ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-57-76

# Формула обращения для рядов Дирихле и ее применение

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков

**Громаковская Лариса Александровна** — старший преподаватель, Петрозаводский государственный университет (г. Петрозаводск)
*e-mail: gromac_la@mail.ru*
**Широков Борис Михайлович** — кандидат физико-математических наук, доцент (г. Петрозаводск).
*e-mail: bmshir@mail.ru*

**Аннотация**

Метод контурного интегирования, применяемый для изучения асимптотики сумм коэффициентов рядов Дирихле, основан на формуле обращения. Она позволяет выразить сумму коэффициентов через сумму ряда. Такой подход дает эффективные оценки при условии, что абсцисса абсолютной сходимости ряда $\sigma_a \geqslant 1$. В некоторых случаях при изучении арифметических функций у производящих рядов Дирихле эта величина меньше 1. Например, такая ситуация возникает при изучении распределения значений функции $d(n)$, числа делителей $n$, в классах вычетов по некоторому модулю. Как правило, в этом случае применяется тауберова теорема Деланжа, которая дает только главный член асимптотики для частоты попаданий значений $d(n)$ в классы вычетов. Но производящие ряды обладают лучшими свойствами, чем необходимо для применения этой теоремы. Используя метод контурного интегрирования можно получить более точные результаты. Но для этого необходима формула обращения, которая была бы эффективна для рядов с $\sigma_a < 1$.

В настоящей работе доказывается такая формула обращения, которая применяется для изучения распределения значений функции $d(n)$ в классах вычетов, взаимно простых с модулем. В. Наркевич с помощью теоремы Деланжа получил главный член асимптотики для частоты попаданий значений $d(n)$ в классы вычетов. Примнение формулы обращения, доказанной в этой работе, позволило получить более точный результат.

*Ключевые слова:* Число делителей целого числа, ряды Дирихле, формула обращения.

*Библиография:* 13 названий

**Для цитирования:**
Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Формула обращения для рядов Дирихле и ее применение // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3. С. 57 – 76.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-57-76

# Inversion formula for Dirichlet series and its application

L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov

**Gromakovskaya Larisa Aleksandrovna** — higher instructor, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk).
*e-mail: gromac_la@mail.ru*
**Shirokov Boris Mikhailovich** — candidate of physical and mathematical sciences (Petrozavodsk).
*e-mail: gromac_la@mail.ru*

**Abstract**

A contour integration method, used to study the asymptotic of the sums of coefficients of Dirichlet series, is based on the Inversion formula. It allows you to express the sum of the coefficients in terms of the sum of the series. This approach gives effective estimates if the abscissa of absolute convergence $\sigma_a \geqslant 1$. In some cases, when studying arithmetical functions in generating Dirichlet series, this value is less than 1. As a rule, in this case, the Tauberian Delange theorem, which gives only the main term of asymptotic, is applied. However, generating Dirichlet series have better analytical properties than we need for the Delange theorem application. The contour integration method allows to count on precise results, but it need the inversion formula which is effective for series with $\sigma_a < 1$.

In this paper the such inversion formula is presented and is proved to be an effective tool on examining the distribution of d(n) function values in the residue classes coprim with a module. W. Narkievicz used Delange theorem to obtain the main term of the asymptotic for frequency of hits of the values of function d(n) in residue classes. Application of the inversion formula allowed us to obtain more precise results.

*Keywords:* A number of divisors of integer, Dirichle series, the inversion formula

*Bibliography:* 13 titles

**For citation:**
L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov, 2021, "Inversion formula for Dirichlet series and its application", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 57 – 76.

## 1. Введение

Метод комплексного интегрирования в аналитической теории чисел основан на формуле обращения (см. [1, с. 427] или [2, гл. IV]), которая позволяет выразить сумматорную функцию ряда Дирихле через его сумму. Применение этой формулы эффективно лишь для рядов Дирихле, у которых абсцисса абсолютной сходимости $\sigma_a \geqslant 1$. Но при изучении распределения некоторых мультипликативных функций в классах вычетов, взаимно простых с модулем, у производящих рядов Дирихле абсцисса абсолютной сходимости $\sigma_a < 1$. Такая ситуация сложилась в работе В. Наркевича [3] при выводе асимптотики для частоты попадания значений функции $d(n)$, числа делителей $n$, в классы вычетов по некоторому модулю $N$.

Простой перенос абсциссы абсолютной сходимости влево от единицы при выводе формулы обращения, как это сделано в работах [4] и [5], не решает проблемы, так как при этом появляются ограничения, которые не позволяют применять эту формулу в задаче, о которой речь шла выше.

Введем **основные обозначения**. Пусть $f(n)$ — арифметическая функция; $\varphi(n)$ — функция Эйлера; $p$ и $q$ — простые числа; $j$, $k$, $l$, $n$, $N$ и $r$ — натуральные числа; $x > 1$, $S(x, r, f)$ — количество чисел $n \leqslant x$, для которых $f(n) \equiv r(\bmod N)$, причем если в качестве $f(n)$ берется функция $d(n)$, то эту величину будем обозначать через $S(x, r)$, то есть $S(x, r) = S(x, r, d)$; $\chi$ и $\chi_0$ — произвольный и главный характеры Дирихле по модулю $N$; $m$ — натуральное число, для которого $m + 1$ — наименьшее простое число, не делящее $N$; $G(N)$ — мультипликативная группа вычетов по модулю $N$, взаимно простых с модулем, с умножением по модулю $N$; $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана; $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера; $a = \sigma_a$ — абсцисса абсолютной сходимости ряда, т. е. $a$ — такое число, что ряд из абсолютных величин сходится при $\sigma > a$ и расходится при $\sigma < a$.

Определение 1. *Функция $f(n)$ называется слабо равномерно распределенной по модулю $N$, если множество чисел $n$, для которых $(f(n), N) = 1$, бесконечно и для любых вычетов $r_1$ и $r_2 \in G(N)$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x, r_1, f)}{S(x, r_2, f)} = 1.$$

Нам потребуется следующая теорема.

Теорема В. Наркевича. *Функция $d(n)$ слабо равномерно распределена по модулю $N$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1. $N = 4$;
2. $N = 2 \cdot 3^k,\ (k \geqslant 1)$;
3. $N = q^k,\ q \geqslant 3,\ k \geqslant 1$ *и 2 — первообразный корень по модулю $N$;*
4. $N = 2q^k,\ q \geqslant 5,\ k \geqslant 1$, *и 3 — первообразный корень по модулю $N$*

*Во всех случаях*

$$S(x, r) \sim Cx^{1/m} \tag{1}$$

*с постоянной $C > 0$, не зависящей от $r$.*

Если $m > 1$, то для вывода асимптотики (1) нет возможности опереться на известную формулу обращения, так как для соответствующего производящего ряда Дирихле абсцисса абсолютной сходимости $a = \sigma_a = \dfrac{1}{m} < 1$. Остается только тауберова теорема Деланжа, которая и дает эту асимптотику. Аналогичные результаты приведены в работе [6] для многих арифметических функций. Они также получены с помощью теоремы Деланжа.

Однако, свойства производящих рядов Дирихле, используемых при применении теоремы Деланжа, значительно богаче тех, которые требуются для применения этой теоремы. Путь к их использованию в большинстве случаев отрезает невозможность воспользоваться приближенной формулой Перрона.

В настоящей работе доказывается формула обращения для рядов Дирихле, у которых $a > 0$ (теорема 1), и с ее помощью — теорема о распределении значений $d(n)$, уточняющая формулу В. Наркевича (1).

