

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 3.

УДК 512.81

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-32-56

Инварианты Жордана — Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли¹

К. С. Ворушилов (г. Москва)

Ворушилов Константин Сергеевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ksvorushilov@gmail.com

Аннотация

В теории бигамильтоновых систем известна обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко. В гипотезе говорится о существовании полных наборов полиномиальных функций в инволюции относительно пары естественно возникающих пуассоновых структур на двойственных пространствах к алгебрам Ли. Данная гипотеза тесно связана с методом сдвига аргумента, предложенным А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [10]. В исследованиях, посвященных данной гипотезе, была обнаружена связь существования полного набора в биинволюции с алгебраическим типом пучка согласованных скобок Пуассона, заданного линейной и постоянной скобкой. Числа, описывающие алгебраический тип пучка скобок общего положения на двойственном пространстве к алгебре Ли, называются инвариантами Жордана–Кронекера алгебры Ли. Понятие инвариантов Жордана–Кронекера было введено А. В. Болсиновым и Р. Zhang в [2]. Для некоторых классов алгебр Ли (например, полупростых алгебр Ли и алгебр Ли малой размерности) инварианты Жордана–Кронекера удалось вычислить, но в общем случае вопрос вычисления инвариантов Жордана–Кронекера для произвольной алгебры Ли является открытым. Задача вычисления инвариантов Жордана–Кронекера часто упоминается среди наиболее интересных нерешенных задач теории интегрируемых систем [4, 5, 6, 11].

В статье вычислены инварианты Жордана–Кронекера для серии $Bsp(2n)$ и на каждой алгебре серии построены полные наборы полиномов в биинволюции. Также вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ для любых n . Таким образом, вместе с результатами, полученными в [2] для $Bsl(n)$, данная статья составляет решение задачи вычисления инвариантов Жордана–Кронекера борелевских подалгебр классических алгебр Ли.

Ключевые слова: Алгебры Ли, интегрируемые гамильтоновы системы, метод сдвига аргумента, инварианты Жордана–Кронекера

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

К. С. Ворушилов. Инварианты Жордана — Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 3, с. 32–56.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-31-90151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 512.81

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-32-56

**Jordan–Kronecker invariants of Borel subalgebras
of semisimple Lie algebras**

K. S. Vorushilov (Moscow)

Vorushilov Konstantin Sergeevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: ksvorushilov@gmail.com***Abstract**

In the theory of bi-Hamiltonian systems, the generalized Mischenko–Fomenko conjecture is known. The conjecture states that there exists a complete set of polynomial functions in involution with respect to a pair of naturally defined Poisson structures on a dual space of a Lie algebra. This conjecture is closely related to the argument shift method proposed by A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko in [10]. In research works devoted to this conjecture, a connection was found between the existence of a complete set in bi-involution and the algebraic type of the pencil of compatible Poisson brackets, defined by a linear and constant bracket. The numbers that describe the algebraic type of the generic pencil of brackets on the dual space to a Lie algebra are called the Jordan–Kronecker invariants of a Lie algebra. The notion of Jordan–Kronecker invariants was introduced by A. V. Bolsinov and P. Zhang in [2]. For some classes of Lie algebras (for example, semisimple Lie algebras and Lie algebras of low dimension), the Jordan–Kronecker invariants have been computed, but in the general case the problem of computation of the Jordan–Kronecker invariants for an arbitrary Lie algebra remains open. The problem of computation of the Jordan–Kronecker invariants is frequently mentioned among the most interesting unsolved problems in the theory of integrable systems [4, 5, 6, 11].

In this paper, we compute the Jordan–Kronecker invariants for the series $Bsp(2n)$ and construct complete sets of polynomials in bi-involution for each algebra of the series. Also, we calculate the Jordan–Kronecker invariants for the Borel subalgebras $Bso(n)$ for any n . Thus, together with the results obtained in [2] for $Bsl(n)$, this paper presents a solution to the problem of computation of Jordan–Kronecker invariants for Borel subalgebras of classical Lie algebras.

Keywords: Lie algebras, integrable Hamiltonian systems, argument shift method, Jordan–Kronecker invariants

Bibliography: 16 titles.

For citation:

K. S. Vorushilov, 2021, "Jordan–Kronecker invariants of Borel subalgebras of semisimple Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 32–56.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная или вещественная конечномерная алгебра Ли со структурными константами c_{ij}^k . Для функций на ее двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ естественным образом определена скобка Пуассона

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Данная пуассонова структура $\mathcal{A}_x$ (называемая также “скобкой Ли–Пуассона”) задается тензором типа $(2,0)$ на $\mathfrak{g}^*$, т.е. семейством билинейных форм на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, матрицы которых $\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k)$ линейно зависят от координат x_i точки $x \in \mathfrak{g}^*$.

Вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли задаются полным набором функций, находящихся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона. Полным набором считается набор, содержащий в себе n функций, дифференциалы которых линейно независимы почти всюду на $\mathfrak{g}^*$, где n равно сумме половины размерности орбиты общего положения и коразмерности орбиты, т.е. размерности ядра скобки:

$$n = \dim \ker \mathcal{A}_x + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_x = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g}).$$

Наибольший с практической точки зрения интерес представляют гамильтоновы системы, где полный набор в инволюции можно выбрать среди полиномиальных функций.

В 1978 году А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко предложили метод сдвига аргумента для построения полных коммутативных наборов [10]. В данной статье будет полезно использовать следующую переформулировку метода сдвига аргумента [2]. Для множества локально аналитических Ad^* -инвариантов $f_1, \dots, f_s$, $s = \text{ind } \mathfrak{g}$, определенных в окрестности элемента общего положения $a \in \mathfrak{g}^*$ таким образом, что $\{df_i(a)\}_{i=1}^s$ образуют базис $\text{Ann } a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_\xi^* a = 0\}$, рассмотрим разложения в ряд Тейлора:

$$f_i(a + \lambda x) = f_i^{(0)} + \lambda f_i^{(1)} + \lambda^2 f_i^{(2)} + \dots$$

Коэффициенты $f_i^{(j)}$ находятся в инволюции относительно сразу двух пуассоновых структур: скобки Ли–Пуассона и скобки “с замороженным аргументом”

$$\{f, g\}_a(x) = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

для которой матрица соответствующей билинейной формы $(c_{ij}^k a_k)$ на $\mathfrak{g}$ постоянна.

С помощью метода сдвига аргумента А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко удалось построить полные наборы полиномов в инволюции для полупростых и некоторых других классов алгебр Ли. На основании этих результатов авторами была выдвинута гипотеза, полностью доказанная С. Т. Садэтовым в 2004 году:

ТЕОРЕМА 1 (С. Т. Садэтов). *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в инволюции.*

Доказательство теоремы 1 подробно описано, например, в [7]. В отличие от наборов, построенных методом сдвига аргумента, наборы полиномов, построенные методом Садэтова, не находятся в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Соответственно, был поставлен вопрос о возможности построения полного набора в биинволюции, т.е. в инволюции относительно обеих пуассоновых структур $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ (см. [4, Задача 12], а также [5] и [2]).

ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА МИЩЕНКО–ФОМЕНКО. *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в биинволюции, т.е. в инволюции как относительно скобки Ли–Пуассона $\mathcal{A}_x$, так и относительно скобки с замороженным аргументом $\mathcal{A}_a$, где $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент.*

Для некоторых классов алгебр Ли такие наборы были построены. В частности, для маломерных алгебр ($\dim \mathfrak{g} \leq 5$) а также для некоторых других классов наборы построены в [2]. Тем не менее, в общем случае обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко не доказана.

С методом сдвига аргумента тесно связано понятие инвариантов Жордана–Кронекера.

ТЕОРЕМА 2 (Жордана–Кронекера, см. [12]). Пусть A и B — две произвольные билинейные кососимметрические формы на линейном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Тогда существует такой базис пространства V , в котором формы A и B одновременно приведены к блочно-диагональному виду $A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_n\}$, $B = \text{diag}\{B_1, \dots, B_n\}$ с блоками следующих видов:

1. Жорданов блок с собственным значением $\lambda_i \in \mathbb{K}$:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & J(\lambda_i) \\ -J^T(\lambda_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица;

2. Жорданов блок с собственным значением $\lambda_i = \infty$:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J^T(0) & 0 \end{pmatrix};$$

3. Кронекеров блок:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1^T & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & K_2 \\ -K_2^T & 0 \end{pmatrix},$$

где K_1 и K_2 — матрицы размера $(k_i - 1) \times k_i$ следующего вида:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из Теоремы 2 видно, что кронекеровы блоки имеют нечетный размер, а жордановы блоки всегда четного размера.

