Данкля,

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a) \langle a, e_j \rangle \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x \rangle}, \quad j = 1, \dots, d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $\nabla_k = (T_1, \dots, T_d)$ — градиент Данкля, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций,

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(x, z) e_k(y, z) \mathcal{F}_k(f)(z) d\mu_k(z)$$

— оператор сдвига на функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [2].

На пространстве Шварца потенциал Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$ [3] определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha - d_k} d\mu_k(y),$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha - d_k/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((d_k - \alpha)/2)$.

Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)(y).$$

На пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразования Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k f$, $j=1, \dots, d$, [3] определяются как интегральные операторы

$$\mathcal{R}_j^k f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_j^k \int_{|y| \geq \varepsilon} \tau^{-y} f(x) \frac{y_j}{|y|^{d_k+1}} d\mu_k(y),$$

где нормировочные постоянные c_j^k выбраны так, чтобы

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j^k f)(y) = -i \frac{y_j}{|y|} \mathcal{F}(f)(y).$$

Для потенциала Данкля–Рисса доказаны (L^q, L^p) -неравенства с радиальными степенными весами [4]. Для преобразований Данкля–Рисса установлена L^p -ограниченность [5] и доказано L^p -неравенство с радиальным степенным весом [6]. С помощью равенства

$$f(x) = I_1^k \left(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k (T_j f) \right) (x) \quad (1)$$

отсюда выведены неравенства Соболева для градиента Данкля с радиальными степенными весами [6] (частные случаи см. в [7, 8, 9, 10]).

Пусть p' — сопряженный показатель для p , определяемый соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

ТЕОРЕМА А [4]. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \alpha$, $0 < \alpha < d_k$, и $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, то

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

ТЕОРЕМА В [5, 6]. Преобразования Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k$, $j = 1, \dots, d$, являются ограниченными операторами из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ для всех $1 < p < \infty$. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $-\frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, то для $j = 1, \dots, d$,

$$\| |x|^\beta \mathcal{R}_j^k f(x) \|_{p, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

ТЕОРЕМА С [6]. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 1$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, то

$$\| |x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta \nabla_k f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x), \quad u_\beta(x) = |x|^{\beta_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2} \chi_{B_1^c}(x)$$

— радиальные кусочно-степенные весовые функции.

Нас интересует неравенство Соболева для градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами. Согласно (1) необходимо установить аналогичные неравенства для потенциала Данкля–Рисса и преобразований Данкля–Рисса. Неравенства для потенциала Данкля–Рисса с радиальными кусочно-степенными весами доказаны в [1].

ТЕОРЕМА D [1]. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma_1 < \frac{d_k}{q}$, $\beta_1 < \frac{d_k}{p'}$, $\alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}$, $\alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p}$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \alpha$, $0 < \alpha < d_k$, и $\gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \gamma_2 + \beta_2$, то

$$\| u_{-\gamma}(x) I_\alpha^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| u_\beta(x) f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (2)$$

В настоящей работе мы доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $-\frac{d_k}{p} < \beta_1, \beta_2 < \frac{d_k}{p'}$, то для $j = 1, \dots, d$,

$$\| u_\beta(x) \mathcal{R}_j^k f(x) \|_{p, d\mu_k} \lesssim \| u_\beta(x) f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 1$, $\gamma_1 < \frac{d_k}{q}$, $1 - \frac{d_k}{q'} < \gamma_2$, $-\frac{d_k}{p} < \beta_1 < \frac{d_k}{p'}$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta_2 < \frac{d_k}{p'}$ и $\gamma_1 + \beta_1 \leq 1 - d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \gamma_2 + \beta_2$, то

$$\| u_{-\gamma}(x) f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| u_\beta(x) \nabla_k f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (4)$$

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ неравенство (3) верно для функций, для которых $f \in L^p(\mathbb{R}^d, u_\beta^p d\mu_k)$, а неравенство (4) верно, если $\Delta_k f \in L^p(\mathbb{R}^d, u_\beta^p d\mu_k)$.

