ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-3-100-121

О трёхмерных сетках Смоляка II[1]

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Это вторая статья из серии, посвящённой сеткам Смоляка. Работа относится к аналитической теории чисел и в ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

В настоящей работе было показано, что для произвольной сетки Смоляка тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{0}) = 1$. Отсюда следует, что норма линейного функционала приближенного интегрирования на классе E_s^α равна значению гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка. Показано, что гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка является рядом Дирихле. Отсюда возникает вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка как функции произвольного комплексного $\alpha = \sigma + it$. Так как сетка Смоляка относится к числу рациональных сеток, то у неё, оказывается, существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс порядка s.

Из работы следует, что остаются открытыми следующие вопросы:

1. является ли нормальным линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geqslant 3$?
2. каковы истинные значения тригонометрических сумм $S_q(m_1,\ldots,m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geqslant 3$?

Ключевые слова: сетки Смоляка, квадратурные формулы с сетками Смоляка, интерполяционные формулы с сетками Смоляка.

Библиография: 42 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II// Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 100–121.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-3-100-121

About three-dimensional nets of Smolyak II[2]

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

This is the second article in a series dedicated to Smolyak grids. The paper relates to analytical number theory and it deals with the application of number theory to problems of approximate analysis.

In this paper, it was shown that for an arbitrary Smolyak grid, the trigonometric sum of the Smolyak grid is $S_q(\vec{0}) = 1$. It follows that the norm of the linear functional of approximate integration on the class E_s^α is equal to the value of the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ of the resin grid. It is shown that the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ of the Smolyak grid is a Dirichlet series. This raises the question of the analytic continuation of the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ of the Smolyak grid as a function of an arbitrary complex $\alpha = \sigma + it$. Since the Smolyak grid belongs to the number of rational grids, it turns out that it has an analytical continuation of the hyperbolic zeta function $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ of the Smolyak grid on the entire complex plane except for the point $\alpha = 1$, in which it has a pole of order s.

It follows from the work that the following questions remain open:

1. is the linear operator A_q of weighted grid averages over the Smolyak grid at dimension $s \geqslant 3$ normal?
2. what are the true values of the trigonometric sums $S_q(m_1, \ldots, m_s)$ Smolyak grids with dimension $s \geqslant 3$?

Keywords: grid Smolyak, quadrature formulas with grids of Smolyak, interpolation formula with grids of Smolyak.

Bibliography: 42 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2021, "About three-dimensional nets of Smolyak II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 100–121.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

1. Введение

Рассмотрим s-мерные сетки Смоляка $Sm(q,s)$ с параметром $q \geqslant s$, которые определяются как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\ldots,\nu_s)$ с $\max(s,q-s+1) \leqslant \leqslant \nu_1+\ldots+\nu_s \leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,s)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\begin{array}{c} 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\ldots,0\leqslant k_s\leqslant 2^{\nu_s}-1,\\ \nu_1,\ldots,\nu_s\geqslant 1,\quad \max(s,q-s+1)\leqslant \nu_1+\ldots+\nu_s\leqslant q\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Как известно (см. [31], стр. 170, формула (226)), при $q \geqslant s$ квадратурные формулы с сетками Смоляка имеют вид:

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)dx_1\ldots dx_s=\sum_{k=0}^{k(q,s)}\frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}}\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)-R_{N(q)}[f], \qquad (2)$$

где $C_s(q)=\{\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{N}^s\,|\,\nu_1+\ldots+\nu_s=q,\,\nu_j\geqslant 1\,(j=1,\ldots,s)\}$, $k(q,s)=\min(q-s,s-1)$, $N(q)=O\left(q^{s-1}2^q\right)$ — количество точек сетки Смоляка, и $R_{N(q)}[f]$ — линейный функционал погрешности приближенного интегрирования по сетке Смоляка.

Обозначим через $S_q(m_1,\ldots,m_s)$ тригонометрическую сумму сетки Смоляка, определенную равенством:

$$S_q(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=0}^{k(q,s)}\frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}}\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^{\nu_1}}+\ldots+\frac{m_sk_s}{2^{\nu_s}}\right)}.$$

Суммируя по $k_1,\ldots,k_s$, получим

$$S_q(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=0}^{k(q,s)}(-1)^k C_{s-1}^k\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_s}}(m_s), \qquad (3)$$

где

$$\delta_a(m)=\begin{cases}1, & \text{при } m\equiv 0 \pmod a,\\ 0, & \text{при } m\not\equiv 0 \pmod a\end{cases}$$

— символ Коробова. Если $m=\prod_p p^{\nu_p(m)}$ — каноническое разложение на простые множители, то $\delta_{2^\nu}(m)=1$ только при $\nu\leqslant\nu_2(m)$. Отсюда видно, что все значения тригонометрических сумм сеток Смоляка целые числа.