Известно (см. [2]), что для открытого всюду плотного множества пар (x, a) в $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ одинаково в том смысле, что для всех таких пар количество и размеры кронекеровых блоков и жордановых блоков для каждого собственного значения одни и те же. Это означает, что данные числа можно рассматривать как инварианты самой алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Инвариантами Жордана–Кронекера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются числовые характеристики, описывающие разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ для $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ общего положения, а именно

- кронекеровы индексы k_i , каждый из которых соответствует кронекерову блоку размера $(2k_i - 1) \times (2k_i - 1)$, и их количество;
- жордановы индексы m_j , каждый из которых соответствует жорданову блоку размера $m_j \times m_j$, и их количество для каждого λ_l .

Для произвольной пары кососимметричных форм A и B значения λ_i , появляющиеся в жордановых блоках, являются корнями многочлена, который мы будем называть характеристическим многочленом пучка $A + \lambda B$. В случае алгебры Ли для $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ общего положения характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ имеет вид $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$, где $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x)$ – фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли, который по определению является наибольшим общим делителем пфаффианов всех диагональных миноров матрицы $\mathcal{A}_x$. Фундаментальный полуинвариант содержит существенную информацию об инвариантах Жордана–Кронекера алгебры Ли: сумма жордановых индексов, соответствующих λ_i равна $2l_{\lambda_i}$, где l_{λ_i} – кратность λ_i как корня многочлена $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Оказывается, в некоторых случаях знание инвариантов Жордана–Кронекера позволяет проверить обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко для алгебры Ли. Например, гипотеза справедлива, если алгебра Ли имеет кронекеров тип (то есть, в разложении Жордана–Кронекера пары форм общего положения на алгебре Ли присутствуют только кронекеровы блоки), так как в таком случае инвариантов и функций, полученных из них методом сдвига аргумента хватает для полноты набора.

Понятие инвариантов Жордана–Кронекера было введено А. В. Болсиновым и Р. Zhang в работе [2] (см. также [3]). Там же содержится более подробная информация о связи инвариантов Жордана–Кронекера алгебры Ли и существованием на ней полных наборов в биинволюции, а также приведены полные биинволютивные наборы для некоторых классов алгебр Ли.

Естественным образом возникает задача нахождения инвариантов Жордана–Кронекера алгебр Ли. Для некоторых классов алгебр Ли, например, для полупростых, инварианты Жордана–Кронекера известны ([2]), однако в общем случае этот вопрос открыт. В работах специалистов в области конечномерных интегрируемых систем среди наиболее интересных открытых вопросов встречается следующая задача:

ЗАДАЧА (PROBLEM 5.6. [6], см. также [4, 5, 11]). *Вычислить инварианты Жордана–Кронекера для наиболее интересных классов алгебр Ли, в частности, для*

- a) полупрямых сумм $\mathfrak{g} + {}_{\rho}V$, где $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ – представление простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а V – коммутативный идеал;*
- b) борелевских подалгебр простых алгебр Ли;*
- c) параболических подалгебр простых алгебр Ли;*
- d) централизаторов сингулярных элементов простых алгебр Ли;*
- e) алгебр Ли малой размерности.*

Данная задача была решена для полупрямых сумм по стандартному представлению вида $so(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $sp(n) + (\mathbb{R}^n)^k$, а также в случаях $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ при $k \geq n$ и при $n = kl$ [15, 16], борелевских подалгебр $Bsl(n)$ [2], для алгебр Ли размерности не больше 5 (Pumei Zhang, см. версию статьи [2] в ArXiv), и для нильпотентных алгебр Ли размерностей 6 и 7 [8].

В настоящей статье вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр Ли $Bso(n)$ и $Bsp(2n)$. Этот результат, вместе с результатом [2] для $Bsl(n)$, является полным решением Задачи для борелевских подалгебр классических простых алгебр Ли (оставляя пункт *b*) открытым только для исключительных алгебр Ли). В случае $Bsp(n)$ также приведен полный набор полиномиальных функций в биинволюции. Стоит отметить, что возможность построения наборов для $Bsp(n)$ (см. ниже) и для $Bsl(n)$ ([2], см. также [1]) обеспечивается наличием достаточного числа функций, получаемых методом сдвига аргумента в инвариантах и полуинвариантах коприсоединенного представления. Таких сдвигов оказывается недостаточно в случае $Bso(n)$; поэтому вопрос о построении полного набора полиномиальных функций в биинволюции для данной серии остается открытым.

2. Случай $Bsp(2n)$

2.1. Общие сведения о серии

Группа $SP(2n)$ — группа матриц $2n \times 2n$ из $SL(2n)$, удовлетворяющих равенству $G\Omega G^T\Omega^{-1} = E$, где Ω — кососимметрическая форма стандартного вида. Элементы G имеют следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, AB^T = BA^T, CD^T = DC^T, AD^T - BC^T = E.$$

Борелевская подгруппа этой группы состоит из автоморфизмов, сохраняющих полуфлаг изотропных подпространств, или полный флаг попарно дополнительных подпространств (легко проверить, что подойдет стандартный флаг). Отсюда следует, что элемент G лежит в борелевской подгруппе, если $C = 0$, A — верхнетреугольная матрица; условия на B и D теперь выглядят так: $AB^T = BA^T, AD^T = E$.

Алгебра Ли такой группы состоит из матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^T \end{pmatrix}, X_1 \text{ — верхнетреугольная матрица, } X_2 = X_2^T.$$

Скобка Ли в такой алгебре — стандартный коммутатор матриц. Нетрудно вычислить размерность такой алгебры Ли: $\dim \mathfrak{g} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Будем рассматривать $\mathfrak{g}^*$ как пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & -Y_1^T \end{pmatrix}, Y_1 \text{ — верхнетреугольная матрица, } Y_2 = Y_2^T. \quad (1)$$

Тогда отождествление $\mathfrak{g}$ с двойственным к ней пространством выглядит следующим образом:

$$\langle Y | X \rangle = \text{Tr } YX^T, Y \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}.$$

Данное отождествление не является каноническим. Однако если мы рассмотрим данную алгебру в ортонормированном базисе относительно скалярного произведения $\langle X_1 | X_2 \rangle = \text{Tr } X_1 X_2^T, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ (фактически это значит, что все повторяющиеся переменные в описанном матричном представлении элемента алгебры нужно домножить на $\frac{\sqrt{2}}{2}$), то такое отождествление каноническое. Здесь и далее мы будем опускать данные коэффициенты, подразумевая, что сделали замену вида $x' = \sqrt{2}x$ там, где это необходимо. Такая замена не повлияет на решение уравнений, учитывая, что нам интересны не сами решения, а размерности пространств решений.

Действие $\text{Ad}_G^* Y$ выглядит так:

$$\text{Ad}_G^* Y = \pi \begin{pmatrix} (A^{-1})^T Y_1 A^T + (A^{-1})^T Y_2 B^T & (A^{-1})^T Y_2 A^{-1} \\ * & -BY_2 A^{-1} - AY_1^T A^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где π — проекция на $\mathfrak{g}^*$, заключающаяся в подставлении нулей вместо некоторых элементов, а именно, всех в левом нижнем блоке, строго нижнетреугольных в левом верхнем блоке и строго верхнетреугольных в правом нижнем блоке.

Индекс алгебры $Bsp(2n)$ равен 0 для любых натуральных n . Это означает, что у данной алгебры Ли отсутствуют инварианты коприсоединенного представления, а значит, и кронекеровы блоки в разложении Жордана–Кронекера пучка общего положения. Следовательно, для нахождения инвариантов Жордана–Кронекера достаточно найти характеристический многочлен.

Полуинварианты коприсоединенного представления были найдены В. В. Трофимовым:

ТЕОРЕМА 3 (В.В. Трофимов, [13]). Пусть Δ_i - главный минор порядка i матрицы Y_2 в элементе Y вида (1). Тогда функции $\Delta_i, i = 1, \dots, n$, являются полуинвариантами неприсоединенного представления.