При доказательстве теоремы 1 нам понадобятся положительные интегральные операторы Харди

$$Hf(x) = \int_{|y| \leq |x|} f(y) d\mu_k(y)$$

и Беллмана

$$Bf(x) = \int_{|y| \geq |x|} f(y) d\mu_k(y).$$

Для них в [1] доказаны (L^q, L^p) -неравенства типа Харди в пространствах с весом Данкля и радиальными кусочно-степенными весами. Нам понадобятся эти неравенства только для $q = p$. Функции в них предполагаются неотрицательными.

ТЕОРЕМА E [1]. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Hf(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta}(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (5)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_2 > \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \leq \gamma_2 + \beta_2. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА F [1]. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Bf(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta}(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (7)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_2 > \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_1 < \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \leq \gamma_2 + \beta_2. \quad (8)$$

2. Доказательство теоремы 1

Доказательству теоремы 1 предположим две леммы.

ЛЕММА 1. Если $1 < p < \infty$, $\beta_1, \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$, то для некоторого $\gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$ и всех $0 \leq r \leq 1, 1 \leq t \leq 2$,

$$\left| 1 - \frac{r^{\beta_1}}{t^{\beta_2}} \right| \lesssim \left| 1 - \frac{r^{\gamma}}{t^{\gamma}} \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать $\beta_1 \neq \beta_2$.

Если $\beta_1 \neq 0$, то положим $\gamma = \beta_1$. Отношение

$$\frac{\left| 1 - \frac{r^{\beta_1}}{t^{\beta_2}} \right|}{\left| 1 - \frac{r^{\beta_1}}{t^{\beta_1}} \right|} = t^{\beta_1 - \beta_2} \frac{|t^{\beta_2} - r^{\beta_1}|}{|t^{\beta_1} - r^{\beta_1}|}$$

может быть неограниченным, если только верхний предел

$$\limsup_{r, t \rightarrow 1} \frac{|t^{\beta_2} - r^{\beta_1}|}{|t^{\beta_1} - r^{\beta_1}|} = \infty.$$

Полагая $r = 1 - \varepsilon_1$, $t = 1 + \varepsilon_2$, $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$, получим

$$\limsup_{r, t \rightarrow 1} \frac{|t^{\beta_2} - r^{\beta_1}|}{|t^{\beta_1} - r^{\beta_1}|} = \limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{|(1 + \varepsilon_2)^{\beta_2} - (1 - \varepsilon_1)^{\beta_1}|}{|(1 + \varepsilon_2)^{\beta_1} - (1 - \varepsilon_1)^{\beta_1}|}$$

$$= \limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{|\beta_2 \varepsilon_2 + \beta_1 \varepsilon_1|}{|\beta_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)|} \leq \frac{|\beta_2| + |\beta_1|}{|\beta_1|}.$$

Утверждение леммы 1 при $\beta_1 \neq 0$ доказано.

Если $\beta_1 = 0$, то положим $\gamma = \beta_2 \neq 0$. В этом случае

$$\frac{\left|1 - \frac{1}{t^{\beta_2}}\right|}{\left|1 - \frac{r^{\beta_2}}{t^{\beta_2}}\right|} = \frac{|t^{\beta_2} - 1|}{|t^{\beta_2} - r^{\beta_2}|}$$

и

$$\limsup_{r, t \rightarrow 1} \frac{|t^{\beta_2} - 1|}{|t^{\beta_2} - r^{\beta_2}|} = \limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{|\beta_2 \varepsilon_2|}{|\beta_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)|} = 1.$$

Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается и следующая лемма.