Для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по сетке Смоляка на классе E_s^α справедливо равенство

$$\|R_N[.]\|_{E_s^\alpha}=\left|S_q(\vec{0})-1\right|+\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\left|S_q(\vec{0})-1\right|+\zeta(\alpha|Sm(q,s)), \qquad (4)$$

где гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка задается равенством

$$\zeta(\alpha|Sm(q,s))=\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},\quad \alpha>1.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство* $S_q(\vec{0})=1$.

Доказательство. Из определения тригонометрической суммы $S_q(\vec{0})$ и элементарной комбинаторики следует, что

$$S_q(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)} 1 = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1}.$$

При $s \leqslant q \leqslant 2s-1$ имеем:

$$k(q,s) = q-s, \quad S_q(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1}.$$

При $q = s$ имеем

$$S_s(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k C_{s-1}^k C_{s-k-1}^{s-1} = 1$$

и утверждение верно.

При $s \leqslant q < 2s-1$ имеем:

$$S_{q+1}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+1-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1} = \sum_{k=0}^{q-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1} + \sum_{k=0}^{q+1-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2}$$

и утверждение верно, если показать, что при $s \leqslant q \leqslant 2s-2$ справедливо равенство $S_q^{(1)}(\vec{0}) = 0$, где

$$S_q^{(1)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+1-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2}.$$

Положим при $s \leqslant q \leqslant 2s-1-\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant s-1$

$$S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu}.$$

При $q = s$, $\nu = s-1$ имеем:

$$S_s^{(s-1)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k C_{s-k-1}^{0} = (1-1)^{s-1} = 0.$$

При $q = s$, $1 \leqslant \nu \leqslant s-1$ имеем:

$$S_s^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k C_{s-1}^k C_{s-k-1}^{s-1-\nu} = C_{s-1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k C_{\nu}^k = C_{s-1}^{\nu}(1-1)^{\nu} = 0.$$

Далее при $s \leqslant q \leqslant 2s-2-\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant s-2$ получим:

$$S_{q+1}^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{q+1+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1-\nu} = \sum_{k=0}^{q+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu} + \sum_{k=0}^{q+1+\nu-s} (-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2-\nu} =$$
$$= S_q^{(\nu)}(\vec{0}) + S_q^{(\nu+1)}(\vec{0}).$$

Из последнего рекуррентного равенства, двигаясь от $\nu = s-1$ к $\nu = 1$ и при каждом ν от $q = s$ к $q = 2s-1-\nu$, получим $S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = 0$. Отсюда следует, что $S_q(\vec{0}) = 1$ и лемма доказана при $s \leqslant q \leqslant 2s-1$.

Перейдём к случаю $q \geqslant 2s$, тогда

$$k(q,s) = s-1, \quad S_q(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1}.$$

Имеем рекуррентное соотношение

$$S_{q+1}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1} = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1} + \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2} = S_q(\vec{0}) + S_q^{(1)}(\vec{0}),$$

где при $1 \leqslant \nu \leqslant s-1$ и $q \geqslant 2s-1-\nu$ полагаем

$$S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu}.$$

При $\nu = s-1$, $q \geqslant s$ получаем

$$S_q^{(s-1)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{0} = (1-1)^{s-1} = 0.$$

Так как ранее доказано равенство $S_{2s-1-\nu}^{(\nu)}(\vec{0}) = 0$ для $1 \leqslant \nu \leqslant s-2$ и справедливо рекуррентное равенство

$$S_{q+1}^{(\nu)}(\vec{0}) = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k}^{s-1-\nu} = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-1-\nu} + \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k C_{s-1}^k C_{q-k-1}^{s-2-\nu} =$$
$$= S_q^{(\nu)}(\vec{0}) + S_q^{(\nu+1)}(\vec{0}),$$

то проводя индукцию по q, получим $S_q^{(\nu)}(\vec{0}) = 0$ при $1 \leqslant \nu \leqslant s-2$, $q \geqslant 2s-1-\nu$. Отсюда следует, что $S_q(\vec{0}) = 1$ для любого $q \geqslant s$ и лемма полностью доказана. □

Теорема 1. *Для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по сетке Смоляка на классе E_s^α справедливо равенство*

$$\|R_N[.]\|_{E_s^\alpha} = \zeta(\alpha|Sm(q,s)). \tag{5}$$

Доказательство. Действительно, из доказанной леммы следует, что первое слагаемое в формуле (4) равно 0, что доказывает утверждение теоремы. □

Определим для любого натурального n величину $S_q(n)$ равенством

$$S_q(n) = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s = n} |S_q(\vec{m})|,$$

тогда справедливо равенство

$$\zeta(\alpha|Sm(q,s)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_q(n)}{n^\alpha},$$

из которого видно, что гиперболическая дзета-функция сетки Смоляка задается рядом Дирихле, который абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$.

Естественно возникает вопрос, а можно ли этот ряд Дирихле продолжить на всю комплексную α-плоскость?

