

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-77-99

Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов

Е. И. Деца, Б. Мханна

Деца Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Мханна Батуль — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы перечисления некоторых графов специального вида. Именно, доказан ряд новых результатов о числе остовных деревьев и остовных лесов графов, играющих важную роль в прикладных задачах теории информации. Во-первых, рассмотрены свойства остовных сходящихся лесов ориентированных графов, участвующих в построении квазиметрики среднего времени первого прохода – обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова. Во-вторых, изучены характеристики остовных корневых лесов и остовных сходящихся лесов неориентированных и ориентированных графов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности – одной из мер близости вершин графовых структур, играющей важную роль при решении прикладных задач. Рассуждения проведены на основе нескольких простейших графовых моделей, в том числе на базе простого цикла, простого пути и их ориентированных аналогов.

В первом разделе (введении) представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы. Рассмотрена роль графовых моделей в представлении и исследовании эргодических однородных цепей Маркова – последовательностей случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующихся тем, что распределение вероятностей параметров процесса в следующий момент времени зависит только от параметров процесса в предыдущий момент. Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги – переходам между ними. С другой стороны, любой связный граф (ориентированный граф) может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова: если вершина i имеет степень (полустепень исхода) k , то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. Дано определение и раскрыта роль матрицы относительной лесной доступности неориентированных и ориентированных графов для решения прикладных задач теории информации.

Во втором разделе собраны базовые определения теории графов, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов работы. Дано определение графа и ориентированного графа, остовного подграфа, остовного корневого леса (для неориентированных графов) и остовного сходящегося леса (для ориентированных графов). Приведены примеры.

В третьем разделе дано определение чисел Фибоначчи, сформулирован и доказан ряд свойств чисел Фибоначчи, необходимых для получения основных результатов статьи в случае неориентированных пути и цикла.

В четвертом разделе доказаны две теоремы о перечислении графов, связанных с построением матрицы среднего времени первого прохода для однородной эргодической цепи

Маркова. Именно, найдено количество остовных сходящихся деревьев для ориентированного пути и цикла и остовных корневых деревьев для неориентированного пути и цикла; произведен подсчет остовных лесов, состоящих из двух деревьев, для тех же графовых структур. Результаты, связанные с ориентированным случаем, сформулированы в терминах величин 2^k , $k \geq 0$; результаты для неориентированного случая сформулированы в терминах чисел Фибоначчи u_k , $k \geq 1$. Доказательства проведены на базе элементарных методов перечислительной комбинаторики.

В пятом разделе представлены результаты, связанные с перечислением остовных лесов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности неориентированного пути и цикла и их ориентированных аналогов. Найдено общее количество остовных сходящихся лесов для ориентированного пути и цикла и остовных корневых лесов для неориентированного пути и цикла; произведен подсчет остовных сходящихся лесов, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j в ориентированном пути и цикле, и остовных корневых лесов, в которых вершина i принадлежит дереву с корнем j в неориентированном пути и цикле. Как и ранее, результаты, связанные с ориентированным случаем, сформулированы в терминах величин 2^k , $k \geq 0$; результаты для неориентированного случая сформулированы в терминах чисел Фибоначчи u_k , $k \geq 1$.

В шестом разделе (заключении) приведены основные выводы работы, намечены результаты дальнейших исследований.

Ключевые слова: граф, путь, цикл, остовной сходящийся корневой лес ориентированного графа, остовной корневой лес неориентированного графа, цепь Маркова, среднее время первого прохода, матрица относительной лесной доступности.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. И. Деца, Б. Мханна. Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 77 – 99.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-77-99

Questions of enumeration of spanning forests of selected graphs

E. I. Deza, B. Mhanna

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Mhanna Batool — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Abstract

In this article we consider questions of graph enumeration for some graphs of a special form. In fact, a number of new results have been proved on the number of spanning trees and spanning forests of graphs that play an important role in the applied problems of Information Theory. On the one hand, the properties of the spanning converging forests of oriented graphs involved in the construction of the mean first passage time quasi-metric, a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains, are considered. On the other hand, the characteristics of spanning rooted forests and spanning converging forests of non-oriented and oriented graphs needed for the construction of a matrix of relative connectivity via forests, one

of the measures of proximity of the vertices of graph structures, which plays an important role in solving of applied problems, have been studied. The consideration is based on several simple graph models, including a simple cycle, a simple path and their oriented analogues.

The first section (introduction) presents the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article. The role of graph models in the presentation and study of ergodic homogeneous Markov chains is considered. In fact, a Markov chain is a mathematical model of some random process describing a sequence of possible events in which the probability of each event depends only on the state attained in the previous event. The Markov chain can be depicted as an oriented weighted graph of transitions whose vertices correspond to the states of the chain and the arcs correspond to the transitions between them. On the other hand, any connected graph can be used as a basis for building a model of the simplest Markov chain: if a vertex i has degree k , all incident edges are converted into arcs with the weights $\frac{1}{k}$. The matrix of relative connectivity via forests for non-oriented and oriented graphs is defined; its role for solving important applied problems of Information Theory is disclosed.

The second section contains the basic definitions of Graph Theory necessary to formulate and prove the main results of the article. The definitions of a graph and an oriented graph, a spanning subgraph, a spanning rooted forest (for non-oriented graphs) and a spanning converging forest (for oriented graphs) are given. Some examples are represented.

In the third section, the definition of Fibonacci numbers is given, a number of properties of Fibonacci numbers necessary to obtain the main results of the article for undirected paths and cycles are formulated and proved.

In the fourth section, two theorems on the enumeration of graphs related to the construction of the mean first passage time matrix for a homogeneous ergodic Markov chain are proved. In fact, the number of spanning converging trees for the oriented path and the oriented cycle and the number of spanning rooted trees for the non-oriented path and the non-oriented cycle are given; the spanning forests consisting of two trees for the same graph structures are counted. Results for the oriented case are formulated in terms of values 2^k , $k \geq 0$; results for the non-oriented case are formulated in terms of Fibonacci numbers u_k , $k \geq 1$. The proofs are based on elementary methods of enumerating Combinatorics.

The fifth section presents the results related to enumeration of spanning forests needed for construction of the matrix of relative connectivity via forests for the non-oriented paths and cycles and their oriented analogues. Total number of spanning converging forests (for oriented paths and cycles) and total number of spanning rooted forests (for non-oriented paths and cycles) are found; enumeration of the spanning converging forests, in which a vertex i belongs to a tree converging to a vertex j (for the oriented paths and cycles), and enumeration of the spanning rooted forests, in which a vertex i belongs to a tree with a root j (for the non-oriented paths and cycles) are represented. As before, results for the oriented case are formulated in terms of values 2^k , $k \geq 0$; results for the non-oriented case are formulated in terms of Fibonacci numbers u_k , $k \geq 1$.

The sixth section (conclusion) presents the main conclusions of the article, outlines the ideas of further studies.

Keywords: graph, path, cycle, spanning converging forest of an oriented graph, spanning rooted forest of a non-oriented graph, Markov chain, mean first passage time, matrix of relative connectivity via forests.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

E. I. Deza, B. Mhanna, 2021, "Questions of enumeration of spanning forests of selected graphs ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 77 – 99.