## 2. Формула обращения

Теорема 1. *Если $a > 0$ и функция $f(n)$ удовлетворяет условиям:*

$$a)\ \sum_n \frac{|f(n)|}{n^a} = O\left(\frac{1}{\sigma - a}\right), \quad \sigma > a; \tag{2}$$

*б) существует такое число $\tau > 0$, что для любых $x$ и $y$, $1 < x < y$,*

$$\sum_{x<n\leqslant y} |f(n)| = O(y^a - x^a) + O(y^{a-\tau}), \tag{3}$$

*то при $\sigma_0 > a$ и $T \geqslant 4$ для ряда*

$$F(s) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it; \tag{4}$$

*справедливо равенство*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s)\frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^a \ln T}{\sqrt{T}}\right) + O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right) + O(x^{a-\tau}\ln T). \tag{5}$$

*(Здесь и далее при обозначении в формуле (4) подразумевается суммирование по всем натуральным числам $n$).*

Доказательство. Обозначим через $\Gamma$ контур, по которому ведется интегрирование в формуле (5). На нем ряд (4) сходится равномерно относительно $t = \operatorname{Im} s$. Умножим обе части равенства (4) на $\dfrac{x^s}{2\pi i s}$ и проинтегрируем по $\Gamma$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma F(s)\frac{x^s}{s} ds = \sum_n \frac{f(n)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Полагая $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{T}}$, обозначим $I_\varepsilon = (x - \varepsilon x, x + \varepsilon x]$. Разобъем сумму на три части:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma F(s)\frac{x^s}{s} ds = \left(\sum_{n\leqslant x-\varepsilon x} + \sum_{n\in I_\varepsilon} + \sum_{n>x+\varepsilon x}\right)\frac{f(n)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}. \tag{6}$$

В интегралах первой суммы замкнем на расширенной плоскости путь интегрирования добавлением двух контуров (рис. 1):

$$\Gamma_l^+\{s = \sigma + it \mid -\infty \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0, t = T\}, \quad \text{и} \quad \Gamma_l^-\{s = \sigma + it \mid -\infty \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0, t = -T\}.$$

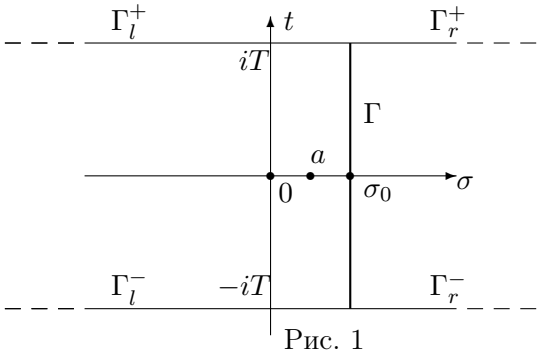

Рис. 1

Внутри образованного замкнутого контура подынтегральная функция мероморфна с единственным простым полюсом $s = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant x-\varepsilon x}\frac{f(n)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n\leqslant x-\varepsilon x} f(n) + O\Big(\sum_{n\leqslant x-\varepsilon x}|f(n)|\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0}\left(\frac{x}{n}\right)^\sigma \frac{d\sigma}{T}\Big) \tag{7}$$

Оценим интеграл в остаточном члене, вычислив его:

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} d\sigma = \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \frac{1}{\ln\dfrac{x}{n}}.$$

Для $n \leqslant (1-\varepsilon)x$ логарифм оценивается снизу следующим образом:

$$\ln\frac{x}{n} \geqslant \ln\frac{1}{1-\varepsilon} > \ln(1+\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{T}}$, в силу условия (2), имеем:

$$\sum_{n\leqslant(1-\varepsilon)x} |f(n)| \int\limits_{-\infty}^{\sigma_0} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T} = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\varepsilon T}\sum_n \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_0}}\right) = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0-a)}\right)$$

Равенство (7) принимает вид

$$\sum_{n\leqslant(1-\varepsilon)x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s} = \sum_{n\leqslant(1-\varepsilon)x} f(n) + O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0-a)}\right) \tag{8}$$

Третья сумма исследуется аналогично. В ее интегралах также замкнем на расширенной плоскости путь интегрирования контурами (рис. 1):

$$\Gamma_r^+\{s=\sigma+it \mid \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \infty, t=T\}, \quad \text{и} \quad \Gamma_r^-\{s=\sigma+it \mid \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \infty, t=-T\}.$$

Внутри образованного замкнутого контура подынтегральная функция регулярна. Следовательно,

$$\sum_{n>x+\varepsilon x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s} = O\left(\sum_{n>x+\varepsilon x} |f(n)| \int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T}\right) \tag{9}$$

Оценим интеграл в остаточном члене:

$$\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} d\sigma = \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \frac{1}{\left|\ln\dfrac{x}{n}\right|}.$$

Для $n > (1+\varepsilon)x$ модуль логарифма оцениваем снизу так:

$$\left|\ln\frac{x}{n}\right| = \ln\frac{n}{x} \geqslant \ln(1+\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти оценки в равенство (9) для третьей суммы, учитывая, что $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{T}}$, и условие (2), получим:

$$\sum_{n>x+\varepsilon x} \frac{f(n)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s} = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\varepsilon T}\sum_n \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_0}}\right) = O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0-a)}\right) \tag{10}$$

Перейдем к оценке второй суммы:

$$\left|\sum_{n\in I_\varepsilon} \frac{f(n)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^{s} \frac{ds}{s}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in I_\varepsilon} |f(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma_0} \int\limits_{-T}^{T} \frac{dt}{|s|}.$$

В этой сумме $n$ удовлетворяет неравенству $(1-\varepsilon)x < n \leqslant (1+\varepsilon)x$. Поэтому

$$\frac{x}{n} < \frac{1}{1-\varepsilon} \leqslant 2,$$

если $T \geqslant 4$. Для переменной $s$ справедливо классическое неравенство $|s| \geqslant \dfrac{|t|+\sigma_0}{2}$. В условии (3) в качестве $x$ возьмем $(1-\varepsilon)x$, а в качестве $y$ — $(1+\varepsilon)x$. Тогда для второй суммы с некоторой постоянной $C > 0$ имеем оценку:

$$\left| \sum_{n\in I_\varepsilon} \frac{f(n)}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln T \sum_{n\in I_\varepsilon} |f(n)| \leqslant C \ln T \left[ \left((1+\varepsilon)^a - (1-\varepsilon)^a\right) x^a + x^{a-\tau} \right]$$

Используя неравенство: $(1+\varepsilon)^a - (1-\varepsilon)^a \leqslant 4a\varepsilon$, приходим к оценке второй суммы:

$$\left| \sum_{n\in I_\varepsilon} \frac{f(n)}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| = O\left(\frac{x^a \ln T}{\sqrt{T}}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T). \tag{11}$$

Заметим, что, избегая вычисления интегралов во второй сумме, мы потеряли часть сумматорной функции с номерами $n$, удовлетворяющими неравенству $(1-\varepsilon)x < n \leqslant x$. Этот пробел восстанавливается с помощью условия (3):

$$\Big| \sum_{(1-\varepsilon)x<n\leqslant x} f(n) \Big| \leqslant \sum_{x\in I_\varepsilon} |f(n)| = O\left(\frac{x^a}{\sqrt{T}}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T).$$

Используя полученное неравенство и формулы (6), (8), (10) и (11), находим, что

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{\sigma_0}}{\sqrt{T}(\sigma_0 - a)}\right) + O\left(\frac{x^a \ln T}{\sqrt{T}}\right) + O(x^{a-\tau} \ln T).$$

Доказательство теоремы завершено.□

## 3. Распределение значений $d(n)$ в классах вычетов

Введем дополнительные обозначения. Пусть $\delta = \dfrac{1}{\ln x}$; $T = e^{\sqrt{\ln x}}$; для некоторых постоянных величин $0 < c_0 \leqslant 1/2$ и $a > 0$ определим функцию $\sigma_a(t)$ и область $\Omega_a$:

$$\sigma_a(t) = \begin{cases} a\Big(1 - \dfrac{c_0}{\ln(2+|t|)}\Big), & |t| > e-2, \\ a(1-c_0), & |t| \leqslant e-2, \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty; \quad \Omega_a = \{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_a(t)\},$$