Цель данной статья — доказать, что такое аналитическое продолжение существует.

2. Гиперболическая дзета-функция Гурвица

В этом разделе мы приведём без доказательства необходимые сведения о гиперболической дзета-функции Гурвица из работы [12].

2.1. Периодизированная по вещественному параметру дзета-функция Гурвица и дзета-функция Гурвица второго рода

В дальнейшем будет использоваться периодизированная по вещественному параметру b дзета-функция Гурвица

$$\zeta^*(\alpha;b)=\sum_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\{b\})^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}>0\end{cases},\quad (\sigma>1). \tag{6}$$

Кроме того, определим дзета-функцию Гурвица второго рода $\zeta^{**}(\alpha;b)$ равенством

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inb}}{\overline{n}^{\alpha}},\quad (\sigma>1). \tag{7}$$

По теореме Абеля (см. [37] стр. 106) получаем интегральное представление для периодизированной дзета-функции Гурвица ($\sigma>1$):

$$\zeta^*(\alpha;b)=\begin{cases}\alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \alpha\int\limits_{0}^{\infty}\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_{\{b\}}^{\infty}\frac{[x+1-\{b\}]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}\neq 0\end{cases} \tag{8}$$

и интегральное представление для дзета-функции Гурвица второго рода ($\sigma>1$):

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \alpha\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b)\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}\neq 0,\end{cases} \tag{9}$$

которое получается из выражения для сумматорной функции при $\{b\}>0$

$$A(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\cos(2\pi nb)=\frac{1}{\sin(\pi b)}\sum_{n=1}^{[x]}\cos(2\pi nb)\sin(\pi b)=$$
$$=\frac{1}{2\sin(\pi b)}\sum_{n=1}^{[x]}\left(\sin(\pi(2n+1)b)-\sin(\pi(2n-1)b)\right)=\frac{\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b)}{2\sin(\pi b)}.$$

2.2. Аналитическое продолжение периодизированной по вещественному параметру дзета-функции Гурвица

Нетрудно выписать различные явные формулы для аналитического продолжения на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, периодизированной дзета-функции Гурвица. В этой точке при всех вещественных значениях b периодизированная дзета-функции Гурвица имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1.

Приведенные ниже формулы покрывают всю комплексную плоскость, задавая явный вид аналитического продолжения $\zeta^*(\alpha; b)$.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\zeta^*(\alpha; b) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{0<n+b} (n+b)^{-\alpha}, & \sigma > 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha - 1} - I_2(\alpha; 0, 1), & {}^{\{b\}=0,}_{\sigma>-1}, \\ \frac{1}{\{b\}^\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha - 1} + (1-\{b\}) \left(1 - \frac{\alpha\{b\}}{2}\right) - I_2\left(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}\right), & {}^{\{b\}\neq 0,}_{\sigma>-1}, \\ 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right), & \sigma < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. См. [12]. □

2.3. Множитель Римана

Через

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{11}$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [34], стр. 19)

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha).$$

Легко проверить, что

$$M(\alpha) \cdot M(1-\alpha) = 1. \tag{12}$$

Множитель $M(\alpha)$ называется *множителем Римана*, а формулу (12) — *формулой дополнения для множителя Римана*.

Из свойств гамма-функции, определения (11) и формулы дополнения (12) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α, кроме точек $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения

$$\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m, & \text{при } n = 1 + 2m,\ m = 0, 1, 2, \ldots. \\ 0, & \text{при } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1+2n} M(\alpha) = \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{-2n}} \operatorname*{Res}_{\alpha=-2n} \Gamma(\alpha) = \frac{2(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}. \tag{13}$$

При натуральных четных значений $\alpha = 2n$, $(n \in \mathbb{N})$ имеем:

$$M(\alpha) = \lim_{\alpha\to 2n} \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \lim_{\alpha\to 2n} \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n))\cdot$$
$$\cdot \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)} \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n-1)!}.$$

По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n) = (2n)!$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка

$$M(-2n) = \frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}} \sin(-\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{14}$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (14) исчерпываются все нули множителя Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \ldots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sin\frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Следующая лемма является своеобразным функциональным уравнением для периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица и дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 3. *Для $0 < b < 1$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо равенство*

$$\zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) = 2M(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha; b) =$$
$$= M(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inb}}{\overline{n}^{1-\alpha}}. \tag{15}$$

Доказательство. См. [12]. $\square$

Эта лемма наводит на мысль, что удобно ввести две новые функции:

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha; b) = \zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|n+b|^{\alpha}},$$

которые называются дзета-функцией Гурвица первого рода, и

$$\tilde{\zeta}^{**}(\alpha; b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inb}}{|n|^{\alpha}},$$

которая называется симметризованной дзета-функцией Гурвица второго рода.