ЛЕММА 2. Если $1 < p < \infty$, $\beta_1, \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$, то для некоторого $\gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$ и всех $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\left|1 - \frac{r^{\beta_2}}{t^{\beta_1}}\right| \lesssim \left|1 - \frac{r^\gamma}{t^\gamma}\right|.$$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$, η принадлежит выпуклой оболочке орбиты x ($\eta \in \text{Co}(G.x)$),

$$A(x, y, \eta) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle y, \eta \rangle} = \sqrt{|y - \eta|^2 + |x|^2 - |\eta|^2}.$$

В частности,

$$|\eta| \leq |x|, \quad ||x| - |y|| \leq A(x, y, \eta) \leq |x| + |y|. \quad (9)$$

В [5] для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ получено интегральное представление преобразования $\mathcal{R}_j^k$ в виде

$$\mathcal{R}_j^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j(x, y) f(y) d\mu_k(y),$$

где ядро $\mathcal{K}_j(x, y)$ является конечной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами ядер

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j^{(1)}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y_j - \eta_j}{A^{d_k+1}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta), \\ \mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x, y) &= \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{A^{d_k-1}(x, y, \eta)} - \frac{1}{A^{d_k-1}(x, \sigma_\alpha y, \eta)} \right) d\mu_x^k(\eta), \quad \alpha \in R_+. \end{aligned}$$

Здесь $d\mu_x^k$ — вероятностная мера с носителем в $\text{Co}(G.x)$, участвующая в интегральном представлении оператора сплетения V_k .

Интегральные операторы с этими ядрами являются ограниченными операторами из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ для всех $1 < p < \infty$. Теорему 1 докажем для каждого из этих операторов. При этом будем следовать подходу, предложенному в работе Стейна [11]. Рассмотрим случай оператора с ядром $\mathcal{K}_j^{(1)}(x, y)$.

Пусть

$$L_j^{(1)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j^{(1)}(x, y) f(y) d\mu_k(y).$$

Пусть $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$, $\mathbf{d}_k = \{d_k, d_k\}$. По теореме В для единичного веса

$$\|L_j^{(1)}(u_\beta f)(x)\|_{p, d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x) f(x)\|_{p, d\mu_k}.$$

Нужно доказать, что

$$\|L_j^{(1)}(u_\beta f)(x) - u_\beta(x)L_j^{(1)}f(x)\|_{p,d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x)f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$

Так как $|y_j - \eta_j| \leq A(x, y, \eta)$, то

$$\begin{aligned} |L_j^{(1)}(u_\beta f)(x) - u_\beta(x)L_j^{(1)}f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{K}_j^{(1)}(x, y)| |u_\beta(y) - u_\beta(x)| |f(y)| d\mu_k(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |u_\beta(y)f(y)| d\mu_k(y). \end{aligned}$$

Остается доказать L^p -ограниченность оператора

$$Mf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |f(y)| d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| = \Psi(x, y) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right|. \quad (10)$$

Мы можем в дальнейшем считать $f(x) \geq 0$.

Для оператора

$$M_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x, y) \left|1 - \frac{|x|^\gamma}{|y|^\gamma}\right| d\mu_k(y)$$

в [6] доказана L^p -ограниченность

$$\|M_\gamma f\|_{p,d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}, \quad (11)$$

если $1 < p < \infty$ и $\gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right)$.

Разобьем $\mathbb{R}^d$ на три области

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| \leq 1\}, \quad E_2 = \{x \in \mathbb{R}^d: 1 < |x| \leq 2\}, \quad E_3 = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| > 2\}.$$

Если $x, y \in E_1$, то

$$\left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| = \left|1 - \frac{|x|^{\beta_1}}{|y|^{\beta_1}}\right|, \quad \beta_1 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_1} \Psi(x, y) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |f(y)| d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_1$, $y \in E_2$, то по лемме 1

$$\left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| = \left|1 - \frac{|x|^{\beta_1}}{|y|^{\beta_2}}\right| \lesssim \left|1 - \frac{|x|^\gamma}{|y|^\gamma}\right|, \quad \gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'}\right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} \Psi(x, y) \left|1 - \frac{u_\beta(x)}{u_\beta(y)}\right| |f(y)| d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_2$, $y \in E_1$, то по лемме 2

$$\left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| = \left| 1 - \frac{|x|^{\beta_2}}{|y|^{\beta_1}} \right| \lesssim \left| 1 - \frac{|x|^{\gamma}}{|y|^{\gamma}} \right|, \quad \gamma \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'} \right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} \Psi(x, y) \left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_2 \cup E_3$, $y \in E_2 \cup E_3$, то

$$\left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| = \left| 1 - \frac{|x|^{\beta_2}}{|y|^{\beta_2}} \right|, \quad \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'} \right),$$