Каждый из Δ_i можно рассматривать как определитель матрицы квадратичной формы, при этом известно, что такой определитель является неприводимым многочленом.

2.2. Характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 4. Фундаментальным полуинвариантом алгебры Ли $Bsp(2n)$ является многочлен $\mathbf{f}_g(x) = \prod_{i=1}^n \Delta_i$. Характеристическим многочленом пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения для $Bsp(2n)$ является многочлен $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

Доказывать будем по частям.

Рассмотрим множество $\text{Sing} = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \text{Ann } y > \text{ind } \mathfrak{g}\}$. Данное множество может быть объединением компонент разной размерности, но в рассматриваемых нами случаях всегда имеется компонента коразмерности один Sing_0 (такая компонента отсутствует только в случае алгебры Ли кронекерова типа). Нетрудно заметить, что в случае, когда фундаментальный полуинвариант имеет вид $\mathbf{f}_g(x) = p_1^{l_1}(x) \cdot \dots \cdot p_m^{l_m}(x)$, многочлен, определяющий Sing_0 , является произведением тех же самых неприводимых компонент p_i , взятых с кратностью один: $\mathbf{f}_{\text{Sing}_0}(x) = p_1(x) \cdot \dots \cdot p_m(x)$. Чтобы понять, что полуинварианты Δ_i (и только они) являются компонентами p_i , докажем следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Регулярные элементы задаются уравнением $\mathbf{f}_g(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, как действует Ad^* на $\mathfrak{g}^*$ (2). При таком действии симметричную матрицу Y_2 с последовательными ненулевыми угловыми минорами можно привести к диагональному виду. Доказать это можно индукцией по размеру матрицы. Случай матрицы 1×1 очевидный, а дальше посмотрим на шаг:

$$\begin{pmatrix} Q & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L^T Q L & L^T(Qm + b) \\ m^T Q L + b^T L & b^T m + m^T b + c \end{pmatrix}.$$

Здесь описано действие верхнетреугольной матрицей $\begin{pmatrix} L & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На второй диагонали все можно обратить в ноль, отсюда следует утверждение.

Тогда при $A = E$ блочно-диагональное уравнение в левом верхнем блоке (2) примет вид $Y_1 + Y_2 B$. Выбором матрицы B (в силу ее симметричности и диагональности Y_2) можно добиться того, что все выражение будет равно нулю.

Рассмотрим для такого элемента уравнение $\text{ad}_X^* Y = 0$:

$$\pi \begin{pmatrix} -Y_2 X_2^T & X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 \\ 0 & X_2^T Y_2 \end{pmatrix} = 0, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^T \end{pmatrix}.$$

Под π понимается проекция, действующая таким же образом, что и в (2). Условие $\pi(Y_2 X_2^T) = \pi(Y_2 X_2) = 0$ при Y_2 диагональной эквивалентно условию $X_2 = 0$. Условие $X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0$ также можно интерпретировать как равенство нулю матрицы X_1 , так как слагаемые отличаются друг от друга по сути транспонированием, и одно из слагаемых - верхнетреугольная матрица, а другое - нижнетреугольная с одинаковыми элементами на диагонали.

Из вышесказанного следует, что размерность пространства решений уравнения $\text{ad}_X^* Y = 0$ равна нулю, то есть, размерность аннулятора Y минимальная из возможных. Это означает, что элемент Y регулярен. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Сингулярные элементы описываются уравнением $\mathbf{f}_g(x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно будет проверить два случая: когда равен нулю только определитель матрицы Y_2 (в этом случае матрица диагонализуема), и когда равен нулю любой другой минор (в этом случае матрица диагонализуема только блочно, в разложении будет присутствовать один блок 2×2).

- в первом случае выражение $Y_1 + Y_2 B$ можно сделать равным нулю лишь частично; правый нижний элемент в нуль обратить не получится. Рассмотрим для такого элемента уравнение $\text{ad}_X^* Y = 0$:

$$\pi \begin{pmatrix} X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T - Y_2 X_2^T & X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 \\ * & X_2^T Y_2 + X_1 Y_1 - Y_1 X_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение в правом верхнем блоке решается аналогично регулярному случаю с тем лишь исключением, что условие на правый нижний элемент X_1 отсутствует. В силу этого $\pi(X_1^T Y - Y_1 X_1^T) = 0$. Уравнение $Y_2 X_2^T = 0$ решается аналогично регулярному случаю с тем же исключением (нет условия на правый нижний элемент матрицы X_2). Размерность пространства решений увеличивается на 2.

- будем считать, что нулю равен предпоследний диагональный минор. Тогда матрица Y_2 имеет диагональный блок $(n-2) \times (n-2)$ и блок 2×2 с элементами только на второй диагонали.

Рассмотрим выражение $Y_1 + Y_2 B$. В правом нижнем блоке произведение $Y_2 B$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & g \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bg & bh \\ bf & bg \end{pmatrix},$$

откуда видно, что мы снова можем обратить в нуль все элементы, кроме, например, правого нижнего.

Теперь рассмотрим $\text{ad}_X^* Y = 0$. Уравнение $X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0$ вне правого нижнего блока 2×2 решается так же, как и в регулярном случае, а в блоке выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 y_2 + x_3 y_2 \\ x_3 y_2 + x_1 y_2 & 2x_2 y_2 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что $x_2 = 0$, а x_1 можно выразить через x_3 . Тогда X_1 и Y_1 - диагональные матрицы, следовательно, они перестановочны. Остается лишь уравнение $Y_2 X_2^T = 0$, в котором решение вне блока аналогично регулярному случаю, а в блоке аналогично уже рассмотренному - правый нижний элемент не имеет никаких условий.

Из вышесказанного следует, что размерность пространства решений (то есть, аннулятора выбранного элемента Y) увеличивается на 2. Это означает, что в обоих случаях элемент Y принадлежит сингулярному множеству по поределению.

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В доказанных выше Утверждениях найден вид уравнения $\mathbf{f}_{\text{Sing}_0}(x)$, $x \in \mathfrak{g}^*$, задающего сингулярное множество. Строго говоря, найденный многочлен может не совпадать с фундаментальным полуинвариантом, если неприводимые компоненты (в нашем случае Δ_i) входят в полуинвариант с кратностью, отличной от единицы. Но размерность алгебры Ли $Bsp(2n)$ равна $n(n+1)$, что ровно в два раза больше суммы степеней Δ_i . по определению фундаментального полуинварианта, его степень для фробениусовой алгебры Ли равна половине размерности алгебры Ли. Значит, кратность каждой неприводимой компоненты может быть равна только единице. □

Число различных корней характеристического многочлена равно $\frac{n(n+1)}{2}$; все корни имеют кратность 1. Это означает, что сумма размеров жордановых блоков, отвечающих каждому корню характеристического многочлена λ_i , равна двум, то есть, каждому λ_i соответствует ровно один блок размера 2×2 .

ТЕОРЕМА 5 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bsp(2n)$). *Алгебры Ли серии $Bsp(2n)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен $f_g(x + \lambda a) = \prod_{i=1}^n \Delta_i(x + \lambda a) = 0$, $x, a \in \mathfrak{g}^*$, имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ различных корней; каждому из них соответствует один жорданов индекс 2.*

2.3. Полный набор в би-инволюции

Как было показано выше, неприводимые компоненты фундаментального полуинварианта имеют кратность один, то есть, полуинвариант совпадает с уравнением, задающим сингулярное множество. Такая ситуация удовлетворяет условиям теоремы 6 в [2]:

ТЕОРЕМА 6 (Bolsinov–Zhang, [2]). *Пусть $\mathfrak{g}$ – фробениусова алгебра Ли, и пусть геометрическая степень $\text{Sing} \in \mathfrak{g}^*$ равна половине размерности алгебры Ли. Тогда пучок общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ не содержит жордановых блоков размера больше 2, все корни характеристического многочлена различны, и коэффициенты характеристического многочлена образуют полный набор функций в би-инволюции.*

Полный набор в би-инволюции может быть получен из соображений, используемых в теореме 6, то есть, мы можем взять набор симметрических полиномов от корней характеристического многочлена. Однако полный набор, эквивалентный данному, можно получить более наглядно. Возьмем скобку Ли двух элементов

$$\left[\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} AA_1 - A_1A & AB_1 + BC_1 - A_1B - B_1C \\ 0 & CC_1 - C_1C \end{pmatrix}.$$

Если мы возьмем ненулевыми только элементы B и B_1 , то увидим, что они коммутируют. Так как по определению скобка Ли–Пуассона задается матрицей $\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k)$, из вышесказанного следует, что в этой матрице мы будем иметь правый нижний блок нулей размера $n \times n$, что в точности означает, что в качестве функций в би-инволюции мы можем взять линейные функции от элементов матрицы B . Так как алгебра Ли фробениусова, нам нужно найти $\frac{\dim \mathfrak{g}}{2}$ функций. Именно столько функций мы и нашли, так как размерность B равна половине размерности алгебры.