В новых обозначениях равенство (15) приобретет более элегантный вид:

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha; b) = M(\alpha)\tilde{\zeta}^{**}(1-\alpha; b). \tag{16}$$

2.4. Аналитическое продолжение дзета-функции Гурвица второго рода

Теперь нетрудно доказать аналог леммы 2 (стр. 106) для дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b) =$$

$$=\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}, & \sigma>1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\{b\}=0, \atop \sigma>-1},\\ \alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\dfrac{1}{2}, & {\{b\}\neq 0, \atop \sigma>-1},\\ \dfrac{M(\alpha)}{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{\overline{n+b}^{\,1-\alpha}}=\dfrac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha;b)+\zeta^*(1-\alpha;1-b)\right), & {\{b\}\neq 0, \atop \sigma<0},\\ M(\alpha)\zeta(1-\alpha), & {\{b\}=0, \atop \sigma<0}. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. См. [12]. □

Замечание 1. *Из лемм 3 и 4 следует, что для любых $\alpha\neq 1$ справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\zeta(\alpha), & \text{при } \{b\}=0;\\ \frac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha;b)+\zeta^*(1-\alpha;1-b)\right), & \text{при } \{b\}>0.\end{cases}$$

Используя обозначения на стр. 107, можно эти равенства переписать как одно

$$\tilde{\zeta}^{**}(\alpha;b)=M(\alpha)\tilde{\zeta}^*(1-\alpha;b).$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right). \tag{18}$$

Доказательство. См. [12]. □

Замечание 2. *Используя обозначения на стр. 107, можно формулировку доказанной леммы переписать в более элегантном виде:*

$$\sum_{l=0}^{q-1}q^{-\alpha}\tilde{\zeta}^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)=\tilde{\zeta}^*(\alpha), \tag{19}$$

где

$$\tilde{\zeta}^*(\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{1}{|n|^{1-\alpha}}.$$

3. Определение и свойства гиперболической дзета-функции Гурвица

Определение 1. *Гиперболической дзета-функцией Гурвица при $d \neq 0$, $d, b \in \mathbb{R}$ называется функция $\zeta_H(\alpha; d, b)$, заданная в правой α-полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ равенством* [3]

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}. \tag{20}$$

Если мы рассмотрим сдвинутую одномерную решетку $\Lambda(d,b) = d\mathbb{Z} + b$, то для гиперболической дзета-функции этой сдвинутой решетки мы получим

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta_H(\alpha; d, b), & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\} \neq 0, \\ \zeta_H(\alpha; d, b) - 1, & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Кроме этого нам потребуется дзета-функция сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sideset{}{'}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |dm+b|^{-\alpha}, \quad \sigma > 1, \tag{22}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка m, для которой $dm + b = 0$, и аналитическая функция $f_1(\alpha; d, b)$, задаваемая равенством

$$f_1(\alpha; d, b) = \sideset{}{'}\sum_{-1<dm+b<1} \left(1 - |dm+b|^{-\alpha}\right). \tag{23}$$

Ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) + f_1(\alpha; d, b). \tag{24}$$

Будем, как обычно, через $\|b\| = \min(\{b\}, 1 - \{b\})$ обозначать расстояние до ближайшего целого. Как хорошо известно, функция $\|b\|$ — чётная: $\|b\| = \|-b\|$.

В работе [13] рассматривалась аналитическая по α функция $f(\alpha, d)$, заданная равенством

$$f(\alpha, d) = \begin{cases} 0, & \text{при } d \geqslant 1, \\ \sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{d}\right]} \left(1 - \dfrac{1}{|dm|^{\alpha}}\right), & \text{при } 0 < d < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Ясно, что

$$f_1(\alpha; d, 0) = f(\alpha, d). \tag{26}$$

Положим

$$f_1^*(\alpha; d, b) = \begin{cases} f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| \neq 0; \\ f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + 1, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Лемма 6. *Для гиперболической дзета-функции Гурвица $\zeta_H(\alpha; d, b)$ в правой α-полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ справедливы равенства*

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$
$$= \zeta\left(\Lambda\left(|d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) \,\middle|\, \alpha\right) + f_1^*\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{28}$$

[3]Здесь и далее для вещественных m используем обозначение $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

Доказательство. См. [12]. □

Лемма 7. *Справедливо равенство*

$$f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } |d| \geqslant 1, \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{|d|}\right]} \left(1 - \dfrac{1}{|dm|^\alpha}\right), & \text{при } 0 < |d| < 1, \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ 0, & \text{при } |d| \geqslant 2, \left\|\frac{b}{d}\right\| \geqslant \frac{1}{|d|}; \\ 1 - \left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } |d| \geqslant 2, 0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| < \frac{1}{|d|}; \\ 2 - \left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha} - \left(|d| - |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ \left\|\frac{b}{d}\right\| > \left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\ 1 - \left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ 0<\left\|\frac{b}{d}\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\ \sum\limits_{m=-\left[\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]}^{\left[\left|\frac{1}{d}\right|-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]} \left(1 - \left(|d|\left|m + \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right), & \text{при } 0 < |d| < 1, 0 < \left\|\frac{b}{d}\right\|. \end{cases} \quad (29)$$