причем постоянную $c_0$ выберем так, чтобы функция $\zeta(s/a)$ не имела нулей в области $\Omega_a$, что возможно на основании теоремы Валле — Пуссена ([2, с. 40]); $\tau = \dfrac{ac_0}{\ln(2+T)}$; $L$ — кривая, состоящая из двух отрезков $\{s \mid -\tau \ln x \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 0,\ t = \pm 1\}$ и полуокружности $C_1^+(0) = \{s \mid |s| = 1,\ \operatorname{Re} s \geqslant 0\}$ и в качестве положительной ориентации выбираем движение против часовой стрелки; $\alpha_m(\chi) = \chi(m+1)$; $\theta(x) = 1$ для $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ для $x \leqslant 0$;

$$F(s,\chi) = \sum_n \frac{\chi(d(n))}{n^s}.$$

Теорема 2. *Если $d(n)$ слабо равномерно распределена по модулю $N$, то для любого вычета $r \in G(N)$ с некоторой постоянной $C_N$, зависящей только от $N$, и для любого досточно большого числа $x$ справедливы следующие утверждения:*

*а) если модуль $N$ равен 3, 4 или 6, то для некоторого числа $\beta$, $0 < \beta < 1/2$,*

$$S(x,r) = C_N x^{1/m} + O(x^{1/m} e^{-\beta\sqrt{\ln x}});$$

*б) если модуль $N$ не принимает значений 3, 4 или 6, то*

$$S(x,r) = C_N x^{1/m} + \frac{x^{1/m}}{\varphi(N)} \sum_{\chi^2 \neq \chi_0} \frac{\overline{\chi}(r)}{(\ln x)^{1-\alpha_m(\chi)}} \Phi(x,\chi) + O(x^{1/m} e^{-\beta\sqrt{\ln x}}).$$

*где $\Phi(x,\chi)$ — сумма особого ряда,*

$$\Phi(x,\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(\chi)}{\ln^j x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L e^{\zeta} \zeta^{j-z} d\zeta,$$

*$a_j(\chi)$ — — коэффициенты Тейлора функции $F(s,\chi)(s-1/m)^{\alpha_m(\chi)}$ в точке $s = 1/m$.*

Следствие 1. *Если $N$ не равно 3, 4 или 6, то для любого натурального числа $n$ при достаточно большом $x$*

$$S(x,r) = C_N x^{1/m} + \frac{x^{1/m}}{\varphi(N)} \sum_{\chi^2 \neq \chi_0} \frac{\overline{\chi}(r)}{(\ln x)^{1-\alpha_m(\chi)}} \left( \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j(\chi)}{(\ln x)^j (\Gamma(\alpha_m(\chi) - j)} + \right.$$
$$\left. + O\left( \frac{1}{(\ln x)^{n+2-\operatorname{Re}\alpha_m(\chi)}} \right) \right),$$

Для доказательства нам потребуется следующая лемма. Обозначим (рис. 2 и 3)

$$\Gamma_0 = \{ s = \sigma + it \mid \sigma = a + 2\delta,\ |t| \leqslant T \}.$$

Лемма 1. *Пусть $G(s)$ — регулярная в области $\Omega_a$ функция, $G(a) \neq 0$, и для некоторого комплексного числа $z$*

$$F(s) = \frac{G(s)}{(s-a)^z},$$

*причем, для $\ln(s-a)$ выбирается главная ветвь.*

*Если существует такая постоянная $B > 0$, что для $s \in \Omega_a$ выполняется условие*

$$F(s) = O(\ln^B(|t|)), \qquad |t| \geqslant 2, \tag{12}$$

*то при достаточно большом $x$*

*а) если $z = 1, 0, -1, -2, \ldots$, то существует такая постоянная $\beta \in (0,1)$, что*

$$I(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \theta(z) \frac{G(a)}{a} x^{\alpha} + O\big(x^a e^{-\beta\sqrt{\ln x}}\big);$$

*б) если $z$ не является целым рациональным числом и $|z| \leqslant 1$[1], то $\exists\, \beta \in (0,1)$, что*

$$I(x) = \frac{x^{\alpha}}{(\ln x)^{1-z}} \Phi(x) + O(x^a e^{-\beta\sqrt{\ln x}}),$$

[1]Лемма спрведлива и без ограничений на $z$ по величине в обоих пунктах, но с ними доказательство избавлено от стандартных вычислений, и в полной общности лемма не нужна для наших целей.

*где* $\Phi(x)$ *— сумма особого ряда*

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\ln^j x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L e^{\zeta} \zeta^{j-z} d\zeta,$$

$a_j$ *— коэффициенты Тейлора функции* $G(s)s^{-1}$ *в точке* $s = a$.

Доказательство. а) Пусть $z$ — целое рациональное число, не превосходящее 1, и $T > 2$. Введем следующие обозначения для контуров (рис. 2):

$$\Gamma_1^+(\Gamma_1^-) = \{s \mid \sigma(T) \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0,\ t = T(t = -T)\}, \quad \Gamma_2 = \{s \mid \sigma = \sigma(T),\ -T \leqslant t \leqslant T\}$$

и $\Gamma$ — замкнутый прямоугольник: $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1^-$. Если $z < 1$, то подынтегральная функция в интеграле $I(x)$ регулярна внутри $\Gamma$. При $z = 1$ она имеет там единственный простой полюс с вычетом, равным $G(a)a^{-1}x^a$. По теореме Коши

$$I(x) = \theta(z)x^a \frac{G(a)}{a} + O\left(\left|\left(\int\limits_{\Gamma_1^+} + \int\limits_{\Gamma_2}\right) F(s)\frac{x^s}{s} ds\right|\right).$$

Интеграл по $\Gamma_1^-$ в остаточном члене отсутствует потому, что он отличается от интеграла по $\Gamma_1^+$ знаком при $i$.

В виду неравенств (12) и $|s| \geqslant T$, на $\Gamma_1^+$ имеем:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1^+} F(s)\frac{x^s}{s} ds\right| = O\left(\frac{\ln^B T}{T} \int\limits_{\sigma(T)}^{\sigma_0} x^{\sigma} d\sigma\right) = O\left(\frac{x^a (\ln x)^{(B-2)/2}}{T}\right). \tag{13}$$

Интеграл по $\Gamma_2$ оценивается следующим образом. Пусть $x \geqslant 4$. Тогда $T > e$. Выберем $\lambda \in (\sigma_a(2), \sigma_a(T))$ и положим $M = \max\limits_{|t| \leqslant 2,\ \lambda \leqslant \sigma \leqslant a} |G(s)|$. Если $|t| \leqslant 2$, то $|F(s)| \leqslant M$ при $z \leqslant 0$ и $|F(s)| \leqslant \dfrac{M}{ac_0} \ln(T+2)$ при $z = 1$. Кроме того,

$$|s| \geqslant a - \frac{ac_0}{\ln(T+2)} \geqslant a - \frac{ac_0}{\ln T} = a - \frac{ac_0}{\sqrt{\ln x}} \geqslant \frac{a}{2}.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_2} F(s)\frac{x^s}{s} ds\right| \leqslant 2x^{\sigma(T)} \int\limits_0^2 |F(s)| dt + 2x^{\sigma(T)} \int\limits_2^T |F(s)| \frac{dt}{t} = O\big((\ln T)^{B+1} x^{\sigma(T)}\big).$$

Оценим величину $x^{\sigma(T)} = x^a e^{ac_0 \ln x / \ln(T+2)}$. Показатель степени числа $e$ согласно обозначению на с. 62 равен:

$$\tau \ln x = \frac{ac_0 \ln x}{\ln(T+2)} = \frac{ac_0 \ln x}{\ln T + \ln(1 + 2/T)} \geqslant \frac{ac_0 \ln x}{\ln T + \dfrac{2}{T}} = \frac{ac_0\sqrt{\ln x}}{1 + \dfrac{2}{T \ln T}} \geqslant (1-\varepsilon)ac_0\sqrt{\ln x}, \tag{14}$$