Стоит отметить, что данный набор был ранее построен А. А. Короткевичем в [9], но рассматривался только как набор в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона. Однако вид матрицы $\mathcal{A}_a = (c_{ij}^k a_k)$ будет таким же, как и $\mathcal{A}_x$, а именно, матрица будет иметь такой же блок нулей, то есть построенные функции действительно находятся в инволюции относительно обеих пуассоновых структур.

3. Случай $Bso(2k)$

3.1. Общие сведения о серии

Элементами группы Ли $BSO(n)$ являются матрицы из $SL(n)$, удовлетворяющие равенству $G\Sigma G^T \Sigma^{-1} = E$, где Σ – симметричная форма стандартного вида, и сохраняющие фиксированный полуфлаг изотропных пространств $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k$ ($n = 2k$ или $n = 2k + 1$).

При $n = 2k$ в качестве такой формы мы выберем следующую:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда элемент G имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1T} \end{pmatrix}, \quad A - \text{верхнетреугольная}, \quad BA^T + AB^T = 0.$$

Элементы $X \in Bso(2k)$ и $Y \in Bso(2k)^*$ в матричном виде запишутся так:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^* \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & -Y_1^* \end{pmatrix},$$

где матрицы X_1 и Y_1 верхнетреугольные, X_2 и Y_2 - кососимметричные, а $*$ обозначает классическое транспонирование матрицы, $R^* = R^T$. В данном случае снова рассматривается отождествление $\langle Y|X \rangle = \text{Tr}(YX^T)$; так же, как и в предыдущем случае оно неканоническое, но как и в предыдущем случае, в рамках данной статьи каноничность несущественна (матрица Грама соответствующего скалярного произведения является скалярной матрицей).

$$\text{Ad}_G^* Y = \pi \begin{pmatrix} A^{-1T} Y_1 A^T + A^{-1T} Y_2 B^T & (A^{-1})^T Y_2 A^{-1} \\ * & BY_2 A^{-1} - AY_1^T A^{-1} \end{pmatrix},$$

где π - проекция, заключающаяся в подставлении нулей вместо всех элементов в блоке, отмеченном $*$, а также нижнетреугольных элементов в левом верхнем блоке и верхнетреугольных в правом нижнем.

Иногда наряду с вышеописанным представлением (которое будет далее называться стандартным) полезно рассматривать представление, использованное В. В. Трофимовым в [13]. В таком представлении (на примере элемента Y) Y_2 - кососимметричная относительно побочной диагонали, а Y_1^* - матрица, получающаяся из Y_1 транспонированием относительно побочной диагонали; то же самое справедливо и для соответствующих подматриц элемента X . Вся матрица Y в таком представлении кососимметрична относительно побочной диагонали. В таком представлении удобно определять полуинварианты.

Данные представления изоморфны. Изоморфизм задается так:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 S \\ 0 & -SY_1^T S \end{pmatrix},$$

где S - матрица единиц на побочной диагонали. Очевидно, что $\phi^2 = \text{Id}$. По ходу статьи, используется стандартное представление; в случае необходимости использовать представление, описанное выше, мы будем использовать отображение ϕ .

Размерность $Bso(4s)$ равна $4s^2$; размерность $Bso(4s+2)$ равна $4s^2 + 4s + 1$. Индекс $Bso(4s)$ равен нулю, что означает, что алгебры Ли данной серии фробениусовы, и задача нахождения инвариантов Жордана–Кронекера сводится к задаче нахождения характеристического многочлена; индекс $Bso(4s+2)$ равен единице.

3.2. Полуинварианты $Bso(2k)$

Рассмотрим матрицу $\phi(Y)$, $Y \in Bso(2k)^*$. Функция J_{2i-1} вычисляется следующим образом:

1. Вычеркнем первые $2i - 1$ строк и последние $2i - 1$ столбцов $\phi(Y)$;

2. к уже вычеркнутым вычеркнем еще одну строку и один столбец с индексом $j, j = 2i, \dots, k$;
3. считаем определитель подматрицы, стоящей на пересечении вычеркнутых строк и столбцов;
4. делаем так для всех возможных j и складываем получившиеся определители.

Аналогичным образом определяются функции J_{2i} .

Рассмотрим также функции Δ_{2i} , которые можно определить как угловые миноры матрицы $Y_2 S$, проходящие через первые $2i$ строк и последние $2i$ столбцов.

ТЕОРЕМА 7 (Трофимов, [13]). *Функции Δ_{2i} при $i \leq s$, и J_{2i-1} при $i \leq s$ являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(2k)$, $k = 2s$ или $k = 2s + 1$. Функции J_{2s} являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 2)$.*

Многочлены Δ_{2i} приводимы как определители кососимметричных матриц: $\Delta_{2i} = (P_i)^2$; многочлены P_i в свою очередь неприводимы. Многочлены J_{2i-1} , являющиеся суммами более чем одного минора, неприводимы. Для проверки этого факта достаточно рассмотреть матрицу Y такую, что $\phi(Y)$ имеет следующий вид:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2' \\ 0 & -Y_1^t \end{pmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & l \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} p & & & & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & & & & & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & \alpha_{2i-2} & 0 & & & \\ & & \beta & 0 & -\alpha_{2i-2} & & 0 & \\ & & 0 & -\beta & 0 & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ 0 & & \dots & & & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

где t - транспонирование относительно второй диагонали, элемент λ в матрице Y_1 расположен на строке $2i - 1$ и столбце $2i$; в матрице Y_2' на диагонали выше побочной расположено $2i - 1$ ненулевых элементов.

Функция J_{2i-1} от такого элемента равна $\alpha_2^2 \cdot \alpha_4^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{2i-2}^2 lp + \alpha_1^2 \cdot \alpha_3^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{2i-3}^2 \lambda \beta$. Такой многочлен, очевидно, неприводим.

С другой стороны, если J_{2i-1} состоит из одного слагаемого-определителя, то такая функция приводима и представляет собой произведение $P_i \cdot Q_i$, где Q_i неприводим (как корень из определителя кососимметричной матрицы).

J_{2s} разложим похожим образом: $J_{2s} = P_s \cdot Q_{s+1}$, где множитель Q_{s+1} неприводим. В этом несложно убедиться, если заметить, что J_{2s} по сути своей является определителем матрицы $(2s + 1) \times (2s + 1)$ с кососимметричной подматрицей размера $2s \times 2s$ и практически произвольными оставшимися строкой и столбцом.

3.3. Серия $Bso(4s)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 8. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_g(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ имеет вид $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

Перед доказательством теоремы следует отметить, что P_s делит J_{2s-1} , соответственно в представлении выше можно заменить J_{2s-1} на $P_s \cdot Q_s$.

Как и в разделе 2.2, нам нужно проверить, что нули указанных многочленов действительно задают сингулярное множество. Однако в данном случае сумма степеней многочленов, взятых с кратностью один, меньше половины размерности алгебры, то есть, нам необходимо понять кратность, с которой каждая неприводимая компонента входит в $\mathbf{f}_g(x)$. Доказательство теоремы заключается в проверке двух утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Элемент Y регулярен при $\mathbf{f}_g(Y) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было указано выше, любой элемент алгебры $Bso(2k)^*$ задается двумя матрицами размера $k \times k$: верхнетреугольной Y_1 и кососимметричной Y_2 .

Система уравнений, задающая аннулятор Y , выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0; \\ \pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T + Y_2 X_2) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где π - проекция на пространство верхнетреугольных матриц.