Доказательство. См. [12]. □

Теорема 2. *В полуплоскости $\sigma < 0$ справедливы тождества:*

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi m \frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} =$$

$$= f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \zeta^{**}\left(1 - \alpha, \frac{b}{d}\right). \quad (30)$$

Доказательство. См. [12]. □

4. Рациональные сетки

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в s-мерном кубе $G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant \leqslant x_i < 1\,(i = 1, \ldots, s)\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \ldots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right) \qquad k = 1, \ldots, N, \quad (31)$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leqslant x_i^{(k)} \leqslant p - 1$, p — натуральное.

Нетрудно видеть, что сетка Смоляка $Sm(q, s)$ с параметром $q \geqslant s$ является рациональной сеткой со знаменателем $p = 2^{q-s+1}$.

Рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_q f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}} + x_1, \ldots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} + x_s\right). \quad (32)$$

Обозначим через $A_q C(\vec{m})$ действие линейного оператора A_q на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 8. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{33}$$

справедливо равенство

$$A_q C(\vec{m}) = S_q(\vec{m}) C(\vec{m}) \tag{34}$$

где $S_q(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки Смоляка.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_q f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leqslant \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \, \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \tag{35}$$

Доказательство. Действительно,

$$g(\vec{x}) = A_q f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \ldots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}} + x_1, \ldots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} + x_s\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \ldots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i\left(m_1\left(x_1+\frac{k_1}{2^{\nu_1}}\right)+\ldots+m_s\left(x_s+\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\right)} =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} S_q(\vec{m}) C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{36}$$

$$\|A_q f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m}} |S_q(\vec{m}) C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \sup_{\vec{m}} |C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \, \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}, \tag{37}$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Определение 2. *Назовем линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка нормальным, если он не увеличивает норму любой функции из класса E_s^α.*

Очевидно, что необходимым и достаточным условием нормальности линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних является ограниченность сверху единицей модуля всех тригонометрических сумм сетки Смоляка: $|S_q(\vec{m})| \leqslant 1$ $(\vec{m} \in \mathbb{Z}^s)$. Как показано в работе [18], тригонометрические суммы двумерной сетки Смоляка принимают только три значения: 1, 0, -1. Поэтому оператор взвешенных сеточных средних для двумерных сеток Смоляка — нормальный.

Из доказанной леммы следует, что собственными функциями линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних для сеток Смоляка является набор базисных функций $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$ $(\vec{m} \in \mathbb{Z}^s)$ за исключением тех гармоник, которые переходят в ноль, то есть принадлежат ядру оператора. Собственными значениями являются соответствующие тригонометрические сумм сеток Смоляка $S_q(\vec{m})$ отличные от нуля.

Таким образом, нормальные линейные операторы A_q взвешенных сеточных средних выделяются условием, что все собственные значения этих операторов не превосходят по модулю единицу.

5. Тригонометрические суммы сетки Смоляка

Из равенства (3) непосредственно следует, что тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{m})$ равна 0, если хоть одно значение m_j — нечетное число, поэтому далее будем предполагать, что все координаты целого вектора $\vec{m}$ — четные числа.

По аналогии с леммой 1 (см. стр. 102) нам потребуются следующие суммы:

$$S_q^{(\nu)}(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s-\nu)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu}\in C_{s-\nu}(q-k)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_{s-\nu}}}(m_{s-\nu}), \quad q \geqslant s-\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant s-1.$$

Напомним, что $k(q,s-\nu) = \min(q-s+\nu, s-\nu-1)$.

Лемма 9. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$S_{q+1}^{(\nu)}(\vec{m}) = S_q^{(\nu)}\left(\left(m_1,\ldots,m_{s-\nu-1},\frac{m_{s-\nu}}{2}\right)\right) + S_q^{(\nu+1)}\left((m_1,\ldots,m_{s-\nu-1})\right). \tag{38}$$

Доказательство. Разобьём множество

$$C_{s-\nu}(q-k) = \{\vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu}) \in \mathbb{N}^{s-\nu} \,|\, \nu_1+\ldots+\nu_{s-\nu} = q-k,\ \nu_j \geqslant 1\,(j=1,\ldots,s-\nu)\}$$

на два подмножества $C_{s-\nu}^{(1)}(q-k)$ и $C_{s-\nu}^{(2)}(q-k)$, заданные равенствами

$$C_{s-\nu}^{(1)}(q-k) = \left\{\vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu-1},\nu_{s-\nu}+1) \in \mathbb{N}^{s-\nu} \,\middle|\, \begin{array}{l} \nu_1+\ldots+\nu_{s-\nu} = q-k-1, \\ \nu_j \geqslant 1, \quad (j=1,\ldots,s-\nu) \end{array}\right\},$$
$$C_{s-\nu}^{(2)}(q-k) = \left\{\vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu-1},1) \in \mathbb{N}^{s-\nu} \,\middle|\, \begin{array}{l} \nu_1+\ldots+\nu_{s-\nu-1} = q-k-1, \\ \nu_j \geqslant 1, \quad (j=1,\ldots,s-\nu-1) \end{array}\right\}.$$