1. Введение

Вопросы перечисления тех или иных графовых структур (помеченных, непомеченных, ориентированных, неориентированных и др.) представляют собой значительную и хорошо разра-

ботанную часть классической теории графов. Особое место среди перечислительных проблем занимают утверждения, связанные с подсчетом тех или иных деревьев и, как естественное обобщение, лесов (как “несвязных деревьев”). При этом интерес представляют не только хорошо известные теоремы о числе ребер дерева на n вершинах (у такого дерева имеется ровно $n - 1$ ребро) и о числе деревьев на n вершинах при $n \geq 2$ (на n вершинах можно построить ровно n^{n-2} помеченных дерева), но и менее распространенные, но имеющие большое прикладное значение теоремы о количестве древовидных графовых структур того или иного вида.

Так, важное место в прикладных задачах теории информации занимают вопросы, связанные с исследованием обобщенных метрических структур на цепях Маркова. Напомним, что *цепью Маркова* называется последовательность одинаковых случайных испытаний, в которой вероятность исхода следующего испытания зависит только от исхода испытания, непосредственно предшествующего ему. Другими словами, цепь Маркова представляет собой последовательность случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующуюся тем, что “при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого”. [4]

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги - переходам между ними. Вес дуги (i, j) , связывающей вершины s_i и s_j , будет равен вероятности p_{ij} перехода из первого состояния во второе.

Процесс будет *эргодическим*, если построенный взвешенный орграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице.

С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный ориентированный граф по следующему закону: если вершина i имеет степень k , то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

Важной характеристикой эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$ является *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j , определяемое как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ - математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geq 1 : X_p = j \mid X_0 = i\}$.

Матрицу M можно получить, пользуясь исследованием ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова. Именно, имеет место следующий результат ([6], [10], [16], [17], [18], [19]).

Пусть $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$. Пусть Γ - взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода в T . Тогда среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} - суммарный вес входящих лесов орграфа Γ , состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j , q_j - суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Таким образом, исследование количества сходящихся лесов ориентированных графов, используемых для моделирования марковских процессов, является естественной составной частью указанной проблематики. Полученные нами результаты в этой области – доказательство теорем о числе остовных деревьев и остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных путей и циклов – представлены в разделе 4 работы.

Другой пример. Определим матрицу относительной лесной доступности графа G на n вершинах по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных корневых лесов графа G , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , а f - общее количество остовных корневых лесов графа G . Для ориентированного случая определим матрицу относительной лесной доступности орграфа Γ на n вершинах по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных сходящихся лесов орграфа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному и тому же дереву, сходящемуся к j , а f - общее количество остовных сходящихся лесов орграфа G ([11], [9], [8]). Матрица относительной лесной доступности является одной из известных мер близости между вершинами графов и орграфов; особенно часто она используется в приложениях, связанных с различными аспектами алгебраической теории графов.

Из определения матрицы относительной лесной доступности следует, что информация о количестве тех или иных типов остовных лесов графов и ориентированных графов, использующихся при решении прикладных задач, существенна для проведения соответствующих исследований. Полученные нами результаты в этой области - доказательство теорем о числе остовных лесов ориентированных и неориентированных путей и циклов - представлены в разделе 5 работы.

Разделы 2 и 3 работы носят вспомогательный характер. Раздел 2 содержит базовую информацию о графовых структурах, фигурирующих в исследовании. Раздел 3 посвящен доказательству свойств последовательности чисел Фибоначчи, существенно использующихся при доказательстве теорем в случае неориентированных графовых конструкций.

2. Остовные леса: базовые определения

Для формулировки и доказательства основных результатов статьи вспомним базовые понятия теории неориентированных и ориентированных графов. [5], [6], [10]

Неориентированный граф (граф) G - пара $\langle V, E \rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ - множество, называемое множеством вершин графа G , а $E \subset \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$ - некоторое подмножество множества неупорядоченных пар различных элементов из V , называемое множеством ребер графа G .

Простейшими графами являются *неориентированный путь $P_n = (V, E)$* (рис. 2.1), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, и *неориентированный цикл $C_n = (V, E)$* (рис. 2.2), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$.

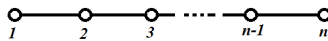


Рис. 2.1. Неориентированный путь $P_n, n \geq 2$.

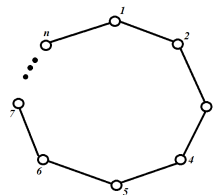


Рис. 2.2. Неориентированный цикл $C_n, n \geq 3$.

Подграфом графа G называется любой граф, множество вершин которого является подмножеством вершин графа G , а множество ребер является подмножеством множества ребер графа G . *Остовный подграф* графа G - подграф, содержащий все вершины графа G .

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует соединяющий их путь. Компонентой графа G называется максимальный связный подграф графа G .

Дерево – связный граф, не содержащий циклов. *Корневое дерево* – дерево, в котором выбрана одна вершина, называемая *корнем*. *Корневое остовное дерево* графа G – остовный подграф графа G , являющийся корневым деревом.

Лес – граф, каждая компонента которого является деревом. *Корневой остовной лес* графа G – остовный подграф графа G , все компоненты которого являются корневыми деревьями.

Ориентированный граф (орграф) Γ – пара $\langle V, E \rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – множество, называемое множеством вершин графа G , а $E \subset \{\langle i, j \rangle | i, j \in V, i \neq j\}$ – некоторое подмножество множества упорядоченных пар различных элементов из V , называемое множеством дуг орграфа Γ . Другими словами, ориентированный граф – это граф, ребрам которого присвоено направление.

Простейшими орграфами являются *ориентированный путь* $\vec{P}_n = \langle V, E \rangle$ (рис. 2.3), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 2, 1 \rangle\}$ и *ориентированный цикл* $\vec{C}_n = \langle V, E \rangle$ (рис. 2.4), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, n \rangle\}$.

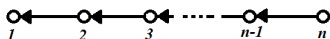


Рис. 2.3. Ориентированный путь \vec{P}_n , $n \geq 2$.

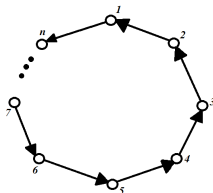


Рис. 2.4. Ориентированный цикл \vec{C}_n , $n \geq 3$.

Подорграфом орграфа Γ называется любой орграф, множество вершин которого является подмножеством вершин орграфа Γ , а множество дуг является подмножеством множества дуг орграфа Γ . *Остовной подорграф* графа Γ – подорграф, содержащий все вершины орграфа Γ .

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связан. *Слабой компонентой* орграфа называется любой его максимальный слабосвязный подграф.

Сходящееся дерево – слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для исходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для исходящей степени значение 1.

Сходящийся лес орграфа Γ – остовной подорграф орграфа Γ , все слабые компоненты которого являются сходящимися деревьями. Говорят, что сходящийся лес *сходится к корням* его сходящихся деревьев.

Как было сказано выше, нас будут интересовать несколько типов остовных лесов неориентированных пути и цикла и их ориентированных аналогов. Для построения матрицы среднего времени первого прохода цепи Маркова нам потребуется информация о числе остовных сходящихся 2-деревьевых лесов ориентированного графа, соответствующего данной марковской цепи. Для построения матрицы относительной лесной доступности нам потребуется информация об общем числе остовных лесов исследуемого графа или орграфа, и поведении остовных лесов, так или иначе связанных с заданной парой вершин указанных графовых конструкций.