В случае $Bso(4s)$ элемент общего положения Ad^* -преобразованием может быть приведен к такому виду: матрица Y_2 имеет вид стандартной кососимметричной, а матрица Y_1 имеет вид *проекции стандартной кососимметричной формы на пространство верхнетреугольных матриц* - то есть, блочно-диагональный вид с блоками вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Первое уравнение эквивалентно условию $X_1^T Y_2 = (X_1^T Y_2)^T$. Так как Y_2 блочно-диагональна с блоками 2×2 , а X_1 верхнетреугольная, произведение $X_1^T Y_2$ верхнетреугольно, что означает, что все элементы вне блоков на диагонали равны нулю. В блоках же стоят условия $X_{ii}^T \alpha_i \Omega = -\alpha_i \Omega X_{ii}$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из этого условия следует, что диагональные блоки X_{ii} представляют собой верхнетреугольные матрицы со следом 0.

Рассмотрим второе уравнение (3). Заметим, что X_1 и Y_1 имеют блочно-диагональный вид с одинаковыми блоками, поэтому их коммутатор тоже будет блочно-диагональным с теми же блоками. Удобно сначала рассмотреть все элементы вне этих блоков; все они содержатся в слагаемом $Y_2 X_2$; так как Y_2 блочно-диагональна с невырожденными блоками 2×2 , то условие $Y_2 X_2 = 0$ вне диагональных блоков по сути означает, что все элементы X_2 вне диагональных равны нулю. Рассмотрим уравнения, возникающие в блоках 2×2 .

$$X_{ii}^T \Lambda_i - \Lambda_i X_{ii}^T + \alpha \Omega X_{2,ii} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i x_{i1} \\ 0 & \beta_i x_{i2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_i x_{i2} & -\beta_i x_{i1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_i x_{2,i} & 0 \\ 0 & -\alpha_i x_{2,i} \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Очевидно, равенство выполняется только при $x_{i1} = x_{i2} = x_{2,i} = 0$. Отсюда получаем, что все элементы X равны нулю, значит, размерность пространства решений (иначе говоря, аннулятора Y) равна нулю, то есть, минимальная из возможных. Это означает, что элемент Y регулярен. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Данная схема рассмотрения будет использоваться во всех случаях $Bso(n)$: мы будем сводить систему уравнений к некоторой блочно-диагональной, и рассматривать получившиеся блоки. Для "стандартных" блоков 2×2 рассмотрение ограничивается приведенным выше. Более того, условие того, что коммутатор двух матриц X и X' с соответствующими подматрицами блочно-диагонального вида равен нулю, сводится к условиям*

на соответствующие блоки на диагоналях; элементы с ненулевыми блоками разной “высоты” (то есть, разного расположения на блочной диагонали) коммутируют. Поэтому почти всегда будет удобно свести решение к рассмотрению одного блока, что аналогично рассмотрению случая алгебры Ли меньшей размерности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вид, к которому приводятся элементы, удобен тем, что для элементов такого вида J -полуинварианты содержат всего одно ненулевое слагаемое, причем для любого i J_{2i-1} зависит только от одного элемента Y_1 - от β_i . Причем приведение к данному виду никак не использует условия $J_{2i-1} \neq 0$, соответственно, при равенстве нулю одного из J_{2i-1} элемент все еще может быть приведен к описанному блочно-диагональному виду, но соответствующий β_i будет равен нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Элемент Y сингулярен при $\mathbf{f}_g(Y) = 0$. Аннулятор сингулярного элемента общего положения Y , соответствующего равенству нулю одного из $(P_i), i = 1, \dots, s-1$, является двумерной коммутативной подалгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 2 следует, что при $J_{2i-1} = 0$ достаточно проверить уравнение (4) при $\beta_i = 0$. Очевидно, размерность пространства решений увеличится на 2 за счет неопределенности x_{i1} и x_{i2} .

В случае, если $\Delta_{2s} = 0$, матрицу Y снова можно привести к виду, описанному в Утверждении 3 за исключением последних блоков 2×2 в обеих матрицах: $Y_{2,s}$ будет нулевым, а $Y_{1,s}$ - произвольным верхнетреугольным. Очевидно, что вне нижнего диагонального блока 2×2 все условия аналогичны ранее рассмотренным; поэтому, согласно Замечанию 1 можно рассмотреть случай $Bso(4)$.

Первое уравнение (3) тавтологическое, а второе имеет вид

$$\pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T) = \begin{pmatrix} -x_2 y_2 & x_1 y_2 - x_3 y_2 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

размерность пространства решений данного уравнения равна единице, и еще единица получается из отсутствия условий на X_2 .

В случае, когда равен нулю один из $\Delta_{2i}, i \neq s$, матрицу Y_2 можно привести к блочно-диагональному виду, где все блоки стандартные 2×2 кроме одного блока 4×4 , имеющего вид $W = \begin{pmatrix} 0 & \gamma E \\ -\gamma E & 0 \end{pmatrix}$. Система сводится к блочно-диагональной, поэтому в соответствии с Замечанием 1 рассмотрим случай $Bso(8)$.

Выберем такой Y :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что данный элемент действительно является сингулярным, при этом из определенных полуинвариантов в нуль обращается только Δ_2 . Аннулятор данного элемента имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 & x_1 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная подалгебра, очевидно, коммутативна. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Утверждение 4 означает, что если Y является точкой общего положения множества решений уравнения $P_1 \cdot \dots \cdot P_{s-1}(x) = 0$, то $\dim \text{Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g} = 2$ и $\text{ind } \text{Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g} = 2$. В этой ситуации можно воспользоваться следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([2], Proposition 13). Пусть $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ - пара общего положения, λ_i - один из корней характеристического уравнения $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$. Положим $Y = x + \lambda_i a \in \text{Sing}$.

1. Число жордановых блоков, отвечающих корню λ_i , равно

$$\frac{1}{2}(\dim \text{Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g}).$$

2. Число нетривиальных жордановых блоков (то есть, размера 4×4 и больше), отвечающих корню λ_i , равно

$$\frac{1}{2}(\text{ind Ann } Y - \text{ind } \mathfrak{g}).$$

В рассматриваемой ситуации каждому корню характеристического многочлена соответствует один жорданов блок. Из Предложения 1 следует, что каждому корню $P_i(x + \lambda a) = 0$ соответствует один нетривиальный жорданов блок; складывая суммы степеней P_i , получаем, что количество различных корней, возникающих в данных компонентах, равно $\frac{s(s-1)}{2}$. Корням уравнений $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0$ ($s(s+1)$ различных) могут соответствовать и тривиальные блоки. Исходя из этого, можем получить оценку снизу суммы размеров жордановых блоков для всех корней характеристического многочлена: $2 \cdot s(s+1) + 4 \cdot \frac{s(s-1)}{2} = 4s^2$, что равно размерности алгебры Ли, то есть, оценке сверху такой суммы. Следовательно, каждому корню $P_i(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s-1$, соответствует один жорданов блок размера 4, то есть, кратность неприводимой компоненты P_i фундаментального полуинварианта равна двум. Аналогично, корням $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s$, соответствуют тривиальные жордановы блоки, следовательно, неприводимые компоненты $J_{2i-1}(x)$ входят в полуинвариант с кратностью один. Таким образом, вид фундаментального инварианта (соответственно, характеристического многочлена) полностью определен. $\square$

В процессе доказательства Теоремы 8 мы фактически нашли число и размеры жордановых блоков для каждого корня характеристического многочлена, то есть, доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s)$). Алгебры Ли $Bso(4s)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = 0$ пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет $s(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2; каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.

3.4. Серия $Bso(4s+2)$: кронекеров блок

Алгебры Ли данной серии имеют смешанный тип, то есть, в разложении Жордана–Кронекера пары форм общего положения будут присутствовать кронекеровы блоки. Так как индекс алгебры равен единице, такой блок будет единственным.

ЛЕММА 1. Справедлива оценка кронекерова индекса:

$$k_1 \leq 2s + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ad^* -инвариантом данной алгебры является функция $f(x) = \frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$. Ранее было показано, что $J_{2s} = P_s \cdot Q_{s+1}$, а значит, дробь $\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$ можно сократить.