Имеются следующие взаимно однозначные отображения:

$$C_{s-\nu}^{(1)}(q-k) \leftrightarrow C_{s-\nu}(q-k-1): \quad \vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu-1},\nu_{s-\nu}+1) \leftrightarrow \nu' = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu-1},\nu_{s-\nu}),$$
$$C_{s-\nu}^{(2)}(q-k) \leftrightarrow C_{s-\nu-1}(q-k-1): \quad \vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu-1},1) \leftrightarrow \nu' = (\nu_1,\ldots,\nu_{s-\nu-1}).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\vec{\nu}\in C_{s-\nu}(q-k)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_{s-\nu}}}(m_{s-\nu}) = \sum_{\vec{\nu}\in C_{s-\nu}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1})\delta_{2^{\nu_{s-\nu}+1}}(m_{s-\nu}) +$$
$$+ \sum_{\vec{\nu}\in C_{s-\nu-1}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1})\delta_2(m_{s-\nu}) =$$
$$= \sum_{\vec{\nu}\in C_{s-\nu}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1})\delta_{2^{\nu_{s-\nu}}}\left(\frac{m_{s-\nu}}{2}\right) +$$
$$+\delta_2(m_{s-\nu}) \sum_{\vec{\nu}\in C_{s-\nu-1}(q-k-1)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_{s-\nu-1}}}(m_{s-\nu-1}).$$

□

Лемма 10. *Для сетки Смоляка $Sm(q,s)$ со знаменателем $p = 2^{q-s+1}$ тригонометрические суммы $S_q(\vec{m})$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s.*

Доказательство. Действительно, если

$$\vec{x}_k = \left(\frac{x_1^{(k)}}{p},\ldots,\frac{x_s^{(k)}}{p}\right),$$

то $(\vec{m}, \vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ для любого $\vec{m} \in p \cdot \mathbb{Z}^s$, поэтому $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}_k)} = 1$ и

$$S_q(\vec{m}) = S_q(\vec{0}) = 1,$$

согласно лемме 1 (см. стр. 102).

Аналогично получаем, что

$$S_q(\vec{m}) = S_q(\vec{m} + p \cdot \vec{n}).$$

Следовательно, все различные значения тригонометрических сумм $S_q(\vec{m})$ содержатся среди значений для $\vec{m} \in [-p_1, p_2]^s$, где $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$ и $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$. □

Пусть $N_s(q, \vec{n})$ — число решений в натуральных числах системы

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_s = q \\ 1 \leqslant x_j \leqslant n_j,\ 1 \leqslant j \leqslant s. \end{cases}$$

Из элементарной комбинаторики известно, что $N_s(q, \vec{n}) \leqslant C_q^{s-1} < q^{s-1}$. Отсюда следует, что утверждение леммы 10 можно существенно уточнить, но мы этого делать не будем так как в последующих статьях предполагаем найти конечное выражение для значений этих сумм.

Положим $\vec{n}(\vec{m}) = (\nu_2(m_1), \ldots, \nu_2(m_s))$, тогда

$$\sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \ldots \delta_{2^{\nu_s}}(m_s) = N_s(q - k, \vec{n}(\vec{m})).$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$S_q(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q - k, \vec{n}(\vec{m})).$$

Ясно, что $N_s(q, \vec{n}) = 0$, если хоть одно $n_j \leqslant 0$ или $q \leqslant 0$, или даже $q < s$. Таким образом, мы допускаем любые целые значения для q и $n_1, \ldots, n_s$, кроме того, для $n_1, \ldots, n_s$ допускается значение $+\infty$, которое означает, что отсутствует ограничение для соответствующей неизвестной.

Нетрудно видеть, что $N_s(q, \vec{n}) > 0$ только при $q \geqslant s$ и $q \leqslant n_1 + \ldots + n_s$, когда все $n_1, \ldots, n_s$ — натуральные или $+\infty$.

Заметим, что $S_q(\vec{m})$ и $N_s(q, \vec{n})$ не меняются при любой перестановке координат $m_1, \ldots, m_s$ или, соответственно, $n_1, \ldots, n_s$.

Для произвольного вектора $\vec{n}$ через $\vec{n}^*$ обозначим вектор $(n_1^*, \ldots, n_s^*)$, координаты которого образуют перестановку координат $(n_1, \ldots, n_s)$ с условием $n_1^* \geqslant n_2^* \geqslant \ldots \geqslant n_s^*$.