где $\varepsilon$ — любое число, удовлетворяющее неравенству $1 > \varepsilon \geqslant \dfrac{2}{T \ln T}$. Таким образом, полагая $c_1 = ac_0(1-\varepsilon)$, получим: $0 < c_1 < 1$ и

$$x^{\sigma(T)} \leqslant x^a e^{-c_1\sqrt{\ln x}} = \frac{x^a}{T^{c_1}}.$$

В итоге, для интеграла по контуру $\Gamma_2$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Gamma_2} F(s)\frac{x^s}{s}ds = O\left(\frac{x^a(\ln x)^{(B+1)/2}}{T^{c_1}}\right).$$

Используя оценку (13), получаем:

$$I(x) = \theta(z)x^a\frac{G(a)}{a} + O\left(\frac{x^a(\ln x)^{(B+1)/2}}{T^{c_1}}\right).$$

Так как для любого числа $C > 0$ величина $\ln^C x = o(e^{\sqrt{\ln x}})$, то для любого числа $\beta$, удовлетворяющего неравенсвту $0 < \beta < c_1$, получим:

$$I(x) = \theta(z)x^\alpha\frac{G(\alpha)}{\alpha} + O(x^\alpha e^{-\beta\sqrt{\ln x}}).$$

б) Пусть теперь $z$ не является целым рациональным числом. Контур $\Gamma_0$ в интеграле дополним контурами $\Gamma_1^+$ и $\Gamma_1^-$ (рис. 3) такими же, как и в случае а); контурами $L_\delta^+$ и $L_\delta^-$, у которых $\sigma = \sigma(T)$, $\delta \leqslant t \leqslant T$ и $-T \leqslant t \leqslant -\delta$ соответственно; контурами $\gamma^+$ и $\gamma^-$: $\sigma(T) \leqslant \sigma \leqslant a$, $t = \delta$ и $t = -\delta$ соответственно, и замкнем контур полуокружностью $C_\delta^+(a)$, $\sigma \geqslant a$. Так образованный замкнутый контур обозначим через $\Gamma$. Для краткости контур, состоящий из полуокружности $C_\delta^+(\alpha)$ и прилегающих к ней отрезков $\gamma^+$ и $\gamma^-$, обозначим через $L'$. При достаточно большом $x$ контур $L'$ лежит в круге аналитичности функции $\dfrac{G(s)}{s}$ с центром в точке $s = a$. Внутри контура $\Gamma$ функция $F(s)\dfrac{x^s}{s}$ регулярна и по теореме Коши интеграл по

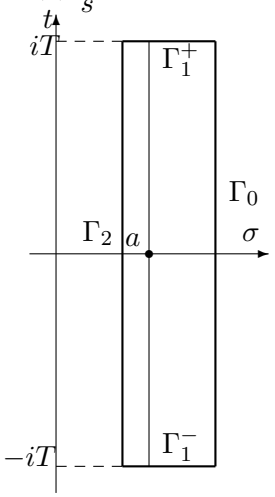

Рис. 2

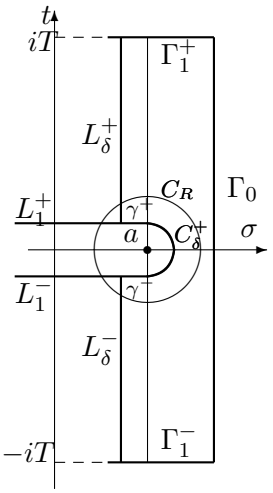

Рис. 3

контуру $\Gamma$ от нее равен 0. Теперь $I(x)$ имеет представление

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} F(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\left|\left(\int\limits_{\Gamma_1^+} + \int\limits_{L_\delta^+}\right)F(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\right), \tag{15}$$

причем контур $L'$ ориентирован против часовой стрелки. Для интеграла по $\Gamma_1^+$ оценка уже дана формулой (13). Интеграл по $L_\delta^+$ оценивается так же, как и интеграл по $\Gamma_2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\delta^+} F(s)\frac{x^s}{s}ds = O\big(x^a e^{-\beta\sqrt{\ln x}}\big). \tag{16}$$

Существует замкнутый круг $\overline{K}_R$ радиусом $R > |\sigma(T) + i\delta - a|$ с центром в точке $s = a$, содержащийся в области аналитичности функции $G(s)s^{-1}$, и $L' \subset K_R \subset \Omega_a$. Поэтому для $s \in L'$

$$\frac{G(s)}{s} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s-\alpha)^k, \tag{17}$$

где $a_k$ — коэффициенты Тейлора функции $G(s)s^{-1}$. Ряд в формуле (17) сходится равномерно на контуре $L'$. Умножим обе части этого равенства на $\dfrac{x^s(s-a)^{-z}}{2\pi i}$, проинтегрируем его по $L'$, причем, ряд почленно, и получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} F(s)\frac{x^s}{s}ds = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2\pi i}\int\limits_{L'} x^s(s-a)^{k-z}ds.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной интегрирования $s = a + \delta\zeta$. Так как $\delta = \ln^{-1} x$, то $x^s = x^a e^{\zeta}$, и контур $L'$ перейдет в контур $L$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} F(s)\frac{x^s}{s}ds = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{(\ln x)^{k+1-z}}\cdot\frac{x^a}{2\pi i}\int\limits_{L} e^{\zeta}\zeta^{k-z}d\zeta = \frac{1}{(\ln x)^{1-z}}\Phi(x). \tag{18}$$

Из формул (13), (15) и (18) получим утверждение леммы. Лемма доказана.□

Доказательство теоремы 2. Пусть $r$ — произвольный вычет из $G(N)$ и $\omega(n)$ — индикатор класса $r + lN$, т. е. $\omega(n) = 1$, если $n \equiv r(\bmod N)$, и $\omega(n) = 0$ в противном случае. Тогда

$$S(x,r) = \sum_{n\leqslant x}\omega(d(n)).$$

Свойства ортогональности характеров Дирихле ([2, с. 94]) позволяют представить $\omega(n)$ в виде

$$\omega(n) = \frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi(\bmod N)}\overline{\chi}(r)\chi(n),$$

где суммирование ведется по всем характерам модуля $N$. Следовательно,

$$S(x,r) = \frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(r)\sum_{n\leqslant x}\chi(d(n)). \tag{19}$$

Таким образом, задача сводится к изучению асимптотики суммы

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(d(n)),$$

которая называется сумматорной функцией производящего ряда Дирихле

$$F(s,\chi) = \sum_{n}\frac{\chi(d(n))}{n^s}. \tag{20}$$

Далее, доказательство проводим в два шага: 1-й шаг — представление сумматорной функции ряда (20) с помощью теоремы 1 через интеграл

$$I(x,\chi) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} F(s,\chi)\frac{x^s}{s}ds.$$

2-й шаг — вывод для $I(x,\chi)$ асимптотики с помощью леммы 1. Завершается доказательство подстановкой полученных в результате двух шагов асимптотик в формулу (19).

Проверим возможность применения теоремы 1. Сначала нам предстоит найти абсциссу $a$ абсолютной сходимости ряда (20). По крайней мере, для $\sigma > 1$ можно применить формулу Эйлера:

$$\sum_n \left|\frac{\chi(d(n))}{n^s}\right| = \sum_n \frac{\chi_0(d(n))}{n^\sigma} = \prod_p \left(1 + \sum_k \frac{\chi_0(k+1)}{p^{k\sigma}}\right). \tag{21}$$

Если $k < m$, то $\chi_0(k+1) = 0$. Для ряда под знаком произведения справедливо неравенство

$$\sum_k \frac{\chi_0(k+1)}{p^{k\sigma}} \leqslant \sum_{k\geqslant m} \frac{1}{p^{k\sigma}}.$$

При $\sigma > 1/m$ последний ряд сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\chi_0(d(n))}{n^\sigma} \leqslant \prod_{p\leqslant x}\left(1 + \sum_{k\geqslant m}\frac{1}{p^{k\sigma}}\right) \leqslant \prod_p \left(1 + \sum_{k\geqslant m}\frac{1}{p^{k\sigma}}\right) < +\infty.$$

Следовательно, $a \leqslant 1/m$. С другой стороны, при $\sigma \to 1/m + 0$

$$\sum_n \frac{\chi_0(d(n))}{n^\sigma} = \prod_p \left(1 + \sum_k \frac{\chi_0(k+1)}{p^{k\sigma}}\right) \geqslant \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{m\sigma}}\right) \to +\infty.$$

Значит, $a \geqslant 1/m$. Итак, абсцисса абсолютной сходимости ряда (20) $a = 1/m$.