3. Числа Фибоначчи: определения и простейшие свойства

Числами Фибоначчи называются элементы рекуррентно задаваемой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots: u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, в то время как $u_1 = u_2 = 1$. Таким образом, последовательность Фибоначчи начинается с элементов 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она использовалась значительно раньше, чем стала известна в Европе. На Западе эта последовательность появилась благодаря Леонардо Пизанскому, известному как Фибоначчи, который исследовал ее в своей "Книге абака" при решении так называемой задачи о кроликах.

Числа Фибоначчи обладают рядом интересных свойств, которые можно найти, например, в [1]. В частности, они удовлетворяют многочисленным тождествам, некоторые из которых будут использованы в нашей работе.

Именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1.

Имеют место следующие тождества:

1. $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$;
2. $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
3. $u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$;
4. $1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-1)} + 2u_{2n} = u_{2(n+1)}$;
5. $1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + (n-1)u_{2 \cdot 2} + nu_{2 \cdot 1} + (n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)}$;
6. $u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2 \cdot 2} + (n-2)(n-1)u_{2 \cdot 1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$;
7. $u_{2n} + 2u_{2(n-1)} + 2u_{2(n-2)} + \dots + 2u_4 + 2u_2 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первые три тождества хорошо известны (см., например, [1]). Их можно доказать, пользуясь методом математической индукции.

Так, для доказательства второго свойства убедимся, что оно имеет место для $n = 1$ и $n = 2$: замечая, что $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ и $u_5 = 5$, мы получим, что $u_2 = u_3 - 1$, и $u_2 + u_4 = u_5 - 1$.

Для реализации индукционного шага $n \rightarrow n + 1$ предположим, что тождество $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$ имеет место для n ; используя данное индукционное предположение, докажем соотношение $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} + u_{2(n+1)} = u_{2(n+1)+1} - 1$ для $n + 1$.

Действительно,

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} + u_{2(n+1)} = (u_{2n+1} - 1) + u_{2(n+1)} = (u_{2n+1} + u_{2n+2}) - 1 = u_{2n+3} - 1 = u_{2(n+1)+1} - 1.$$

Аналогичным образом можно доказать третье свойство.

Для доказательства четвертого тождества метод математической индукции использовать необязательно. Достаточно заметить, что $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ и воспользоваться свойством 2:

$$\begin{aligned} 1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-1)} + 2u_{2n} &= 1 + (u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-1)} + u_{2n}) + u_{2n} = \\ &= 1 + (u_{2n+1} - 1) + u_{2n} = u_{2n+2} = u_{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Для доказательства пятого тождества вновь воспользуемся методом математической индукции. Прежде всего убедимся, что тождество имеет место для $n = 1$ и $n = 2$. Действительно, для $n = 1$ имеют место соотношения $1 \cdot u_1 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 = u_4$. Для $n = 2$ получаем соотношения $1 \cdot u_4 + 2 \cdot u_2 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 = u_6$.

Для реализации индукционного шага $n \rightarrow n + 1$ предположим, что тождество $1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + (n-1)u_{2,2} + nu_{2,1} + (n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)}$ имеет место для n ; используя данное индукционное предположение и только что доказанное нами второе тождество, записанное в виде $u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n+1)} + 1 = u_{2(n+1)+1}$, докажем соотношение $1 \cdot u_{2(n+1)} + 2 \cdot u_{2n} + 3 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + n \cdot u_{2,2} + (n+1)u_{2,1} + (n+2) \cdot 1 = u_{2(n+2)}$ для $n+1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot u_{2(n+1)} + 2 \cdot u_{2n} + 3 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + n \cdot u_{2,2} + (n+1)u_{2,1} + (n+2) \cdot 1 = \\ & = (u_{2(n+1)} + u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + u_{2,1} + 1) + \\ & + 1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + (n-1)u_{2,2} + n \cdot u_{2,1} + (n+1) \cdot 1 = \\ & = u_{2(n+1)+1} + u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = u_{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Впрочем, и в этом случае можно обойтись без применения индукции. Последовательно пользуясь свойством 2 и свойством 3, получим:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot u_{2(n+1)} + 2 \cdot u_{2n} + 3 \cdot u_{2(n-1)} + \dots + n \cdot u_{2,2} + (n+1)u_{2,1} + (n+2) \cdot 1 = \\ & = (u_{2(n+1)} + u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + u_{2,1} + 1) + \\ & + (u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + n \cdot u_{2,1} + 1) + \\ & + (u_{2(n-1)} + \dots + u_{2,2} + u_{2,1} + 1) + \dots + 1 = \\ & = u_{2(n+1)+1} + u_{2n+1} + u_{2(n-1)+1} + \dots + 1 = u_{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Для доказательства шестого тождества

$$u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$$

также воспользуемся методом математической индукции.

Прежде всего убедимся, что тождество имеет место для $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Действительно, для $n = 1$ имеют место соотношения $u_2 = u_1 + u_3 - 2$. Для $n = 2$ получаем соотношения $u_4 + 2 = u_3 + u_5 - 2$. Для $n = 3$ имеет место первая "полноценная" проверка:

$$u_6 + 2u_2 + 2 \cdot 3 = 8 + 2 \cdot 1 + 6 = 16 = 5 + 8 - 2 = u_5 + u_7 - 2.$$

Для реализации индукционного шага $n \rightarrow n + 1$ предположим, что тождество $u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$ имеет место для n ; используя данное индукционное предположение и только что доказанное нами четвертое тождество, записанное в виде $1 \cdot u_{2n} + 2 \cdot u_{2(n-1)} + 3 \cdot u_{2(n-2)} + \dots + (n-1)u_{2,2} + nu_{2,1} + (n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)}$, докажем соотношение $u_{2(n+1)} + 2u_{2(n-1)} + 2 \cdot 3u_{2(n-2)} + 3 \cdot 4u_{2(n-3)} + \dots + (n-2)(n-1)u_{2,2} + (n-1)nu_{2,1} + n(n+1) \cdot 1 = u_{2(n+1)-1} + u_{2(n+1)+1} - 2$ для $n+1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} & u_{2(n+1)} + 2u_{2(n-1)} + 2 \cdot 3u_{2(n-2)} + 3 \cdot 4u_{2(n-3)} + \dots + (n-2)(n-1)u_{2,2} + (n-1)nu_{2,1} + n(n+1) \cdot 1 = \\ & u_{2(n+1)} + (2 \cdot 1u_{2(n-1)} + 2 \cdot 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 2 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + 2(n-2)u_{2,2} + 2(n-1)u_{2,1} + 2n \cdot 1) + \\ & + (2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1) = \\ & u_{2(n+1)} + 2(1u_{2(n-1)} + 2u_{2(n-2)} + 3u_{2(n-3)} + 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-2)u_{2,2} + (n-1)u_{2,1} + n \cdot 1) + \\ & (u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + 3 \cdot 4u_{2(n-4)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1) - u_{2n} = \end{aligned}$$

$$u_{2(n+1)} + 2u_{2n} + (u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2) - u_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n} + u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2 = u_{2n+1} + u_{2n+3} - 2.$$

Для доказательства последнего свойства заметим, что

$$u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2 = (u_{2n-1} - 1) + (u_{2n+1} - 1)$$

и, пользуясь свойством $u_{2n+1} - 1 = u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$ (свойство 2), получим:

$$u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2 = (u_{2n-1} - 1) + (u_{2n+1} - 1) = 2u_2 + 2u_4 + \dots + 2u_{2(n-1)} + u_{2n}.$$

Утверждение теоремы полностью доказано. \square

В следующих параграфах мы используем доказанные свойства чисел Фибоначчи при получении результатов, связанных с пересчислением корневых остовных лесов неориентированного пути и неориентированного цикла.