Обозначим через $S_{q,s,l}^*(\vec{n})$, где при $1 \leqslant l \leqslant s$ вектор $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_l)$ — произвольный упорядоченный целочисленный вектор $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l$, сумму

$$S_{q,s,l}^*(\vec{n}) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k N_l(q - k, \vec{n}).$$

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$S_q(\vec{m}) = S_{q,s,s}^*(\vec{n}^*(\vec{m})).$$

Доказательство. Действительно, из равенства

$$S_q(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q - k, \vec{n}(\vec{m}))$$

следует, что

$$S_q(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q-k, \vec{n}^*(\vec{m})).$$

Нетрудно видеть, что

$$S^*_{q,s,s}(\vec{n}^*(\vec{m})) - S_q(\vec{m}) = \sum_{k=k(q,s)+1}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k N_s(q-k, \vec{n}^*(\vec{m})) = 0,$$

так как либо сумма по k пустая, если $k(q,s) = s-1$, либо все слагаемые равны нулю, если $k(q,s) = q-s$, так как в этом случае $q-k < s$ и $N_s(q-k, \vec{n}^*(\vec{m})) = 0$. □

Лемма 12. *При $n_l \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$S^*_{q,s,l}(\vec{n}) = S^*_{q-1,s,l}((n_1, \ldots, n_{l-1}, n_l - 1)) + S^*_{q-1,s,l-1}((n_1, \ldots, n_{l-1})).$$

Доказательство. Множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_l = q-k \\ 1 \leqslant x_j \leqslant n_j,\ 1 \leqslant j \leqslant l \end{cases}$$

разобьём на два подмножества

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_{l-1} + (x_l + 1) = q-k \\ 1 \leqslant x_j \leqslant n_j,\ 1 \leqslant j \leqslant l-1,\ 1 \leqslant x_l \leqslant n_l - 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_{l-1} + 1 = q-k \\ 1 \leqslant x_j \leqslant n_j,\ 1 \leqslant j \leqslant l-1. \end{cases}$$

Число решений в первом подмножестве равно $N_l(q-k-1, (n_1, \ldots, n_{l-1}, n_l - 1))$, а во втором равно $N_{l-1}(q-k-1, (n_1, \ldots, n_{l-1}))$, что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 13. *При $n_l \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$S^*_{q,s,l}(\vec{n}) = \sum_{\nu=0}^{l-2} S^*_{q-1-\nu,s,l-\nu}((n_1, \ldots, n_{l-1-\nu}, n_{l-\nu} - 1)) + S^*_{q-l+1,s,1}((n_1)).$$

Доказательство. Действительно, применяя последовательно лемму 12 $l-2$ раза ко второму слагаемому, получим утверждение леммы. □

6. Аналитическое продолжение

Рассмотрим сетку Смоляка $Sm(q,s)$, которая является рациональной сеткой M вида (31) (см. стр. 110) со знаменателем $p = 2^{q-s+1}$, и соответствующую гиперболическую дзета-функцию сетки

$$\zeta(\alpha|Sm(q,s)) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Согласно лемме 10 (см. стр. 112) имеется не более p^s различных значений тригонометрических сумм $S_q(\vec{m})$. Отсюда следует, что гиперболическую дзета-функцию сетки Смоляка $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ можно выразить через гиперболическую дзета-функцию Гурвица.

Лемма 14. *Для $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ справедливо равенство*

$$\zeta(\alpha|Sm(q,s)) = -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})| \prod_{\nu=1}^{s} \zeta_H(\alpha; 2^{q-s+1}, m_\nu). \tag{39}$$

Доказательство. Действительно, согласно определению гиперболической дзета-функции сетки Смоляка имеем:

$$\zeta(\alpha|Sm(q,s)) = {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{|S_q(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} =$$

$$= -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})| \sum_{k_1,\ldots,k_s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m_1 + 2^{q-s+1}k_1} \ldots \overline{m_s + 2^{q-s+1}k_s})^\alpha} =$$

$$= -|S_q(\vec{0})| + \sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})|^p \prod_{\nu=1}^{s} \zeta_H(\alpha; 2^{q-s+1}, m_\nu).$$

□

Теорема 3. *Гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка является аналитической функцией для любого $\alpha \neq 1$, и в левой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ справедливо равенство*

$$\zeta(\alpha|Sm(q,s)) = -|S^*_q(\vec{0})| + \sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{2^{q-s+1}-1} |S_q(\vec{m})| \prod_{\nu=1}^{s} \left(\varepsilon(m_\nu) + \frac{M(\alpha)}{n^\alpha} {\sum_{k_\nu=-\infty}^{\infty}}' \frac{e^{2\pi i \frac{k_\nu m_\nu}{n}}}{|k_\nu|^\alpha} \right). \tag{40}$$

Доказательство. Действительно, все функции, входящие в правую часть равенства (39) являются аналитическими функциями при $\alpha \neq 1$. Поэтому по принципу аналитического продолжения и гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ является аналитической функцией для любого $\alpha \neq 1$.