Следовательно, для $\sigma > 1/m$ справедливо равенство

$$F(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \sum_{k\geqslant m} \frac{\chi(k+1)}{p^{ks}}\right).$$

Обозначим $p^{-s} = z$, $\chi(m+1) = \alpha$ и произвольный член произведения через $F_p(z)$. Представим его в виде

$$F_p = 1 + \alpha z^m + A_m(z),$$

обозначая

$$A_m(z) = \sum_{k\geqslant m+1} \chi(k+1) z^k.$$

Если $|z| < 1$, то для этой функции справедливо неравенство

$$|A_m(z)| \leqslant \frac{|z|^{m+1}}{1-|z|}. \tag{22}$$

Чтобы уяснить поведение функции $F(s,\chi)$ в окрестности точки $s = a$, умножим и разделим каждый член произведения на функцию $(1-|z|^m)^\alpha$, предварительно преобразовав ее следующим образом:

$$(1-|z|^m)^\alpha = 1 - \alpha z^m + B_m(z),$$

где

$$B_m(z) = \sum_{k\geqslant 2} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} |z|^{km} (-1)^k.$$

Если $|z| < 1$, то

$$|B_m(z)| \leqslant \frac{|z|^{2m}}{1-|z|^m}. \tag{23}$$

Член произведения $F_p$ примет вид:

$$F_p = \frac{(1+\alpha z^m + A_m(z))(1-\alpha z^m + B_m(z))}{(1-z^m)^\alpha} = \frac{1+C_m(z,\chi)}{(1-z^m)^\alpha}$$

где

$$C_m(z,\chi) = -\alpha^2 z^{2m} + (1+\alpha z^m)B_m(z) + (1-\alpha z^m)A_m(z) + A_m B_m.$$

Оценим эту функцию для $z$, удовлетворяющих неравенству $|z| \leqslant 1/2$, опираясь на оценки (22) и (23). Так как $|z|^{2m} \leqslant |z|^{m+1}$, $\dfrac{|z|}{1-|z|} \leqslant 1$ и $|\alpha| \leqslant 1$ ,

$$|C_m(z,\chi)| \leqslant |z|^{m+1}\left(1 + \frac{4}{1-|z|} + \left(\frac{|z|}{1-|z|}\right)^2\right) \leqslant 10|z|^{m+1}. \tag{24}$$

Обозначим

$$H(s,\chi) = \prod_p \left(1 + C_m\Big(\frac{1}{p^s},\chi\Big)\right).$$

Функция $F(s,\chi)$ для $\sigma > 1/m$ принимает вид

$$F(s,\chi) = \zeta^\alpha(ms)H(s,\chi), \tag{25}$$

причем для $\ln\zeta(ms)$ выбираем главную ветвь, т. е. ту, для которой $|\arg\zeta(ms)| \leqslant \pi$.

Покажем, что функция $H(s,\chi)$ регулярна в области $\sigma > 1/(m+1)$ и ограничена в полуплоскости $\sigma \geqslant 1/(m+1)+\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть на области $G_\tau = \{\sigma > \tau\}$ задана последовательность регулярных в ней функций $u_n(s) \neq -1$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность положительных чисел $a_n$, что для любого $n$ и любого $s$ с условием $\operatorname{Re} s \geqslant \tau + \varepsilon$ справедливо неравенство $|u_n(s)| \leqslant a_n$ и числовой ряд с членами $a_n$ сходится. Тогда в области $G_\tau$ абсолютно сходится произведение*

$$u(s) = \prod_n (1+u_n(s)),$$

*а функция $u(s)$ регулярна в области $G_\tau$ и ограничена при $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$.*

Доказательство. Можно считать, что $a_n < 1$. Покажем, что ряд

$$\sum_n \ln(1+u_n(s)) \tag{26}$$

сходится равномерно при $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, если у логарифма закреплена главная ветвь. Пусть выбраны $\varepsilon > 0$ и такая последовательность чисел $a_n$, что $|u_n(s)| \leqslant a_n$ при $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$. Существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|\ln|1+u_n(s)|| \leqslant M a_n.$$

Действительно, если $|1+u_n(s)| \geqslant 1$, то $|\ln|1+u_n(s)|| \leqslant \ln(1+|u_n|) \leqslant |u_n| \leqslant a_n$. Если $|1+u_n| < 1$, то

$$|\ln|1+u_n(s)|| = \ln\frac{1}{|1+u_n|)} \leqslant \ln\left(1+\frac{|u_n|}{1-|u_n|}\right) \leqslant \frac{|u_n|}{1-|u_n|} \leqslant \frac{a_n}{1-a_n} \leqslant M a_n,$$

так как величина $(1-a_n)^{-1}$ ограничена. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_n \ln|1+u_n(s)|$ равномерно сходится при $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$.

В виду того, что выбрана главная ветвь логарифма и $|u_n(s)|<1$, имеем:

$$|\arg(1+u_n(s))| \leqslant \arcsin|u_n(s)| \leqslant \frac{\pi}{2}|u_n(s)| \leqslant \frac{\pi}{2}a_n.$$

Из этого неравенства и условий леммы следует, что ряд $\sum_n \arg(1+u_n(s))$ сходится равномерно при $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$. Таким образом, ряд (26) сходится равномерно на этой полуплоскости. Так как для любого компакта $K \subset G_\tau$ существует такое $\varepsilon>0$, что $K$, содержится в полуплоскости $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$, по теореме Вейерштрасса функция $\ln u(s)$ регулярна в области $G_\tau$. Следовательно, регулярна там и функция $u(s)$.

Ограниченность $u(s)$ при $\sigma \geqslant \tau+\varepsilon$ следует из цепочки неравенств

$$|u(s)| = \prod_n |1+u_n(s)| \leqslant \prod_n (1+|u(s)|) \leqslant \prod_n (1+a_n).$$

Лемма доказана. □

Из определения функции $C_m(z,\chi)$ видно, что она регулярна в круге $|z|<1$. Тогда функция $C_m(p^{-s},\chi)$ регулярна в полуплоскости $\sigma>0$ и ограничена при $\sigma \geqslant \varepsilon>0$.

Из неравенства (24) следует, что если $p>10$, то $C_m(p^{-\sigma},\chi) \neq -1$ для $\sigma > 1/(m+1)$, а ряд

$$\sum_{p>10} C_m\left(\frac{1}{p^\sigma},\chi\right)$$

сходится абсолютно для $\sigma \geqslant \dfrac{1+\varepsilon}{1+m}$ при любом $\varepsilon>0$. На основании леммы 2 произведение функций $1+C_m(p^{-s},\chi)$ по простым $p>10$ представляет собой регулярную в области $\sigma>1/(m+1)$ функцию, ограниченную в полуплоскости $\sigma \geqslant 1/(m+1)+\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$. Функция $H(s,\chi)$ отличается от этого произведения четырьмя множителями, регулярными в полуплоскости $\sigma>0$, поэтому обладает перечисленными выше свойствами.

Так как $\zeta(\sigma) = O((\sigma-1)^{-1})$ для $\sigma>1$, а функция $H(s,\chi)$ регулярна в точке $s=1/m$, справедлива оценка

$$\sum_n \left|\frac{\chi(d(n))}{n^s}\right| = F(\sigma,\chi_0) = \zeta(m\sigma)H(\sigma,\chi_0) = O\left(\frac{1}{\sigma-1/m}\right).$$

Значит, функция $F(s,\chi)$ уловлетворяет условию (2) теоремы 1.