4. Пересчисление остовных лесов пути и цикла, связанных с квазиметрикой среднего времени первого прохода

Напомним, что если Γ – взвешенный оргграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны вероятностям перехода некоторой однородной эргодической цепи Маркова, то среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в данной цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} – суммарный вес входящих лесов оргграфа Γ , состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j ; q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Таким образом, для построения матрицы среднего времени первого прохода нам нужна информация о количестве корневых (сходящихся) остовных деревьев и корневых (сходящихся) остовных 2-деревьев лесов ориентированных и неориентированных графов. В этом разделе представлены доказательства полученных нами результатов для неориентированных и ориентированных путей и циклов.

ТЕОРЕМА 4.1.

Для числа корневых остовных деревьев имеют место следующие утверждения:

- число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного пути \vec{P}_n , $n \geq 2$, равно 1;
- число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$, равно n ;
- число остовных корневых деревьев неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно n ;
- число остовных корневых деревьев неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно n^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для ориентированного пути \vec{P}_n существует ровно одно остовное корневое дерево: выбирая в качестве корня вершину 1, мы получаем остовное дерево, сходящееся к 1, которое совпадает с самим графом \vec{P}_n ; выбирая в качестве корня любую вершину $i \neq 1$, мы убеждаемся, что в графе \vec{P}_n не существует остовного дерева, сходящегося к i .

В. Для ориентированного цикла \vec{C}_n существует ровно одно остовное дерево, сходящееся к фиксированной вершине i : для его построения достаточно уничтожить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Выбирая

вершину i из n возможных вершин орграфа \vec{C}_n , мы получаем n остовных деревьев орграфа \vec{C}_n ; каждое из них представляет собой ориентированный путь на $n - 1$ вершине.

C. Для неориентированного пути P_n существует ровно одно остовное дерево с фиксированным корнем i : оно совпадает с P_n . Выбирая вершину i из n вершин графа P_n , мы получаем n остовных корневых деревьев графа P_n ; каждое из них совпадает с P_n .

D. Для неориентированного цикла C_n существует ровно n остовных деревьев с фиксированным корнем i : для построения одного из таких деревьев достаточно уничтожить любое ребро $(j, j + 1)$ из n ребер графа C_n . Выбирая вершину i из n возможных вершин графа C_n , мы получаем n^2 остовных деревьев графа C_n ; каждое из них представляет собой неориентированный путь на $n - 1$ вершине. \square

ТЕОРЕМА 4.2.

Для числа 2-деревьевых остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного пути \vec{P}_n , $n \geq 2$, равно $n - 1$;
- число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$, равно $\frac{n(n-1)}{2}$;
- число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно $\frac{n(n^2-1)}{6}$;
- число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

A. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов орграфа \vec{P}_n рассмотрим две возможности. Сначала предположим, что одно из двух деревьев нашего леса сходится к вершине 1, а другое - к произвольной вершине $j \neq 1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае два дерева, образующие лес, определены однозначно; искомым 2-деревьевым сходящимся лесом получается уничтожением дуги $\langle j, j - 1 \rangle$. При этом $n - 1$ возможных выборов j обеспечивает $n - 1$ лес. Предположив, что ни одно из двух деревьев 2-деревьевого леса не сходится к 1, то есть пытаюсь найти два дерева с корнями $i \neq 1, j \neq 1$, мы убеждаемся, что такая ситуация невозможна.

B. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов орграфа \vec{C}_n выберем две вершины i, j , делегировав им звание корня одного из двух сходящихся деревьев. Для фиксированных корней i, j искомым 2-деревьевым сходящимся лесом определен однозначно: он получается уничтожением дуг $\langle j, j - 1 \rangle$ и $\langle i, i - 1 \rangle$ (индексы вершин цикла рассматриваем по модулю n). При этом число $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ сочетаний из n по 2, соответствующее возможным выборам пары i, j корней двух сходящихся деревьев обеспечивает $\frac{n(n-1)}{2}$ лесов.

C. Для подсчета остовных 2-деревьевых корневых лесов графа P_n выберем две вершины i, j в качестве корней соответствующих деревьев и заметим, что при фиксированных i, j , $1 \leq i < j \leq n$, мы получаем ровно $j - i$ остовных 2-деревьевых корневых лесов графа P_n . Каждый из этих лесов может быть получен уничтожением одного из $j - i$ ребер $(i, i + 1), (i + 1, i + 2), \dots, (j - 1, j)$ графа P_n .

Так, существует ровно 1 остовный 2-деревьевый лес, в котором деревья имеют корни 1 и 2: одно дерево представляет собой изолированную вершину 1, второе - путь на $n - 1$ вершине 2, 3, ..., n с выделенной вершиной-корнем 2. Существует ровно 2 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 1 и 3: в первом случае одно дерево представляет собой изолированную вершину 1, второе - путь на $n - 1$ вершине 2, 3, ..., n с выделенной вершиной-корнем 3; во втором случае мы получаем путь на двух вершинах 1, 2 с выделенной вершиной-корнем 1 и

для каждого из таких выборов имеем $(j - i)(n - (j - i)) = 1 \cdot (n - 1)$ 2-деревьевых лесов. Нетрудно убедиться в том, что существует $n - 2$ возможности выбора корней $i, j, j - i = 2$: выбираем j из множества $3, \dots, n$, при этом i определяется однозначно; для каждого из таких выборов имеем $(j - i)(n - (j - i)) = 2 \cdot (n - 2)$ 2-деревьевых лесов. Продолжая рассуждения, наконец убедимся в том, что существует 1 возможность выбора корней $i, j, j - i = n - 1$: выбираем j равным n , при этом i определяется однозначно как 1; для такого выбора имеем $(j - i)(n - (j - i)) = (n - 1) \cdot (n - (n - 1)) = (n - 1) \cdot 1$ 2-деревьевых лесов.

Таким образом, непосредственный подсчет позволяет получить для числа 2-деревьевых корневых остовных лесов графа C_n красивую формулу $1 \cdot (n - 1)^2 + 2 \cdot (n - 2)^2 + 3 \cdot (n - 3)^2 + \dots + (n - 1) \cdot 1^2$. Для получения явной формулы произведем формальное суммирование:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (j - i)(n - (j - i)) &= \sum_{i=1}^{n-1} i(n - i)^2 = \\ &= n^2 \sum_{i=1}^{n-1} i - 2n \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \\ &= n^2 \frac{(n - 1)n}{2} - 2n \frac{(n - 1)n(2(n - 1) + 1)}{6} + \frac{(n - 1)^2 n^2}{4} = \frac{(n - 1)n^2(n + 1)}{12} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы полностью доказано. \square

5. Перечисление лесов, связанных с матрицей относительной лесной доступности

Напомним, что матрица относительной лесной доступности графа G (орграфа Γ) на n вершинах определяется по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ), в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , а f - общее количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ). В этом разделе приведены доказательства теорем, дающих формулы для числа соответствующих остовных конструкций в ориентированных и неориентированных путях и циклах.

ТЕОРЕМА 5.1.

Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число остовных сходящихся лесов ориентированного пути \vec{P}_n , $n \geq 2$, равно 2^{n-1} ;
- число остовных сходящихся лесов ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$, равно $2^n - 1$;
- число остовных корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно числу Фибоначчи u_{2n} ;
- число остовных корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно сумме $u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для ориентированного пути \vec{P}_n , $n \geq 2$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle n, n - 1 \rangle\}$ всех $n - 1$ дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из $n - 1$ элемента равно 2^{n-1} , мы получим ровно 2^{n-1} остовных корневых сходящихся лесов ориентированного пути \vec{P}_n , $n \geq 2$.

B. Для ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое непустое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle, \langle 1, n \rangle\}$ всех n дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из n элементов равно 2^n , при этом из них одно - пустое (соответствующий орграф \vec{C}_n не является корневым сходящимся лесом), мы получим ровно $2^n - 1$ остовных корневых сходящихся лесов ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$.

C. Для неориентированного пути P_n , $n \geq 1$, при получении остовного корневого леса воспользуемся соображениями индукции и доказанными выше свойствами чисел Фибоначчи.

Для $n = 1$ мы имеем ровно один (то есть $u_2 = 1$) корневой лес графа P_n . Для $n = 2$ мы имеем ровно три (то есть $u_4 = 3$) корневых леса графа P_n . Они получаются так: изолированная вершина-корень 2 "расширяет" предыдущий случай $n = 1$; вершина 2, связанная с корнем 1, еще раз "расширяет" предыдущий случай $n = 1$; наконец, вершина 2, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 1, дает еще один дополнительный случай, то есть мы получаем для подсчета остовных корневых лесов графа P_2 формулу $2u_2 + 1$. Нетрудно убедиться в том, что $2u_2 + 1 = 3 = u_4$.

Для доказательства общего случая заметим (свойство 4 чисел Фибоначчи, доказанное выше), что

$$u_{2n} = 2u_{2n-2} + u_{2n-4} + \dots + u_2 + 1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф P_{n+1} добавлением к пути P_n новой вершины $n + 1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

I. Если $n + 1$ - изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то мы получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для P_n , другими словами, u_{2n} .

II. Если вершина $n + 1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то мы вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для P_n , другими словами, u_{2n} .

III. Если $n + 1$ связана с n ребром и является корнем, то мы получаем следующие случаи.

1. Дерево (путь) на вершинах $n + 1, n$ с корнем $n + 1$ и любой корневой лес на $n - 1$ вершине $n - 1, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_{n-1}), всего $u_{2(n-1)}$ возможностей.

2. Дерево (путь) на вершинах $n + 1, n, n - 1$ с корнем $n + 1$ и любой корневой лес на $n - 2$ вершинах $n - 2, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_{n-2}), всего $u_{2(n-2)}$ возможностей.

3. Дерево (путь) на вершинах $n + 1, n, n - 1, n - 2$ с корнем $n + 1$ и любой корневой лес на $n - 3$ вершинах $n - 3, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_{n-3}), всего $u_{2(n-3)}$ возможностей.

...

$n - 2$. Дерево (путь) на вершинах $n + 1, n, n - 1, \dots, 3$ с корнем $n + 1$ и любой корневой лес на 2 вершинах $2, 1$ (то есть любой корневой лес графа P_2), всего $u_{2 \cdot 2}$ возможностей.

$n - 1$. Дерево (путь) на вершинах $n + 1, n, n - 1, \dots, 3, 2$ с корнем $n + 1$ и единственный корневой лес на одной вершине 1 ((то есть единственный корневой лес графа P_1), всего $u_{2 \cdot 1}$ возможностей.

n . Наконец, дерево на вершинах $n + 1, n, n - 1, \dots, 2, 1$ (то есть сам путь P_{n+1}) с корнем $n + 1$, всего одна возможность.

Данный пересчет дает число $u_{2(n+1)}$ корневых остовных лесов графа P_{n+1} :

$$2u_{2n} + u_{2(n-1)} + \dots + u_4 + u_2 + 1 = u_{2(n+1)}.$$

D. Для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, рассмотрим несколько случаев.

I. Если в графе C_n уничтожено ребро $(1, n)$, то пересчет соответствующих корневых остовных лесов сводится к пересчету корневых остовных лесов пути P_n на n вершинах; мы доказали, что имеется ровно u_{2n} таких лесов.

II. Если в остовном корневом лесе графа C_n ребро $(1, n)$ присутствует, пересчет несколько усложняется. Рассмотрим все возможные ситуации.

1. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$ и нет ребра $(n, n - 1)$.

1.1. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$ и нет ребра $(1, 2)$. В этом случае на двух вершинах $1, n$ можно задать два корневых дерева (выберите корень 1 или корень n), в то время как на вершинах $2, 3, \dots, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-2}) на $n - 2$ вершинах, всего $u_{2(n-2)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $2 \cdot u_{2(n-2)}$ возможностей для случая 1.1.

1.2. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(1, 2)$ и нет ребра $(2, 3)$. В этом случае на трех вершинах $2, 1, n$ можно задать три корневых дерева (выберите корень $1, 2$ или n), в то время как на вершинах $3, 4, \dots, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-3}) на $n - 3$ вершинах, всего $u_{2(n-3)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $3 \cdot u_{2(n-3)}$ возможностей для случая 1.2.

1.3. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(1, 2)$, есть ребро $(2, 3)$ и нет ребра $(3, 4)$. В этом случае на четырех вершинах $3, 2, 1, n$ можно задать четыре корневых дерева (выберите корень $1, 2, 3$ или n), в то время как на вершинах $4, \dots, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-4}) на $n - 4$ вершинах, всего $u_{2(n-4)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $4 \cdot u_{2(n-4)}$ возможностей для случая 1.3.

...

1. $n - 3$. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 4, n - 3)$, и нет ребра $(n - 3, n - 2)$. В этом случае на $n - 2$ вершинах $n - 3, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать $n - 2$ корневых дерева (выберите корень $1, 2, \dots, n - 3$ или n), в то время как на вершинах $n - 2, n - 1$ можно построить любой корневой лес (пути P_2) на 2 вершинах, всего $u_{2,2}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $(n - 2) \cdot u_{2,2}$ возможностей для случая 1. $n - 3$.

1. $n - 2$. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 3, n - 2)$, и нет ребра $(n - 2, n - 1)$. В этом случае на $n - 1$ вершине $n - 2, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать $n - 1$ корневое дерево (выберите корень $1, 2, \dots, n - 2$ или n), в то время как на вершине $n - 1$ можно построить один корневой лес (пути P_1), формально, $u_{2,1}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $(n - 1) \cdot u_{2,1}$ возможностей для случая 1. $n - 2$.

1. $n - 1$. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребра $(1, 2), \dots, (n - 3, n - 2), (n - 2, n - 1)$. В этом случае на $n - 1$ вершинах $n - 1, \dots, 3, 2, 1, n$ можно задать n корневых деревьев (выберите корень $1, 2, \dots, n - 1$ или n). Поскольку никаких "дополнительных" вершин в этом случае нет (одна возможность), то формально мы получаем $n \cdot 1$ возможностей для случая 1. $n - 1$.

Суммируя, получаем для случая 1 величину $2u_{2(n-2)} + 3u_{2(n-3)} + \dots + (n - 1)u_{2,1} + n \cdot 1$.

2. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$ и нет ребра $(n - 1, n - 2)$.