Далее заметим, что в левой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ согласно равенству (30) (см. стр. 110) и равенству (16) (см. стр. 107) имеем:

$$\zeta_H(\alpha; 2^{q-s+1}, m) = f^*_1(\alpha; 2^{q-s+1}, m) + \frac{M(\alpha)}{|2^{q-s+1}|^\alpha} \cdot \tilde{\zeta}^{**}\left(1-\alpha, \frac{m}{2^{q-s+1}}\right).$$

Так как $2^{q-s+1} > 1$, то $f^*_1(\alpha; 2^{q-s+1}, m) = \varepsilon(m)$, где

$$\varepsilon(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 0, \\ 0, & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

□

7. Заключение

Из работ [1]–[42] можно составить представление о круге проблем, возникающих в теоретико-числовом методе в приближенном анализе. В настоящей работе было показано, что для произвольной сетки Смоляка тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{0}) = 1$. Отсюда следует, что норма линейного функционала приближенного интегрирования на классе E^α_s равна значению гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка. Показано, что гиперболическая дзета-функция $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка является рядом Дирихле.

Отсюда возникает вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка как функции произвольного комплексного $\alpha = \sigma + it$. Так как сетка Смоляка относится к числу рациональных сеток, то у неё оказывается существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции $\zeta(\alpha|Sm(q,s))$ сетки Смоляка на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс порядка s.

Из работы следует, что остаются открытыми следующие вопросы:

1. является ли нормальным линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geqslant 3$?

2. каковы истинные значения тригонометрических сумм $S_q(m_1,\ldots,m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geqslant 3$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.

2. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 193 с.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 284 с.

4. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

6. Добровольская Л. П., М. Н. Добровольский, Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 47–52.

7. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185–223.

8. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

10. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

11. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^{\alpha}(c)$ и $H_s^{\alpha}(c)$ / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

12. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72—105.

13. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 100–149.

14. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу, 2002. С. 18–20.

15. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

16. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.

17. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 91–95.

18. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.

19. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36–36.

20. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6–18.

21. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014.

22. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка I // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 193–219.

23. Киселёва О. В. О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50–104.

24. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062–1065.

25. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

26. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

27. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.

28. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

29. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.

30. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе (второе издание). М.: МЦНМО, 2004.

31. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

32. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.

33. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

34. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

35. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

36. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1979.

37. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Изд-во "МИР" 1974.

38. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. V. 211. 2014. P. 23–62.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

39. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

40. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960), 84–90, Bd 2 № 2.

41. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

42. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984).

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Vronskaya, G.T. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Otklonenie ploskikh setok [Standard deviation of a flat mesh], Izdatel'stvo TGPU im. L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

3. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia. 284 p.

4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya" Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., & Rebrova, I. YU. 2013, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Izvestie Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.13, no. 4(2), pp. 47-52.

7. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

8. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

9. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

10. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84

12. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ", Chebyshevskij sbornik, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.

13. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Soboleva, V.N., Sobolev, D.K. & Yushina, E.I. 2015, "Hyperbolic dzeta-function of lattices of quadratic fields", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 4, pp. 100–149.

14. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A.", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 18–20.

15. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

16. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A. L., 2001, "On the continuity of the Zeta function of a grid with weights" , Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 7, no. 1., pp. 82–86.

17. Dobrovol'skii, N. N. 2003, "On the number of integer points in a hyperbolic cross at the values of $1 \leqslant t < 21$", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 91–95.

18. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

19. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak", Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.

20. Dobrovol'skii, N. N., 2013, "О гиперболическом параметре сетки" , Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2. P. 1. P. 6–18.

21. Dobrovol'skii, N. N., 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

22. N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "About three-dimensional nets of Smolyak II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 193–219.

23. Kiseleva O. V., 2007, "On the Korobov problem for modified resin grids" , Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 4(24), pp. 50–104.

24. Korobov, N. M., 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

25. Korobov, N. M., 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

26. Korobov, N. M., 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

27. Korobov, N. M., 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

28. Korobov, N. M., 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

29. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined grids", Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

30. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

31. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 118–176.

32. Smolyak, S. A., 1963, "Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

33. Sobol', I. M., 1969, Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.

34. Titchmarsh E. K. 1952, "The Theory of the Riemann Zeta Function", M.: IL, 407 p.

35. Frolov, K. K., 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

36. Frolov, K. K., 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

37. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

38. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

39. Faure, H., 1982, "Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s)", Acta Arith, vol. 41, pp. 337–351.

40. Halton, J. H., 1960, "On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals", Numerische Math, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.

41. Hammersley, J. M., 1960, "Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems", Ann. New York Acad. Sci., vol. 86, 844–874.

42. Weyl H., 1916, "On the uniform distribution of Numbers mod. one", Math. Ann., vol. 77, pp. 313–352.

Получено 04.06.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.