Перейдем к проверке условия (3). Если $m=1$, то оно очевидно. Действительно,

$$\sum_{x<n\leqslant y} |\chi(d(n))| \leqslant \sum_{x<n\leqslant y} 1 = y-x+O(1).$$

Далее считаем, что $m \geqslant 2$. Введем дополнительные обозначения: $u(n)$ — мультипликативная функция, равная 0, если $n$ — $m$-свободное число, т. е. не делящееся на $p^m$ для любого $p$, и 1 в противном случае; $U(s)$ — сумма ее ряда Дирихле; $g(n)$ — коэффициенты ряда Дирихле с суммой $\zeta(ms)$, т. е. $g(n)=1$, если $n=l^m$, и $g(n)=0$, если $n \neq l^m$. Пусть функция $V(s)$ определена равенством

$$V(s) = U(s)\zeta^{-1}(ms) \tag{27}$$

и $v(n)$ — мультипликативная функция, для которой

$$\sum_n \frac{v(n)}{n^s} = V(s). \tag{28}$$

Этот ряд абсолютно сходится при $\sigma > 1/(m+1)$. Действительно, по определению для $\sigma > 1$

$$V(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{ms}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{ms}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}\right)$$

Преобразуем произвольный член произведения, обозначая $z = p^{-s}$. Так как $|z| < 1$, его можно записать в виде

$$(1 - z^m)\Big(1 + z^m + \frac{z^{m+1}}{1-z}\Big) = 1 - z^{2m} + z^{m+1}\frac{1-z^m}{1-z} = 1 + \sum_{k=m+1}^{2m} z^k.$$

Итак,

$$V(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^{(m+1)s}} + \frac{1}{p^{(m+2)s}} + \cdots + \frac{1}{p^{2ms}}\Big).$$

Это произведение абсолютно сходится при $\sigma > 1/(m+1)$, причем, $v(n) \geqslant 0$ и

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{v(n)}{n^\sigma} \leqslant \prod_{p\leqslant x}\left(1 + \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{p^{k\sigma}}\right) \leqslant V(\sigma).$$

Из этого неравенства следует сходимость ряда (28) при $\sigma > 1/(m+1)$.

Далее, для $a = 1/m$ и $0 < \tau < \dfrac{1}{m(m+1)}$ имеем неравенство

$$\sum_{n\leqslant x} v(n) \leqslant x^{a-\tau} \sum_{n\leqslant x} \frac{v(n)}{n^{a-\tau}} \leqslant V(a-\tau)x^{a-\tau}. \tag{29}$$

Из равенства (27) следует, что $u(n)$ — свертка по делителям функций $v(n)$ и $g(n)$. Поэтому

$$\sum_{n\leqslant x} u(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} v(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d\leqslant x} v(d) \sum_{k\leqslant x/d} g(k).$$

Для функции $g(n)$ справедливо равенство

$$\sum_{k\leqslant y} g(k) = \sum_{l^m\leqslant y} 1 = y^a + O(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant x} u(n) = x^a \sum_{n\leqslant x} \frac{v(d)}{d^a} + O\Big(\sum_{n\leqslant x} v(n)\Big) = V(a)x^a + O\left(\sum_{n\leqslant x} v(n) + x^a \sum_{n>x} \frac{v(d)}{d^a}\right).$$

Остаток ряда оценим следующим образом. Так как $a - \tau > 1/(m+1)$,

$$\sum_{n>x} \frac{v(d)}{d^a} \leqslant \frac{1}{x^\tau} \sum_{d>x} \frac{v(d)}{d^{a-\tau}} < V(d-\tau)x^{-\tau}.$$

Используя неравентво (29), получим

$$\sum_{n\leqslant x} u(n) = V(a)x^a + O(x^{a-\tau}).$$

Теперь можем убедиться в выполнимости условия (3) теоремы 1:

$$\sum_{x<n\leqslant y} |\chi(d(n))| \leqslant \sum_{x<n\leqslant y} u(n) = V(a)(y^a - x^a) + O(y^{a-\tau}).$$

Применяя теорему 1 к ряду (20) при $a = 1/m$, получим:

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(d(n)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} F(s,\chi)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^a \ln x}{\sqrt{T}}\right) = I(x,\chi) + O\left(\frac{x^a \ln x}{\sqrt{T}}\right). \tag{30}$$

К интегралу $I(x,\chi)$ применим лемму 1. Определим функцию $G(s,\chi)$ следующим образом:

$$G(s,\chi) = \Big(\zeta(ms)\Big(s-a\Big)\Big)^{\alpha} H(s,\chi), \quad a = \frac{1}{m}. \tag{31}$$

Область $\Omega_a$ построена так, что целая функция $\zeta(ms)(s-a)$ не имеет в ней нулей. Поэтому функция $(\zeta(ms)(s-a))^{\alpha}$ регулярна в $\Omega_a$. Чтобы функция $G(s,\chi)$ была регулярна в этой области, нужно обеспечить регулярность в ней множителя $H(s,\chi)$, регулярного в полуплоскости $\sigma > 1/(m+1)$. Для этого выберем $c_0$ так, чтобы выполнялось включение $\Omega_a \subset \{\sigma \geqslant 1/(m+1)\}$, что равносильно неравенству $1 - c_0 \geqslant \dfrac{m}{m+1}$, т. е.

$$c_0 \leqslant \frac{1}{m+1}. \tag{32}$$

Из формул (25) и (31) следует, что для $\sigma > a$

$$F(s,\chi) = \frac{G(s,\chi)}{(s-a)^{\alpha}}, \quad a = \frac{1}{m}, \tag{33}$$

с показателем $z = \alpha = \chi(m+1)$, причем для $\ln(s-a)$ выбираем главную ветвь.

Для выполнения первого условия леммы нужно еще установить, что $G(1/m,\chi) \neq 0$. Так как

$$\lim_{s\to 1/m} \zeta(ms)\left(s - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m},$$

нужно доказать, что $H(1/m,\chi) \neq 0$. Достаточно убедиться, что $1+C_m(p^{1/m},\chi) \neq 0$ для любого $p$, так как в этом случае произведение, представляющее $H(1/m,\chi)$, абсолютно сходится. Но равенство $1 + C_m(p^{1/m},\chi) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда

$$1 + \sum_k \frac{\chi(k+1)}{p^{k/m}} = 0. \tag{34}$$

Чтобы убедиться, что это равенство невозможно при любом $p$, нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 3. *Пусть $a_i = \pm\chi(n_i)$, $i = 1,\dots,n$, для некоторых целых $n_i$. Тогда для любого натурального числа $m$ число $x_0 = p^{-1/m}$ не является корнем многочлена*

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

*для любого простого числа $p$.*

Доказательство. Пусть $x_0$ — корень многочлена $P_n(x)$. Обозначим через $r$ наименьшее общее кратное $\varphi(N)$ и $m$. Тогда $x_0$ — целое число над полем $K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/r})$ и принадлежит нормальному расширению $K(x_0)$ поля $\mathbb{Q}$, причем является делителем единицы этого поля. Поэтому его норма над полем $\mathbb{Q}$ равна $\pm 1$. С другой стороны, минимальный многочлен $x_0$ над $\mathbb{Q}$ есть $x^m - p^{-1}$. Следовательно норма $x_0$ над $\mathbb{Q}$ равна $(1/p)^{r/m}$ (см. ([10, с. 460], или [11, с. 173], или [12, с. 239]). Полученное противоречие доказывает лемму.□

Рассмотрим равенство (34). Любое целое число $k \geqslant 0$ можно представить в виде $k = r + lN$, $0 \leqslant r \leqslant N-1$, $0 \leqslant l < \infty$. Тогда равенство (34) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(k+1)}{p^{k/m}} = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\chi(r+1+lN)}{p^{(r+lN)/m}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(p^{N/m})^l} \sum_{r=0}^{N-1} \chi(r+1)(p^{-1/m})^r = 0.$$

Это равенство означает, что многочлен

$$P_{N-1}(x) = \sum_{r=0}^{N-1} \chi(r+1)x^r$$

имеет корень $x_0 = p^{-1/m}$. Но лемма 3 утверждает, что это невозможно.