2.1. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$ и нет ребра $(1, 2)$. В этом случае на трех вершинах $1, n, n - 1$ можно задать три корневых дерева (выберите корень $1, n$ или $n - 1$), в то время как на $n - 3$ вершинах $2, 3, \dots, n - 2$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-3}), всего $u_{2(n-3)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $3 \cdot u_{2(n-3)}$ возможностей для случая 2.1.

2.2. В корневом лесе имеется ребро $(1, n)$, имеется ребро $(n, n - 1)$, нет ребра $(n - 1, n - 2)$, есть ребро $(1, 2)$ и нет ребра $(2, 3)$. В этом случае на четырех вершинах $2, 1, n, n - 1$ можно задать четыре корневых дерева (выберите корень $2, 1, n$ или $n - 1$), в то время как на $n - 4$ вершинах $3, \dots, n - 2$ можно построить любой корневой лес (пути P_{n-4}), всего $u_{2(n-4)}$ возможностей. Поскольку указанные выборы независимы, мы получаем $4 \cdot u_{2(n-4)}$ возможностей для случая 2.2.

Поскольку (свойство 6 чисел Фибоначчи, доказанное выше)

$$u_{2n} + 2u_{2(n-2)} + 2 \cdot 3u_{2(n-3)} + \dots + (n-3)(n-2)u_{2,2} + (n-2)(n-1)u_{2,1} + (n-1)n \cdot 1 = u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2,$$

то можно утверждать, что количество корневых лесов неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, равно $u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

Утверждение теоремы полностью доказано. \square

ТЕОРЕМА 5.2.

Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n, n \geq 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , равно:

$$f_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1, \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n \end{cases}; \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1, \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n, \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

- число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n, n \geq 3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , равно

$$f_{ii} = 2^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{(j-i)-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n-(i-j)-1}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n \end{cases};$$

- число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно $u_{2 \min(i,j)-1} \cdot u_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i, j = 1, \dots, n$;

- число остовных корневых лесов неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно $u_{2|j-i|} + u_{2(n-|j-i|)}$, $i, j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного пути $\vec{P}_n, n \geq 2$.

И. Рассмотрев величину f_{11} , нетрудно убедиться в том, что в любом сходящемся остовном лесе ориентированного пути вершина 1 всегда принадлежит дереву, сходящемуся к вершине 1. Таким образом, f_{11} равно общему числу остовных сходящихся лесов орграфа \vec{P}_n , то есть 2^{n-1} .

II. Рассмотрим величину $f_{ii}, i \neq 1$. Чтобы получить дерево, сходящееся к i , нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i , необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i-1, i-2 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ оставшихся $n-2$ дуг ориентированного пути \vec{P}_n ; Это можно сделать 2^{n-2} способами.

III. Рассмотрим величину $f_{i1}, i \neq 1$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между 1 и i . Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина $i \neq 1$ принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle$ оставшихся $n-i$ дуг ориентированного пути \vec{P}_n ; Это можно сделать 2^{n-i} способами.

IV. Рассмотрим величину f_{ij} , $2 \leq j < i \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j \rangle$, $\langle j+2, j+1 \rangle$, ..., $\langle i, i-1 \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $2 \leq j < i \leq n$, необходимо, сохранив дуги $\langle j+1, j \rangle$, $\langle j+2, j+1 \rangle$, ..., $\langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \dots, \langle j-2, j-1 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ оставшихся $n - (i-j) - 2$ дуг ориентированного пути \vec{P}_n ; Это можно сделать $2^{n-(i-j)-2}$ способами.

V. Рассматривая величину f_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, нетрудно убедиться в том, что она равна нулю: деревьев, содержащих i и сходящихся к j , в данном случае не существует.

B. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$.

I. Рассматривая величину f_{ii} , $1 \leq i \leq n$, убедимся, что для получения дерева, сходящегося к i , нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла \vec{C}_n , $n \geq 3$, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i , необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i-1, i-2 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle, \langle 1, n \rangle$ оставшихся $n-1$ дуг ориентированного цикла \vec{C}_n ; это можно сделать 2^{n-1} способами.

II. Рассмотрим величину f_{i1} , $i \neq 1$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между 1 и i . Кроме того, выбор корня 1 требует уничтожения дуги $\langle 1, n \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла, в которых вершина $i \neq 1$ принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дуги $\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle 1, n \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle$, оставшихся $n-i$ дуг ориентированного цикла \vec{C}_n ; это можно сделать $2^{n-i} = 2^{n-(i-1)-1}$ способами.

III. Рассмотрим величину f_{ij} , $2 \leq j < i \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j \rangle, \langle j+2, j+1 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $2 \leq j < i \leq n$, необходимо, сохранив $i-j$ дуг $\langle j+1, j \rangle, \langle j+2, j+1 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle, \langle 1, n \rangle, \dots, \langle j-1, j-2 \rangle$ оставшихся $n - (i-j) - 1$ дуг ориентированного цикла \vec{C}_n ; это можно сделать $2^{n-(i-j)-1}$ способами.

IV. Рассмотрим величину f_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle i, i-1 \rangle, \langle i-1, i-2 \rangle, \dots, \langle 1, n \rangle, \dots, \langle j+1, j \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного цикла, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $1 \leq i < j \leq n$, необходимо, сохранив $n-(j-i)$ дуг $\langle i, i-1 \rangle, \langle i-1, i-2 \rangle, \dots, \langle 1, n \rangle, \dots, \langle j+1, j \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\langle i+1, i \rangle, \langle i+2, i+1 \rangle, \dots, \langle j-1, j-2 \rangle$ оставшихся $j-i-1$ дуг ориентированного цикла \vec{C}_n ; Это можно сделать 2^{j-i-1} способами.

Доказательство теоремы для ориентированного цикла \vec{C}_n можно сократить, заметив, что орграф \vec{C}_n изоморфен орграфу, полученному из \vec{C}_n сдвигом $i \rightarrow i+1$, $1 \leq i \leq n$, индексов всех вершин на единицу (на самом деле, на любую фиксированную константу). Как обычно, работа с индексами проводится по модулю n . В этом случае достаточно доказать утверждение

для f_{11} и f_{i1} , $i \neq 1$. Остальные результаты получатся автоматически после элементарных преобразований.

С. Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного пути P_n , $n \geq 2$.

Рассмотрим величину f_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j , нужно обязательно сохранить все $j - i$ ребер между j и i . Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

I. Посмотрим, какие возможности мы можем получить, отбрасывая те или иные ребра "справа" от вершины j .

1. Если справа от вершины j мы ничего не убираем, то в качестве искомого леса мы получаем дерево с корнем j – путь на вершинах $i, i + 1, \dots, j, \dots, n$ с корнем j ; единственная возможность, 1 .

2. Если справа мы уберем ребро $(n - 1, n)$ и сохраним все ребра $(j, j + 1), (j + 1, j + 2), \dots, (n - 2, n - 1)$, мы получим справа единственное дерево на одной вершине n с корнем n ; единственная возможность, $1 = u_2$.

3. Если справа мы уберем ребро $(n - 2, n - 1)$ и сохраним все ребра $(j, j + 1), (j + 1, j + 2), \dots, (n - 2, n - 1)$, мы получим справа две вершины $n - 1, n$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на двух вершинах равно $u_{2,2}$; таким образом, имеем $3 = u_4$ возможностей.

...