Степень Q_{s+1} как многочлена равна $s+1$, степень P_s равна s . Согласно ([2], Section 6, также см. [14]), в случае рационального инварианта индекс k_i может быть оценен сверху суммой степеней числителя и знаменателя: $k_1 \leq \deg P_s + \deg Q_{s+1} = 2s + 1$. $\square$

ЛЕММА 2. Кронекеров индекс равен $2s + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом сдвига аргумента. Рассмотрим такой элемент Y_x (записанный в стандартном представлении):

$$Y_{1,x} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * & y_{11} \\ 0 & * & \dots & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & y_{12} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & y_{1s} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{2,x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & y_{22} \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_s & 0 & y_{2s} \\ 0 & -y_{21} & 0 & -y_{22} & 0 & -y_{2s} & 0 \end{pmatrix}.$$

На месте символов $*$ могут быть любые элементы, такой элемент может быть выбран регулярным (подробнее об этом в следующем разделе). Инвариант $\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$ представляет собой частное определителя матрицы, получаемой из $Y_{2,x}$ заменой последней строки на последнюю строку $Y_{1,x}$, и углового минора порядка $2s$ матрицы $Y_{2,x}$. Легко заметить, что он имеет такой вид:

$$\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}} = \sum_{i=1}^s \frac{y_{1i}y_{2i}}{\alpha_i}.$$

Рассмотрим его сдвиг на элемент Y_a : $Y_{1,a}$ и $Y_{2,a}$ имеют такой же вид, что и $Y_{1,x}$ и $Y_{2,x}$; $\alpha_{1,a} = \dots = \alpha_{s,a} = 1, y_{1s,a} = y_{2s,a} = 1$, остальные элементы равны нулю.

Для получения матрицы градиентов сдвигов достаточно взять градиент самой функции, сделать замену $x \rightarrow a + \lambda x$ и дифференцировать компоненты в точке $\lambda = 0$.

В полученной матрице размера $3s$ мы будем рассматривать группы столбцов, соответствующие тройкам $(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{y_{1i}}, \mathbf{v}_{y_{2i}})$, где элементу, например, y_{1i} соответствует столбец с первым элементом - частной производной инварианта по $y_{1i,a}$, и так далее. Тройки, соответствующие $i \neq s$, имеют ранг 2 (легко проверить, что $y_{2i}\mathbf{v}_{y_{1i}} - y_{1i}\mathbf{v}_{y_{2i}} = 0$), и, вообще говоря, представляют собой векторы

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ (-1)^2 \alpha_i^2 \\ \vdots \\ (-1)^2 \alpha_i^{2s+1} \end{pmatrix},$$

где $P = y_{1i}$ или $P = y_{2i}$. Из каждой такой тройки мы можем убрать по одному вектор-столбцу, оставив таким образом $2s+1$ векторов. Теперь для проверки утверждения достаточно доказать, что полученная матрица размера $(2s+1) \times (2s+1)$ невырождена.

Рассмотрим тройку $(\mathbf{v}_{\alpha_s}, \mathbf{v}_{y_{1s}}, \mathbf{v}_{y_{2s}})$. Все элементы данных вектор-столбцов, начиная с четвертого, представляют собой произведение некоторого многочлена на α_s ; если $\alpha_s = 0$, получаем

$$(\mathbf{v}_{\alpha_s}, \mathbf{v}_{y_{1s}}, \mathbf{v}_{y_{2s}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y_{2s} & y_{1s} \\ -y_{1s}y_{2s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Такая матрица имеет ненулевой определитель.

Проверим, что $(2s - 2) \times (2s - 2)$ -подматрица координат оставшихся столбцов, начиная с четвертой, невырождена. Столбцы $\mathbf{v}_{\alpha_i}$ представляют собой векторы

$$(0 \ 0 \ (-1)y_{1i}y_{2i} \ (-1)^2 2\alpha_i y_{1i}y_{2i} \ \dots \ (-1)^{2s-2} (2s - 2)\alpha_i^{2s-3} y_{1i}y_{2i})^T,$$

соответственно, можно вынести $y_{1i}y_{2i}$ за знак определителя. Получаем подматрицу такого вида (нас интересуют вектор-столбцы, начиная с четвертой координаты):

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_1^2 & 2\alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots \\ -3\alpha_1^2 & -\alpha_1^3 & -3\alpha_2^2 & -\alpha_2^3 & \dots \\ 4\alpha_1^3 & \alpha_1^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_2^4 & \dots \\ -5\alpha_1^4 & -\alpha_1^5 & -5\alpha_2^4 & -\alpha_2^5 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Определитель такой матрицы равен $\alpha_1^4 \cdot \dots \cdot \alpha_{s-1}^4 \cdot \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)^4$ и, очевидно, в общей ситуации не равен нулю.

Таким образом мы доказали независимость сдвигов инварианта. Подпространство, натянутое на дифференциалы сдвигов, соответствует правому нижнему нулевому блоку в кронекеровом блоке, поэтому доказанное означает, что размер этого нулевого блока (равный кронекерову индексу) не меньше, чем $2s + 1$. $\square$

3.5. Серия $Bso(4s + 2)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 10. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 2)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристическим многочленом пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения является многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Как и выше, разобьем доказательство теоремы на два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Элемент Y регулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(Y) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично Утверждению 3.

Если $\Delta_2, \dots, \Delta_{2s-2}$ не равны нулю, то Ad^* -преобразованием мы можем привести $(2s - 2) \times (2s - 2)$ подматрицу матрицы Y_2 к стандартному виду.

При $\Delta_{2s} \neq 0$ возможно получить блочно-диагональное представление с s блоками 2×2 и блоком 1×1 в самом низу диагонали, нулевым в кососимметричной матрице и ненулевым в верхнетреугольной.

В соответствии с замечанием 1 рассмотрим блок 1×1 отдельно. В матрице X_1 соответствующий элемент x_{11} будет свободным: в первом уравнении системы (3) условие на x_{11} не появляется за счет равенства нулю соответствующего блока в матрице Y_2 ; во втором уравнении (3) при вычислении коммутатора в блоке 1×1 получим условие вида $x_{11}\gamma - \gamma x_{11} = 0$, то есть, условие выполняется при любых x_{11} . Отсюда получаем, что аннулятор элемента общего положения такого вида имеет размерность 1.

При $\Delta_{2s} = 0$ получим похожее блочно-диагональное представление с $s - 1$ блоками 2×2 и блоком 3×3 в самом низу диагонали.

Рассмотрим этот блок отдельно, то есть, рассмотрим случай $Bso(6)$ с $\Delta_2 = 0$. Элемент Y в таком случае можно привести к следующему виду:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений (3) для данного элемента, находим аннулятор данного элемента:

$$X_1 = 0, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{21} & 0 \\ -x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что размерность аннулятора снова равна единице. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Элемент Y сингулярен при $\mathbf{f}_g(Y) = 0$. Аннулятор сингулярного элемента общего положения Y , соответствующего равенству нулю одного из $P_i, i = 1, \dots, s-1$, является трехмерной коммутативной подалгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если $J_{2i-1} = 0$, рассуждение полностью повторяет аналогичное из Утверждения 4.
2. Если $\Delta_{2s} \neq 0$, но $\Delta_{2i} = 0, i \neq s$, то нахождение аннулятора проводится по аналогии с $Bso(4s)$: матрицу Y_2 можно привести к блочно-диагональному виду с множеством блоков 2×2 , одним блоком 4×4 , а также одним блоком 1×1 , который был рассмотрен в предыдущем Утверждении. То же самое будет, если мы рассмотрим ситуацию, когда $\Delta_{2s} = 0$, но $\Delta_{2s-2} \neq 0$ (при этом какой-то еще Δ -полуинвариант равен нулю). В таком случае “хорошим” видом будет являться вид с множеством 2×2 блоков, одним 4×4 блоком, и одним 3×3 блоком, ситуация в котором разобрана в предыдущем утверждении. Аннулятор будет коммутативной подалгеброй в соответствии с Замечанием 1 и уже доказанной коммутативностью двумерной подалгебры, отвечающей блоку 4×4 .
3. Ситуация, когда $\Delta_{2s-2} = \Delta_{2s} = 0$ не сводится ни к одной предыдущей, так как в блочно-диагональном разложении появляется блок размера 5×5 .