Проверим условие (12). Достаточно считать, что $t \geqslant 0$. Выше было показано, что если постоянная $c_0$ удовлетворяет неравентву (32), то область $\Omega_a$ лежит в полуплоскости $\sigma \geqslant 1/(m+1)$. Если $\sigma \geqslant \sigma_a(t)$ и $t \geqslant 3$, то

$$\sigma \geqslant \frac{1}{m}\left(1 - \frac{c_0}{\ln 5}\right) \geqslant \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{(m+1)\ln 5}\right) = \sigma_1 > \frac{1}{m+1},$$

т. е. часть области $\Omega_a$ с $t \geqslant 3$, содержится в полуплоскости $\{\sigma \geqslant \sigma_1\}$ с $\sigma_1 > 1/(m+1)$, где функция $H(s, \chi)$ ограничена.

Остается проверить оценку для $\zeta^{\alpha}(ms)$ при $\alpha = \chi(m+1)$.

Пусть $\alpha = \xi + i\eta$ и $\arg \zeta(ms) = \varphi$, причем $|\varphi| \leqslant \pi$, так как мы выбираем главную ветвь $\ln \zeta(ms)$. Существуют такие постоянные $A > 0$ и $c_0 > 0$, что справедливо утверждение [1, с. 75 и 83]:

$$\text{если} \quad \sigma \geqslant \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{c_0}{\ln t}\right\}, \quad t \geqslant 3, \quad \text{то} \quad \zeta^{\pm 1}(s) = O(\ln^A t). \tag{35}$$

Пусть $s \in \Omega_a$, $a = 1/m$ и $t \geqslant 3$. Тогда

$$m\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{\ln(t+2)} \geqslant 1 - \frac{c_0}{\ln t}, \quad \text{и} \quad 1 - \frac{c_0}{\ln(t+2)} \geqslant 1 - \frac{c_0}{(m+1)\ln 5} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в силу (35), если $s \in \Omega_a$ и $t \geqslant 3$, то

$$\zeta^{\pm}(ms) = O(\ln^A t).$$

Тогда с некоторой постоянной $C > 0$, в виду оценки (35), справедливо неравенство

$$|\zeta^{\alpha}(ms)| = |\zeta(ms)|^{\xi} \cdot e^{\eta\varphi} \leqslant C \ln^A t,$$

так как $|\xi| \leqslant 1$, $|\eta| \leqslant 1$ и $|\varphi| \leqslant \pi$.

Итак, лемма 1 применима к интегралу $I(x, \chi)$.

Если $\chi^2 = \chi_0$, то $\alpha = \alpha_m(\chi) = \chi(m+1) = \pm 1$ и из леммы 1 следует, что

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(d(n)) = \theta(\alpha) C_N x^{1/m} + O(x^{1/m} e^{-\beta\sqrt{\ln x}}). \tag{36}$$

Если $\chi^2 \neq \chi_0$, то $\alpha_m(\chi) = \lambda + i\mu$ и $\mu \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(d(n)) = \frac{x^{1/m}}{(\ln x)^{1-\alpha}}\Phi(x,\chi) + O(x^{1/m}e^{-\beta\sqrt{\ln x}}) \tag{37}$$

с особым рядом

$$\Phi(x,\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\chi)}{\ln^k x} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\zeta}\zeta^{k-\alpha}d\zeta, \tag{38}$$

где $a_k(\chi)$ — коэффициенты Тейлора функции $G(s,\chi)s^{-1}$ в точке $s = 1/m$.

Если модуль $N$ равен 3, 4 или 6, то $|G(N)| = 2$. Мы получим только два асимптотических равенства (36), в одном из которых $\theta(\alpha) = 0$, а в другом $\theta(\alpha) = 1$. Подставляя их в равенство (19), получим первое утверждение теоремы.

Если модуль $N$ отличен от 3, 4, и 6, то порядок циклической группы $G(N)$ больше 2 и у нее существуют невещественные характеры. Значит, кроме равенств (36) появятся и равенства (37). Подставляя их в равенство (19), получим второе утверждение теоремы. Доказательство теоремы завершено.□

Доказательство следствия состоит в приближенном вычислении суммы $\Phi(x,\chi)$ особого ряда для каждого невещественного характера $\chi$.

Из формулы (38) для любого натурального $n$ с $\alpha = \alpha_m(\chi) = \chi(m+1)$ следует равенство

$$\frac{1}{(\ln x)^{1-\alpha}}\Phi(x,\chi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\chi)}{(\ln x)^{k+1-\alpha}} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\zeta}\zeta^{k-\alpha}d\zeta + \frac{R_n(x,\chi)}{(\ln x)^{1-\alpha}}, \tag{39}$$

где $R_n(x,\chi)$ — остаток особого ряда. Вычислим частную сумму и оценим остаток.

Рассмотрим интеграл. Дополним $L$ до замкнутого на расширенной плоскости контура $H$ двумя лучами $L_1^{\pm} = \{s \mid t = \pm 1,\ -\infty \leqslant \sigma \leqslant -\tau\ln x\}$ (рис. 3). Пусть $\operatorname{Re}\alpha = \lambda$ и $\operatorname{Re}\zeta = u$. Согласно представлению Ханкеля для Γ-функции ([13, гл. V, § 2; гл. VII, § 1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\zeta}\zeta^{k-\alpha}d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} + O\Big(\Big|\int\limits_{L_1^+} e^{\zeta}\zeta^{k-\alpha}d\zeta\Big|\Big) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} + O\Big(\int\limits_{-\infty}^{-\tau\ln x} e^u(\sqrt{u^2+1})^{k-\lambda}du\Big),$$

так как $\pi/2 \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi$. Заменим в интеграле $u$ на $-u$ и учтем, что если $\lambda > 0$, то $(\sqrt{u^2+1})^{-\lambda} \leqslant \sqrt{2}(u+1)^{-\lambda}$, а если $\lambda \leqslant 0$, то это неравенство верно без $\sqrt{2}$. Тогда, выбирая произвольно $\gamma \in (0,1)$, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{-\tau\ln x} e^u(\sqrt{u^2+1})^{k-\lambda}du \leqslant e^{\pi}\sqrt{2}\int\limits_{\tau\ln x}^{\infty} e^{-u}(u+1)^{k-\lambda}du \leqslant e^{-\gamma\tau\ln x}e^{\pi}\sqrt{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-(1-\gamma)u}(u+1)^{k-\lambda}du.$$

Если учесть неравенство (14), то можем утверждать: существует такое число $\beta \in (0,1)$, что

$$\int\limits_{L_1^+} e^{\zeta}\zeta^{k-\alpha}d\zeta = O(e^{-\beta\sqrt{\ln x}}).$$

Пусть $R > 0$ — число меньшее радиуса сходимости ряда Тейлора функции $G(s,\chi)s^{-1}$ в точке $s = 1/m$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k(\chi)|}{|(\ln x)^{k+1-\alpha}|} \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k(\chi)|R^k \leqslant \sum_k |a_k(\chi)|R^k < +\infty.$$

Для суммы в формуле (39) получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k(\chi)}{(\ln x)^{k+1-\alpha}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\zeta}\zeta^{k-\alpha}d\zeta=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k(\chi)}{\Gamma(\alpha-k)(\ln x)^{k+1-\alpha}}+O(e^{-\beta\sqrt{\ln x}}).\tag{40}$$