$n - j + 1$. Если справа мы уберем ребро $(j, j + 1)$, мы получим справа $n - j$ вершин $j + 1, \dots, n$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на $n - j$ вершинах равно $u_{2 \cdot (n-j)}$; таким образом, имеем $u_{2(n-j)}$ возможностей.

Таким образом, число "правых" преобразований равно $u_{2(n-j)+1}$:

$$1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-j)} = u_{2(n-j)+1}.$$

II. Посмотрим, какие возможности мы можем получить, отбрасывая те или иные ребра "слева" от вершины i .

1. Если слева от вершины i мы ничего не убираем, то в качестве искомого леса мы получаем дерево с корнем j – путь на вершинах $1, 2, \dots, i, \dots, j$ с корнем j ; единственная возможность, 1 .

2. Если слева мы уберем ребро $(1, 2)$ и сохраним все ребра $(2, 3), (3, 4), \dots, (i - 1, i)$, мы получим слева единственное дерево на одной вершине 1 с корнем 1 ; единственная возможность, $1 = u_2$.

3. Если слева мы уберем ребро $(2, 3)$ и сохраним все ребра $(3, 4), (4, 5), \dots, (i - 1, i)$, мы получим слева две вершины $1, 2$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на двух вершинах равно $u_{2,2}$; таким образом, имеем $3 = u_4$ возможностей.

...

i . Если слева мы уберем ребро $(i - 1, i)$, мы получим слева $i - 1$ вершину $1, 2, \dots, i - 1$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса. По доказанной ранее теореме, число остовных лесов неориентированного пути на $i - 1$ вершине равно $u_{2 \cdot (i-1)}$; таким образом, имеем $u_{2(i-1)}$ возможностей.

Таким образом, число "левых" преобразований равно u_{2i-1} :

$$1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(i-1)} = u_{2(i-1)+1} = u_{2i-1}.$$

III. Поскольку "правые" и "левые" операции осуществляются независимо друг от друга, то для получения общего числа остовных деревьев неориентированного пути числа таких операций необходимо перемножить, что и даст искомым результат.

D. Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$.

Рассмотрим величину f_{ij} , $1 \leq i \leq j \neq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j , нужно обязательно сохранить все $j - i$ ребер между j и i "справа" или все $n - (j - i)$ ребер между i и j "слева", и в полученном пути, соединяющем i и j , так или иначе выбрать корень. Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Проведем детальный пересчет. В силу изоморфизма между циклом C_n и циклом, полученным из C_n сдвигом всех вершин на произвольную фиксированную константу, можно, не ограничивая общности, считать, что $i = 1$.

Первая часть рассуждений будет касаться случая, когда дерево, соединяющее вершины j и 1 , расположено "справа", то есть содержит $j - 1$ ребро $(1, 2), (2, 3), \dots, (j - 1, j)$.

I. Проведем пересчет для случая, когда в построенном остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$.

1. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$ и нет ребра $(j + 1, j)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j$ вершинах $n, n - 1, \dots, j + 1$; всего $u_{2(n-j)}$ возможностей.

2. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$ и нет ребра $(j + 2, j + 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j - 1$ вершинах $n, n - 1, \dots, j + 2$; всего $u_{2(n-j-1)}$ возможностей.

...

$n - j - 1$. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 3, n - 2)$, и нет ребра $(n - 2, n - 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 2 вершинах $n, n - 1$; всего $u_{2,2}$ возможностей.

$n - j$. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 2, n - 1)$, и нет ребра $(n - 1, n)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса (на самом деле, один лес) пути на 1 вершине n , всего $u_{2,1} = 1$ возможностей.

$n - j + 1$. В остовном корневом лесе нет ребра $(1, n)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., и есть ребро $(n - 1, n)$. В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный осовный лес; одна возможность.

Таким образом, мы получили для случая **I** ровно $u_{2(n-j)} + u_{2(n-j-1)} + \dots + u_4 + u_2 + 1$ возможностей.

II. Проведем пересчет для случая, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$.

1. Рассмотрим случай, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$ и нет ребра $(n, n - 1)$.

1.1. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$ и нет ребра $(j + 1, j)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j - 1$ вершинах $n - 1, \dots, j + 1$; всего $u_{2(n-j-1)}$ возможностей.

1.2. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$ и нет ребра $(j + 2, j + 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n - j - 2$ вершинах $n - 1, \dots, j + 2$; всего $u_{2(n-j-2)}$ возможностей.

...

$1.n - j - 2$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 4, n - 3)$, и нет ребра $(n - 3, n - 2)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 2 вершинах $n - 1, n - 2$; всего $u_{2,2}$ возможностей.

$1.n - j - 1$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 3, n - 2)$, и нет ребра $(n - 2, n - 1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 1 вершине $n - 1$; всего $u_{2,1} = 1$ возможностей.

$1.n - j$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, нет ребра $(n, n - 1)$, есть ребро $(j + 1, j)$, ..., есть ребро $(n - 2, n - 1)$. В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный осовный лес; одна возможность.

Таким образом, мы получили для случая 1 из **II** ровно $u_{2(n-j-1)} + u_{2(n-j-2)} + \dots + u_4 + u_2 + 1$ возможностей.

2. Рассмотрим случай, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, и нет ребра $(n-1, n-2)$.

2.1. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, нет ребра $(n-1, n-2)$, и нет ребра $(j+1, j)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n-j-2$ вершинах $n-2, \dots, j+1$; всего $u_{2(n-j-2)}$ возможностей.

2.2. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, нет ребра $(n-1, n-2)$, есть ребро $(j+1, j)$, и нет ребра $(j+2, j+1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на $n-j-3$ вершинах $n-2, \dots, j+2$; всего $u_{2(n-j-3)}$ возможностей.

...

$2.n-j-3$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, нет ребра $(n-1, n-2)$, есть ребро $(j+1, j)$, ..., есть ребро $(n-5, n-4)$, и нет ребра $(n-4, n-3)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 2 вершинах $n-2, n-3$; всего $u_{2,2}$ возможностей.

$2.n-j-2$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, нет ребра $(n-1, n-2)$, есть ребро $(j+1, j)$, ..., есть ребро $(n-3, n-2)$, и нет ребра $(n-2, n-1)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 1 вершине $n-2$; всего $u_{2,1} = 1$ возможностей.

$2.n-j-1$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, нет ребра $(n-1, n-2)$, есть ребро $(j+1, j)$..., есть ребро $(n-2, n-1)$. В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный осовный лес; одна возможность.

Таким образом, мы получили для случая 2 из **II** ровно $u_{2(n-j-2)} + u_{2(n-j-2)} + \dots + u_4 + u_2 + 1$ возможностей.

...

$n-1$. Рассмотрим случай, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, есть ребро $(n-1, n-2)$, ..., есть ребро $(j+3, j+2)$.

$n-1.1$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, есть ребро $(n-1, n-2)$, ..., есть ребро $(j+3, j+2)$, нет ребра $(j+2, j+1)$, и нет ребра $(j+1, j)$. В этом случае достаточно пересчитать все остовные леса пути на 1 вершине $j+1$; всего $u_{2,1}$ возможностей.

$n-1.2$. В остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, есть ребро $(n-1, n-2)$, ..., есть ребро $(j+3, j+2)$, нет ребра $(j+2, j+1)$, и есть ребро $(j+1, j)$. В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный остовный лес; одна возможность.