Рассмотрим последний случай отдельно. Y можно привести к виду (стандартное представление)

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & -b & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим такой элемент:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все полуинварианты, входящие как множители в фундаментальный, кроме Δ_{2s-2} , не равны нулю.

Решая систему уравнений (3) для такого элемента, получаем, что аннулятор состоит из элементов вида

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & -x_3 \\ -x_1 & 0 & x_3 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что такие элементы составляют коммутативную подалгебру размерности 3, что не является минимальной размерностью аннулятора в данном случае; следовательно, элемент Y сингулярен. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Снова воспользуемся Предложением 1, откуда получаем, что каждому корню $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = 0$ соответствует один жорданов блок (так как размерность аннулятора любого сингулярного элемента общего положения больше индекса алгебры Ли на 2); при этом для решений уравнений $P_i(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s-1$, жордановы блоки имеют размер, больший 2×2 ; остальным корням могут соответствовать тривиальные жордановы блоки. Сумма жордановых индексов равна $\dim \mathfrak{g} - \sum_{i=1}^{\text{ind } \mathfrak{g}} (2k_i - 1) = 4s^2 + 2s$; несложно проверить, что такая сумма достигается только в случае, если корням $P_i(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s-1$, соответствуют блоки размера 4×4 , а корням $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0, i = 1, \dots, s$ - блоки размера 2×2 . Значит, неприводимые компоненты P_i входят в фундаментальный инвариант с кратностью 2, а компоненты J_{2i-1} - с кратностью один. Таким образом, вид фундаментального полуинварианта полностью определен. $\square$

ТЕОРЕМА 11 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+2)$). *Алгебры Ли $Bso(4s+2)$ имеют смешанный тип. Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет $s(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов блок размера 2, а каждому корню кратности 2 - один жорданов блок размера 4. Также инвариантом Жордана–Кронекера $Bso(4s+2)$ является один кронекеров индекс, равный $2s+1$.*

4. Случай $Bso(2k+1)$

4.1. Общие сведения о серии

Общая конструкция была описана в разделе 3.1. В случае группы $BSO(2k+1)$ форма Σ имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где единичные матрицы E имеют размер $k \times k$. Элемент $G \in BSO(2k+1)$ устроен следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} A & -Ae & B \\ 0 & 1 & e^T \\ 0 & 0 & A^{-1T} \end{pmatrix},$$

A - верхнетреугольная матрица $k \times k$, B - матрица размера $k \times k$ такая, что $BA^T + Ae e^T A^T + AB^T = 0$.

Мы снова используем отождествление $\langle Y|X \rangle = \text{Tr}(YX^T)$; $X \in Bso(2k+1)$, $Y \in Bso^*(2k+1)$ имеют одинаковый вид. Например, для Y :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & y & Y_2 \\ 0 & 0 & -y^T \\ 0 & 0 & -Y_1^T \end{pmatrix},$$

где Y_1 и Y_2 - матрицы $k \times k$, y - вектор длины k .

Коприсоединенное представление Ad^* задается следующим образом:

$$\pi \begin{pmatrix} A^{-1^T} Y_1 A^T - A^{-1^T} y e^T A^T + & A^{-1^T} y + A^{-1^T} Y_2 e & A^{-1^T} Y_2 A^{-1} \\ + A^{-1^T} Y_2 B^T & * & e^T Y_2 A^{-1} - y^T A^{-1} \\ * & * & \\ * & * & B Y_2 A^{-1} + A e y^T A^{-1} - A Y_1^T A^{-1} \end{pmatrix},$$

где π - проекция, заключающаяся в подставлении нулей вместо всех элементов в блоках, отмеченных *, а также нижнетреугольных элементов в левом верхнем блоке и верхнетреугольных в правом нижнем.

Так же, как и для случая $Bso(2k)$, полуинварианты проще описать в представлении, используемом В. В. Трофимовым в [13]. Изоморфизм представлений задается следующей формулой:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & y & Y_2 S \\ 0 & 0 & -y^T S \\ 0 & 0 & -S Y_1^T S \end{pmatrix},$$

где S - матрица единиц на побочной диагонали. В таком представлении Y представляет собой верхнетреугольную матрицу, кососимметричную относительно побочной диагонали.

Размерность в случае $Bso(2s+1)$ равна $4s^2+2s$, а в случае $Bso(2s+3) - 4s^2+6s+2$. Индекс для алгебр данной серии равен нулю, то есть, алгебры фробениусовы, и для нахождения инвариантов Жордана–Кронекера достаточно найти характеристический многочлен.

4.2. Полуинварианты $Bso(2k+1)$

В целом конструкция полуинвариантов не отличается от таковой для $Bso(2k)$. Единственное различие появляется в алгоритме получения J -полуинвариантов (для элемента $\phi(Y), Y \in Bso(2k+1)$):

1. Вычеркнем первые $2i-1$ строк и последние $2i-1$ столбцов $\phi(Y)$;
2. к уже вычеркнутым вычеркнем еще одну строку и один столбец с индексом $j, j = 2i, \dots, k+1$;
3. на пересечении вычеркнутых строк и столбцов получилась матрица, считаем ее определитель;
4. делаем так для всех возможных j и складываем получившиеся определители с коэффициентом 1, кроме определителя, соответствующего $j = k+1$ - его добавляем в общую сумму с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Все рассуждения о независимости и неприводимости, приведенные для полуинвариантов $Bso(2k)$, справедливы и в данном случае.

ТЕОРЕМА 12 (Трофимов, [13]). *Функции Δ_{2i} при $i \leq s$, и J_{2i-1} при $i \leq s$ являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(2k+1), k = 2s$ или $k = 2s+1$. Функция $J_{2s+1} = \Delta_{2s+2}$ является полуинвариантом коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+3)$.*

4.3. Серия $Bso(4s + 1)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 13. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 1)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_g(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot P_s \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет вид $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если $\Delta_{2s} \neq 0$, то Ad^* -преобразованием можем привести элемент Y к такому виду, чтобы матрица Y_2 имела блочно-диагональный вид с блоками размера 2 (если остальные $\Delta_{2i} \neq 0$), либо с одним блоком размера 4 (если один из $\Delta_{2i}, i \neq s$, равен нулю), а вектор-столбец y был нулевым.

Система уравнений на аннулятор будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T + Y_2 X_2 - y x^T) = 0; \\ X_1^T y + Y_2 x = 0; \\ X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, из условия $y = 0$ и второго уравнения следует, что $x = 0$. После этого оставшиеся уравнения в точности повторяют таковые для случая $Bso(4s)$, соответственно, все рассуждения, описанные выше для характеристического многочлена $Bso(4s)$, верны и для данного случая.

Единственная ситуация, отличающая данный случай от $Bso(4s)$ - ситуация, когда $\Delta_{2s} = 0$. Нужно проверить, что в этом случае ранг падает. В данном случае Ad^* -преобразованием матрицу Y_2 возможно диагонализировать с несколькими блоками 2×2 стандартного вида и одним нулевым блоком 2×2 ; вектор-столбец y можно сделать нулевым везде, кроме последних двух элементов. Достаточно будет рассмотреть случай $Bso(5)$, решив систему (5) для такого элемента Y :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 & y_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_4 & -y_5 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2 & -y_3 \end{pmatrix}.$$

Легко устанавливается, что ранг системы (5) будет равен четырем, размерность аннулятора, следовательно, равна двум. Элемент Y сингулярен.

Аналогично рассмотренным выше случаям, воспользуемся Предложением 1, что позволит найти размеры жордановых блоков, а вместе с этим и кратности корней и соответствующих им неприводимых компонент. $\square$

ТЕОРЕМА 14 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s + 1)$). *Алгебры Ли $Bso(4s + 1)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен пучка общего положения имеет $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2 и $s(s+2)$ корней кратности 1. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2, каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

4.4. Серия $Bso(4s + 3)$: характеристический многочлен и ЖК-инварианты

ТЕОРЕМА 15. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s + 3)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_g(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \dots \cdot (P_s)^2 \cdot P_{s+1} \cdot J_1 \cdot \dots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет вид $\mathbf{f}_g(x + \lambda a)$.