и в силу (11)

$$\int_{E_2 \cup E_3} \left(\int_{E_2 \cup E_3} \Psi(x, y) \left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right| f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x).$$

Если $x \in E_1$, $y \in E_3$, то $|y| \geq 2|x|$ и в силу (9) $A(x, y, \eta) \asymp |y|^{-d_k}$. Следовательно, для ядра $\Phi(x, y)$ (10) справедлива оценка

$$\Phi(x, y) \lesssim |y|^{-d_k} \left(1 + \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right) = \frac{1}{u_{\mathbf{d}_k}(y)} + \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta+\mathbf{d}_k}(y)}.$$

и

$$\begin{aligned} \int_{E_1} \left(\int_{E_3} \Phi(x, y) f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta}(x) \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\beta+\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x). \end{aligned}$$

Неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta}(x) \int_{|y| \geq 2|x|} \frac{f(y)}{u_{\beta+\mathbf{d}_k}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x) \end{aligned} \quad (12)$$

эквивалентно двум неравенствам

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{|y| \geq 2|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (u_{\mathbf{d}_k}(x) f(x))^p d\mu_k(x) \quad (13)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta}(x) \int_{|y| \geq 2|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta+\mathbf{d}_k}(x) f(x))^p d\mu_k(x). \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что, если $\beta_1, \beta_2 \in \left(-\frac{d_k}{p}, \frac{d_k}{p'} \right)$, то условия (8) в теореме F выполнены для обоих неравенств (13), (14), поэтому неравенство (12) верно. Мы также учли слабую однородность радиального кусочно-степенного веса

$$c_1(\lambda) u_{\beta}(x) \leq u_{\beta}(\lambda x) \leq c_2(\lambda) u_{\beta}(x), \quad \lambda > 0.$$

Если $x \in E_3$, $y \in E_1$, то $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$ и в силу (9) $A(x, y, \eta) \asymp |x|^{-d_k}$. Следовательно, для ядра $\Phi(x, y)$ (10) справедлива оценка

$$\Phi(x, y) \lesssim |x|^{-d_k} \left(1 + \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right) = u_{-\mathbf{d}_k}(x) + \frac{u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x)}{u_{\beta}(y)}.$$

и

$$\begin{aligned} \int_{E_3} \left(\int_{E_1} \Phi(x, y) f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} \frac{f(y)}{u_{\beta}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x). \end{aligned}$$

Неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} \frac{f(y)}{u_{\beta}(y)} d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x) \end{aligned} \quad (15)$$

эквивалентно двум неравенствам

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f^p(x) d\mu_k(x) \quad (16)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(u_{\beta-\mathbf{d}_k}(x) \int_{|y| \leq \frac{1}{2}|x|} f(y) d\mu_k(y) \right)^p d\mu_k(x) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} (u_{\beta}(x) f(x))^p d\mu_k(x). \quad (17)$$

Проверяя выполнение условий (6) в теореме Е убеждаемся в справедливости неравенств (16), (17), а, значит, и неравенства (15).

Таким образом, L^p -ограниченность оператора M доказана.