Таким образом, мы получили для случая $n-1$ из **II** ровно $u_2 + 1$ возможностей.

n . Рассмотрим случай, когда в построенном остовном корневом лесе есть ребро $(1, n)$, есть ребро $(n, n-1)$, есть ребро $(n-1, n-2)$, ..., есть ребро $(j+2, j+1)$.

В этом случае ничего пересчитывать не нужно, полученное дерево обеспечивает единственный осовный лес; одна возможность.

Просуммировав все возможные количества остовных лесов нашего пересчета, получим:

$$\begin{array}{r}
 u_{2(n-j)} + u_{2(n-j-1)} + u_{2(n-j-2)} + \dots + u_{2,1} + 1 + \\
 \phantom{u_{2(n-j)} +} u_{2(n-j-1)} + u_{2(n-j-2)} + \dots + u_{2,1} + 1 + \\
 \phantom{u_{2(n-j)} + u_{2(n-j-1)} +} \dots \\
 \phantom{u_{2(n-j)} + u_{2(n-j-1)} + u_{2(n-j-2)} + \dots +} u_{2,1} + 1 + \\
 \phantom{u_{2(n-j)} + u_{2(n-j-1)} + u_{2(n-j-2)} + \dots + u_{2,1} +} + 1 = \\
 \hline
 = 1 \cdot u_{2(n-j)} + 2u_{2(n-j-1)} + \dots + (n-j)u_{2,1} + (n-j+1) \cdot 1.
 \end{array}$$

По свойству 5 чисел Фибоначчи

$$1 \cdot u_{2(n-j)} + 2u_{2(n-j-1)} + \dots + (n-j)u_{2,1} + (n-j+1) \cdot 1 = u_{2(n-j+1)}.$$

Производя аналогичные рассуждения в ситуации, когда между 1 и j мы оставляем не $j-1$ ребер "справа", а $n-j+1$ ребер "слева", мы получим, следуя тому же алгоритму, результат $u_{2(j-1)}$.

Поскольку пересчет в случае неориентированного цикла проводится при фиксации либо правого, либо левого дерева между вершинами 1 и j , то окончательный результат для величины f_{1j} принимает вид $u_{2(j-1)} + u_{2(n-j+1)}$.

Поскольку выбор 1 в качестве вершины i был сделан исключительно для удобства оформления результатов подсчета, то окончательный результат для величины $f_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$, принимает вид $u_{2(j-i)} + u_{2(n-j+i)}$, в то время как для случая $f_{ij}, 1 \leq j \leq i \leq n$, получаем, в силу симметричности рассматриваемого графа, величину $u_{2(i-j)} + u_{2(n-i+j)}$. В общем случае результат может быть записан в виде $u_{2|i-j|} + u_{2(n-|i-j|)}$.

Утверждение теоремы полностью доказано. \square

Заметим, что результаты для неориентированного случая были получены в работе Чеботарева П.Ю. [7]. Однако соображения, положенные в основу доказательства, имели значительно более общую природу. Наши результаты получены с использованием простейших методов перечислительной комбинаторики и доказанных нами свойств рекуррентной последовательности чисел Фибоначчи.

6. Заключение

В статье представлены материалы, связанные с перечислением некоторых типов остовных лесов в ориентированных и неориентированных путях и циклах. Выбор перечисляемых объектов обусловлен их значимостью для построения обобщенных метрических конструкций, используемых при анализе стохастических дискретных процессов. Представленные в статье материалы являются естественным продолжением исследований авторов в этой области; их описание можно найти, например, в работе [3].

В качестве перспективного направления дальнейших исследований можно отметить вопросы изучения структуры и количества остовных лесов для более общих типов ориентированных и неориентированных графов, например, дерева общего вида, колеса, графа Петерсона и др. Представляет интерес и задача построения конусов и многогранников рассматриваемых обобщенных метрических структур, заданных на малом числе точек; ее можно реализовать в рамках классической схемы (см., например, [2], [12], [13], [14], [15]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978.
2. Деза М.М., Деза Е.И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2. С. 79 – 92.
3. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметриков // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.
4. Потапов В.Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностных источников. - Новосибирск: НГУ, 1999.
5. Харари Ф. Теория графов. - М.: УРСС, 2003.
6. Chebotarev P. A graph theoretic interpretation of the mean first passage times // arXivpreprint arXiv:math.PR/0701359. 2007.

7. Chebotarev P. Spanning forest and the Golden ratio // *Discrete Applied Mathematics*. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.
8. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics / in F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, *Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013)* // *Lecture Notes in Computer Science*. 2013. LNCS 8085. P. 207–214.
9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // *Linear Algebra and its Applications*. 2002. Vol. 356. P. 253–274.
10. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // *Optimization Letters*. 2020. Vol. 14. P. 291–307. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2>
11. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // *Automation and Remote Control*. 1998. Vol. 59. P. 1443–1459.
12. Deza E., Deza M., Dutour Sikirić *Generalizations of Finite Metrics and Cuts*. - World Scientific, 2016.
13. Deza M., Deza E. Cones of partial metrics // *Contributions to Discrete Mathematics*. 2011. Vol. 6. P. 26–47.
14. Deza M. M., Deza E. *Encyclopedia of Distances*. - Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.
15. Deza M., Deza E., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics / in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010* // *Advances in Algebraic Structures*. 2012. P. 177–197.
16. Kirkland S.J., Neumann M. *Group inverses of M-matrices and their applications*. - CRC Press, 2012.
17. Leighton T., Rivest R.L. The Markov chain tree theorem // *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249*, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass. 1983.
18. Meyer Jr., C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // *SIAM Review*. 1975. Vol. 17. P. 443–464.
19. Wilson W. On quasi-metric spaces // *American Journal of Mathematics*. 1931. Vol. 53. P. 675–684.

REFERENCES

1. Vorobev, N.N. 1978, "Fibonacci numbers", *M.: Nauka*.
2. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79 – 92.
3. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.
4. Potapov, V.N. 1999, "Information Theory. Coding of discrete probabilistic sources", *Novosibirsk: NSU center*.
5. Harari, F. 2003, "Graph Theory", *M.: URSS*.
6. Chebotarev, P. 2007, "A graph theoretic interpretation of the mean first passage times", *arXiv preprint arXiv:math.PR/0701359*.

7. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forest and the Golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, P. 813 – 821.
8. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", in *F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013), Lecture Notes in Computer Science, LNCS 8085*, P. 207–214.
9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253–274.
10. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291–307. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2>
11. Chebotarev, P.Y., Shamis E.V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443–1459.
12. Deza, E., Deza, M., Dutour Sikirić, M. 2016, "Generalizations of Finite Metrics and Cuts," *World Scientific*.
13. Deza, M., Deza, E. 2011, "Cones of partial metrics", *Contributions to Discrete Mathematics*, Vol. 6, P. 26–47.
14. Deza, M. M., Deza, E. 2016, "Encyclopedia of Distances," *Springer, Berlin - Heidelberg*.
15. Deza, M., Deza, E., Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, P. 177–197.
16. Kirkland, S. J., Neumann, M. 2012, "Group inverses of M-matrices and their applications," *CRC Press*.
17. Leighton, T., Rivest, R.L. 1983, "The Markov chain tree theorem", *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass.*
18. Meyer, Jr., C. D. 1975, "The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains", *SIAM Review*, Vol. 17, P. 443–464.
19. Wilson, W. 1931, "On quasi-metric spaces", *American Journal of Mathematics*, Vol. 53, P. 675–684.

Получено 15.05.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.