Оценим остаточный член в формуле (39). В интеграле, стоящем в каждом члене ряда, вернемся к старой переменной $s=a+\delta\zeta$. Остаточный член примет вид:

$$\frac{R_n}{(\ln x)^{1-\alpha}}=\sum_{k>n}\frac{a_k(\chi)}{2\pi i}\int\limits_{L'}x^{s-a}(s-a)^{k-\alpha}ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{x^{s-a}}{(s-a)^{\alpha}}\sum_{k>n}a_k(\chi)(s-a)^k ds.$$

Перестановка суммы и интеграла оправдана, так как при достаточно большом $x$ контур $L'$ находится внутри окружности $C_R$ радиусом $R$ с центром в точке $s=a$ и ряд сходится на $L'$ равнолмерно. Этот ряд представляет собой остаток ряда Тейлора функции $G(s,\chi)s^{-1}$ в окрестности точки $s=a$. Обозначим его через $r_n(s)$ и воспользуемся его интегральным представлением ([13, гл. 1, § 5]):

$$r_n(s)=\frac{(s-a)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{G(z,\chi)z^{-1}dz}{(z-s)(z-a)^{n+1}}.$$

Оценим его на контуре $L'$. Обозначим через $\rho$ растояние между $L'$ и окружностью $C_R$. Из определения $L'$ видно, что $\rho=R-|\tau+i\delta|$. Так как $|\tau+i\delta|=O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)$ (см. обозначения на с. 62), то для всех достаточно больших $x$ величина $1/\rho$ ограничена. Пусть $M=\max|G(s,\chi)s^{-1}|$ на окружности $C_R$. Если $s\in L'$, то

$$|r_n(s)|\leqslant\frac{M|s-a|^{n+1}}{\rho R^n}.$$

Интеграл по $L'$ разобъем на три части: по $\gamma^+$, $\gamma^-$ и по правой полуокружности $C_\delta^+$, причем оценка по $\gamma^-$ такая же, как по $\gamma^+$. С нкоторыми постоянными $C>0$ и $C_1>0$:

$$\left|\int\limits_{\gamma+}\frac{x^{s-a}}{(s-a)^{\alpha}}r_n(s)ds\right|\leqslant C\int\limits_{a-\tau}^{a}x^{\sigma-a}|s-a|^{n+1-\lambda}d\sigma\leqslant C_1\int\limits_0^{\tau\ln x}e^{-u}(\delta u)^{n+1-\lambda}\delta du<C_1\frac{\Gamma(n+3)}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}.$$

По полуокружности $C_\delta^+$:

$$\left|\int\limits_{C_\delta^+}\frac{x^{s-a}}{(s-a)^{\alpha}}r_n(s)ds\right|\leqslant\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}e^{\cos\varphi}\delta^{n+2-\lambda}d\varphi=O\Big(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}\Big).$$

Таким образом,

$$\frac{R_n}{(\ln x)^{1-\alpha}}=O\Big(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}\Big).$$

Из этого равенства и формул (37), (39) и (40) следует равенство:

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(d(n))=\frac{x^{1/m}}{(\ln x)^{1-\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k(\chi)}{\Gamma(\alpha-k)(\ln x)^k}+O\Big(\frac{1}{(\ln x)^{n+2-\lambda}}\Big).$$

Доказываемое утверждение следует из последнего равенства и формулы (19).□

## 4. Заключение

Лемма 1 играет ключевую роль в методе контурного интегрирования подобно известной «ключевой лемме» дискретно эргодического метода. Она справедлива для рядов Дирихле с любой абсциссой абсолютной сходимости $\sigma_a > 0$. Но на пути ее применения к рядам с $\sigma_a < 1$ стояла приближенная формула Перрона, которая совместима с ней лишь при $\sigma_a \geqslant 1$. Теорема 1 снимает это препятствие. Пример вывода асимптотической формулы для частоты попадания значений функции $d(n)$ в заданную арифметическую прогрессию, приведенный в работе, показывает эффективность полученного варианта приближенной формулы Перрона.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Прахар К. Распределение простых чисел (Мир, М., 1967).
2. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел, (Наука, М., 1975).
3. Narckiewicz W. On distribution of values of multiplicative functions in residue classes, Acta Arithm., **12** (3), 269 – 279 (1967).
4. Чанга М. Е. О числах, количество простых делитетелей которых принадлежит заданному классу вычетов, Изв. РАН, Серия матем., **83** (1), 192 –202 (2019).
5. Чанга М. Е. Методы аналитической теории чисел, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика М. — Ижевск, 2013, 228 с.
6. Фоменко О.М. Распределение значений мультипликативных функции по простому модулю, Записки науч. сем. ЛОМИ, **93** (6), 218 – 224 (1980).
7. Титчмарш Е. Теория функций (Наука, М., 1980).
8. Delange H. Généralisation du théorème de Ikeara, Ann. Sci. Ecole norm. super. **71**, 213 – 242 (1954).
9. Громаковская Л. А., Широков Б. М. Распределение числа бесквадратных делителей в классах вычетов, Изв. ВУЗов, Математика, **2020**, № 3, с. 3 – 11
10. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел (Наука, М., 1972).
11. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра (Наука, М., 1976).
12. Ленг С. Алгебра (Наука, М., 1968).
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. (ФИЗМАТГИЗ, М., 1958).


## REFERENCES


1. Prachar, K., 1967, Raspredelenie prostykh chisel. (russian) [Distribution of prime numbers] Translated from Deutsch by A. A. Karacuba. Edited by A. I. Vinogradov. With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov, and N. M. Korobov, Mir, M., 512 p.
2. Karatsuba, A. A., 1975, Bases of the Analytical number theory, (russian)[Osnovy analiticheskoi teorii chisel], Nauka, M., 184 p.

3. Narckiewicz W., 1967) On distribution of values of multiplicative functions in residue classes, Acta Arithm., V. 12, No 3, pp. 269 – 279 .

4. Changa, I. E., 2019, On numbers for which the number of the prime divisors bilong to given residue classes, [O chislakh, kolichestvo prostykh deliteley kotorykh prinadlejat zadannomu klassu vychetov], Izv. RAN, Seriya. Matem, V. 83, No 1, pp. 192 –202 .

5. Changa, I. E., 2013, Methodes of the Analytical number theory, [Metody analiticheskoi teorii chisel], НИЦ "Regularnaya i chaoticheskaya dinamika Mir, Igevsc, 228 p.

6. Fomenko, O. M. 1980, Distribution of values of the multiplicative fubctions prime modulo [Raspredeleniye znacheny multiplikativnych funktsy po prostomu modulyu], Zapisky nauch. sem. LOMI, V. 93, pp. 218 – 224.

7. Titchmarsh, E., 1980, The theory of functions. Trans from Eng. 2nd ed. [Toriya funktsiy. Per. s angl. 2-e izd.], Nauka, Moscow, 464 p.

8. Delange, H., 1954, Généralisation du théorème de Ikeara, Ann. Sci. Ecole norm. super. V. 71, pp. 213 – 242 .

9. Gromakovskaya, L. A., Shirokov, B. M., 2020, Distribution of a number of square-free divisors in residue classes, [Raspredelenie chisla beskvadratnykh delitelei v klassakh vychetov], Izv. Vuzov, Mathematics, No 3, c. 3 – 11

10. Borevich Z. I., Shapharevich I. R. 1972, Number Theory, (russian) [Teoriya chisel], Nauka, M., 568 p.

11. Van der Varden B. L. 1976, Algebra, (russian), [Algebra] Translated from Deutsch by A. A. Belskii. Edited by Yu. I. Merzlyakov, Nauka, M., 648 p.

12. Leng, S., 1968, Algebra, (russian), [Algebra] Translated from English by E. S. Golod. Edited by A. I. Kostrikin, Mir, M., 564 p.

13. Lavrentyev M. A., Shabat B. V., 1958, Methodes of the Function Theory of the coplex variable, (russian) [Metody teorii funktsyi kompleksnogo peremennogo], FISMATGIS, M., 680 p.

Получено 20.06.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.