Рассмотрим оператор

$$L_j^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x, y) f(y) d\mu_k(y), \quad \alpha \in R_+.$$

Рассуждая как и в предыдущем случае, приходим к необходимости доказать L^p -ограниченность оператора

$$M^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^{(\alpha)}(x, y) f(y) d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi^{(\alpha)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \left(\frac{1}{A^{d_k-1}(x, y, \eta)} - \frac{1}{A^{d_k-1}(x, \sigma_{\alpha} y, \eta)} \right) \right| d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right|.$$

Для ядра $\Phi^{(\alpha)}(x, y)$ справедлива оценка

$$|\Phi^{(\alpha)}(x, y)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} + \frac{1}{A^{d_k}(x, \sigma_{\alpha} y, \eta)} \right\} d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{u_{\beta}(x)}{u_{\beta}(y)} \right|$$

(см. [6]). Так как $|\sigma_{\alpha} y| = |y|$, то L^p -ограниченность оператора M^{α} вытекает из L^p -ограниченности оператора M . Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнены все условия теоремы 2. Применяя равенство (1), теорему D и теорему 1, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x)f(x)\|_{q,d\mu_k} &= \|u_{-\gamma}(x)I_1^k\left(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f)\right)(x)\|_{q,d\mu_k} \\ &\lesssim \|u_{\beta}(x)\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f)(x)\|_{p,d\mu_k} \lesssim \sum_{j=1}^d \|u_{\beta}(x)(T_j f)(x)\|_{p,d\mu_k} \lesssim \|u_{\beta}(x)\nabla_k f(x)\|_{p,d\mu_k}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

4. Заключение

Для потенциала Данкля–Рисса и градиента Данкля (L^q, L^p) -неравенства доказаны для двух радиальных кусочно-степенных весов. Для преобразований Данкля–Рисса доказано L^p -неравенство с одним радиальным кусочно-степенным весом. Следующий шаг будет состоять в доказательстве (L^q, L^p) -неравенств для потенциала Данкля–Рисса и градиента Данкля, а также L^p -неравенства для преобразований Данкля–Рисса с одним произвольным весом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1. С. 131–147.
2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
3. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.
4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2020. Published online 22 July 2020. <https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z>
5. Amri B., Sifi M. Riesz transforms for Dunkl transform // Annales mathématiques Blaise Pascal. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 147–162.
6. Иванов В. И. Весовые неравенства для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 97–106.
7. Abdelkefi C., Rachdi M. Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis // Ricerche di Matematica. 2015. Vol. 64, no. 1. P. 195–215.
8. Hassani S., Mustapha S., Sifi M. Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform // J. Lie Theory. 2009. Vol. 19, no. 4. P. 725–734.
9. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators. Preprint arXiv: 1901.08866.v2, 2019.
10. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities // Communications in Contemporary Mathematics. 2021. Vol. 23. no. 6. 2050024. <https://doi.org/10.1142/50219199720500248>
11. Stein E. M. Note on Singular Integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 8, no. 2. P. 250–254.

REFERENCES

1. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147>
2. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions", Lecture Notes in Math., *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
3. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.
4. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu., 2020, "Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform", *Potential Analysis*, Published online 22 July 2020, <https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z>
5. Amri B., Sifi M., 2012, "Riesz transforms for Dunkl transform", *Annales mathématiques Blaise Pascal*, vol. 19, no. 1, pp. 147–162.
6. Ivanov V.I., 2020, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 97–106. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-97-106>
7. Abdelkefi C., Rachdi M., 2015, "Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis", *Ricerche di Matematica*, vol. 64, no. 1, pp. 195–215.
8. Hassani S., Mustapha S., Sifi M., 2009, "Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform", *J. Lie Theory*, vol. 19, no. 4, pp. 725–734.
9. Velicu A., 2019, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators", *Preprint arXiv: 1901.08866.v2*, 20 p.
10. Velicu A., 2021, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities", *Communications in Contemporary Mathematics*, vol. 23, no. 6, 2050024, <https://doi.org/10.1142/50219199720500248>
11. Stein E.M., 1957, "Note on Singular Integrals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, no. 2, pp. 250–254.

Получено 30.06.2021

Получено 28.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.