Для данной серии J_{2s+1} также является полуинвариантом, но (формально) в разложении $\mathbf{f}_g(x)$ на множители не участвует, так как $\Delta_{2s+2} = J_{2s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. При $\Delta_{2i} \neq 0, i = 1, \dots, s$, Y_2 приводится к стандартному виду: стандартные кососимметричные блоки размера 2, и один (последний, как в $Bso(4s+2)$) нулевой блок размера 1; у вектор-столбца y первые $2s$ элементов нулевые, а последний произвольный; Y_1 блочно-диагональна с блоками 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и одним нулевым одномерным.
2. При $\Delta_{2s+2} = 0$ можно сделать почти то же самое, но последний элемент вектора y при таком условии должен быть равен нулю; тогда матрица Y_1 будет иметь уже ненулевой блок размера 1. Ранг в таком случае упадет на 2.
3. Все остальные случаи, когда ранг падает на 2 за счет обращения в нуль J -полуинварианта, эквивалентны описанным для предыдущих серий, то есть, в блоке размера 2 (уравнение (4)) за счет равенства нулю Λ образуются две свободные переменные.
4. В случае, если равен нулю любой блок Δ_{2i} , кроме Δ_{2s} , задача сводится к известной: все блоки размера 2, блок размера 4, и последний блок размера 1. Ранг падает на 2 за счет блока 4×4 , соответствующий аннулятор является коммутативной подалгеброй.
5. Если $\Delta_{2s} = 0$, то ситуация сводится к ситуации с блоком размера 3, однако за счет вектора y (и того, что размерности пространства решений должны быть разные) не получится просто свести все к случаю $Bso(4s+2)$.

Все описанные случаи достаточно рассмотреть для маленькой алгебры Ли $Bso(7)$. Действительно, посмотрим на систему (5): если y имеет первые k координат равными нулю, то $X_1^T y$ будет иметь те же координаты равными нулю, и (если их четное число) эти же k координат будут равными нулю в векторе x (это следует из уравнения $X_1^T y + Y_2 x = 0$); тогда “добавка” $-yx^T$ в первом уравнении будет влиять только на последний блок (размера 1 или 3, как описано выше), а вне этого блока это уравнение ничем не будет отличаться от второго уравнения системы (3).

Итак, рассмотрим сначала регулярный случай:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Случай отличается от аналогичного $Bso(6)$ наличием векторов x и y и условием на них.

Решая систему (5), легко убедиться, что при $y_0 \neq 0$, размерность пространства ее решений равна нулю; если же $y_0 = 0$, то размерность равна двум.

В случае $\Delta_2 = 0$ нам нужно найти аннулятор следующего элемента:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{11} & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & y_{12} & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{13} & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{11} & -y_{12} & -y_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аннулятор двумерен, базисные элементы такие:

$$X_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{y_{12}}{2y_{11}}x_{15} & \frac{y_0}{y_2}x_{15} & 0 & 0 & \frac{y_{12}}{2y_2}x_{15} \\ 0 & 0 & x_{15} & -\frac{y_{12}}{y_0}x_{15} & 0 & 0 & -\frac{y_{11}}{y_2}x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_{12}}{2y_2}x_{15} & \frac{y_{11}}{y_2}x_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_0}{y_2}x_{15} & \frac{y_{12}}{y_0}x_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_{12}}{2y_{11}}x_{15} & -x_{15} & 0 \end{pmatrix};$$

два этих базисных элемента коммутативны. Таким образом, все возможные ситуации сингулярных элементов общего положения рассмотрены. Для доказательства теоремы осталось лишь воспользоваться Предложением 1 $\square$

ТЕОРЕМА 16 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+3)$). *Алгебры Ли данной серии имеют жорданов тип. Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ общего положения имеет $(s+1)(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s+1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2, каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

5. Заключение

Среди направлений дальнейших исследований в данной области большой интерес представляет задача нахождения полных наборов полиномиальных функций в биинволюции для рассмотренной в статье серии $Bso(n)$, которую, как ранее упоминалось, не удалось решить методами, используемыми при решении аналогичной задачи для серий $Bsp(2n)$ и $Bsl(n)$. Также логичным продолжением исследования, представленного в данной статье, является вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для других классов алгебр Ли, упомянутых в Задаче, описанной во введении.

Благодарности

Автор выражает благодарность А. В. Болсинову и А. А. Ошемкову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц // Матем. сб. 1979. Т. 108(150) №1. С.134-142.
2. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras// Transform. Groups. 2016. Vol. 21 №1. P. 51-86.
3. Bolsinov A., Izosimov A., Kozlov I. Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials // accepted by Transform. Groups. 2019. <https://arxiv.org/pdf/1407.1878>
4. Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1012 Т. 28. С.119-191.
5. Bolsinov A., Izosimov A., Tsonev D. Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems // Journal of Geometry and Physics, published online 16 November 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003>
6. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open Problems, Questions and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems // Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci. 2018. Vol. 376 №2131.
7. Bolsinov A. V. Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture // Theor. Appl. Mech. 2016. Vol. 43 №2. P. 145-168.
8. Грознова А. Ю. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для алгебр Ли малых размерностей // выпускная квалификационная работа МГУ. 2018.
9. Короткевич А. А. Полные наборы полиномов на борелевских подалгебрах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2006. №5. С. 20-25.
10. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. 1978. Т. 42 №2. С. 396-415.
11. Rosemann S., Schöbel K. Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields // Journ. Geom. and Phys. 2015. Vol. 87. P. 396-414.
12. Thompson R. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra Appl. 1991. Vol. 147. P. 323-371.
13. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43 №3. С. 714-732.
14. Воронцов А. Кронекеровы индексы алгебры Ли и оценка степеней инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2011. Т. 66 №1. С. 26-30.
15. Vorushilov K. Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38 №6. P. 1121-1130.

16. Ворушилов К. С. Инварианты Жордана—Кронекера для полупрямых сумм вида $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ // Фундамент. и прикл. матем. 2019. Т. 22 №6. С. 3-18.

REFERENCES

1. Arkhangel'skii, A. A. 1980, "Completely integrable Hamiltonian systems on a group of triangular matrices" *Math. USSR-Sb.*, vol. 36, no. 1, pp. 127-134.
2. Bolsinov A. V., Zhang P. 2016, "Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras", *Transform. Groups* vol. 21, no. 1, pp. 51-86.
3. Bolsinov A., Izosimov A., Kozlov I. 2019, "Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials", accepted by *Transform. Groups*, <https://arxiv.org/pdf/1407.1878>
4. Bolsinov A. V., Izosimov A. M., Konyaev A. Yu., Oshemkov A. A. 2012, "Algebra and topology of integrable systems. Research problems", *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analysis*, vol. 28, pp. 119-191.
5. Bolsinov A., Izosimov A., Tsonev D., 2016 "Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems", *Journal of Geometry and Physics*, published online, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003>
6. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S., 2018, "Open Problems, Questions and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems", *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 376, no. 2131
7. Bolsinov A. V., 2016, "Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture", *Theor. Appl. Mech.* vol. 43, no. 2, pp. 145-168.
8. Groznova A. Yu., 2018 "Computation of Jordan–Kronecker invariants for low-dimensional Lie algebras" *Graduate Thesis, Lomonosov Moscow State University*
9. Korotkevich A. A., 2006, "Complete sets of polynomials on Borel subalgebras", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 5, pp. 20–25.
10. Mischenko A. S., Fomenko A. T., 1978, "Euler equations on finite-dimensional Lie groups", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 12, no. 2, pp. 396-415.
11. Rosemann S., Schöbel K., 2015, "Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields", *Journ. Geom. and Phys.*, vol. 87, pp. 396-414.
12. Thompson R., 1991, "Pencils of complex and real symmetric and skew matrices", *Linear Algebra Appl.*, vol. 147, pp. 323-371.
13. Trofimov V. V., 1980, "Euler equations on Borel subalgebras of semisimple Lie algebras", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 14, no. 3, pp. 714-732.
14. Vorontsov A., 2011, "Kronecker indices of Lie algebras and invariants degrees estimate", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 66, no. 1, pp. 26-30.
15. Vorushilov K., 2017, "Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 6, pp. 1121-1130.

16. Vorushilov K. S., 2019, “Jordan–Kronecker invariants of semidirect sums of the form $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ and $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ ”, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 22, no. 6, pp. 3-18.

Получено 01.06.21 г.

Принято в печать 20.09.2021 г.