ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.554.32

О РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ АРТИНОВОСТИ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

Е. В. Мещерина (г. Оренбург)

Аннотация

В работе рассматриваются соотношения между различными определениями артиновости.

Ключевые слова: алгебра Ли, подалгебра, внутренний идеал, артинова Ли алгебра.

ON THE DIFFERENT DEFINITIONS OF ARTINIANESS FOR LIE ALGEBRAS

E. V. Mescherina (Orenburg)

Abstract

The different definitions of an artinaness are considered in the article.

Keywords: Lie algebra, subalgebra, inner ideal, artinian Lie algebra.

Понятие артиновости играет важную роль в теории колец.

Ассоциативное кольцо R называется право (лево) артиновым, если любая убывающая цепочка его правых (левых) идеалов идеалов – стабилизируется [1], [2].

Известны примеры право, но не лево артиновых колец [1].

В дальнейшем, говоря артинова алгебра или артиново кольцо мы будем иметь в виду правую артиновость.

Понятие артиновости используется как одно из условий конечности (конечномерности).

Так, например, радикал Джекобсона артинова кольца является нильпотентным, полупростая артинова алгебра является прямой суммой простых артиновых подалгебр, артинова простая алгебра изоморфна алгебре матриц над телом [2].

Ситуация для алгебр Ли отличается. Любой идеал алгебры Ли является двусторонним.

Артиновость для алгебр Ли через идеалы определяли Ю. А. Бахтурин [3], С. А. Пихтильков [4] и В. М. Поляков [5]. Они рассматривали специальные i-артиновы алгебры Ли.

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [6], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Скажем, что алгебра Ли L специальная алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Возможно лучшим аналогом одностороннего идеала для алгебр Ли являются подалгебры или внутренние идеалы.

Понятие внутреннего идеала для йордановых алгебр было введено Н. Джекобсоном [7]. Дж. Бенкарт по аналогии ввела внутренний идеал для алгебр Ли [8].

Скажем, что подпространство B алгебры Ли L является внутренним идеалом, если $[B, [B, L]] \subseteq B$.

Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар [9], [10].

Рассмотрим определения артиновости в трех смыслах.

Пусть L — алгебра Ли.

а) Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;

б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;

в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется inn-артиновой.

В работе [11] приведен пример бесконечномерной inn-артиновой алгебры Ли.

Пусть F — поле характеристики нуль, K - бесконечномерное алгебраически замкнутое расширение поля F.

Алгебра Ли $L = sl_2 K$, бесконечномерная над F, является inn-артиновой алгеброй Ли.

Можно отметить, что алгебра L содержит бесконечномерную абелеву подалгебру.

Следовательно, алгебра Ли L не является a-артиновой.

Мы установили, что из inn-артиновости может не следовать a-артиновость.

Легко проверить, что из inn-артиновости следует i-артиновость и из a-артиновости следует i-артиновость.

В работе [11] также приведен пример, показывающий что из i-артиновости может не следовать a-артиновость.

Пусть F — поле характеристики нуль,

$$K = F(x_1, x_2, ..., x_n, ...) -$$

поле рациональных функций от счетного числа коммутирующих переменных $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Обозначим через L алгебру Ли матриц порядка 2 над полем K со следом нуль $L = sl_2(K)$. Будем рассматривать L как алгебру Ли над полем F.

Идеалы I является векторными пространствами над K.

Следовательно, алгебра Ли L является i-артиновой.

Адгебра L содержит бесконечную убывающую цепочку подалгебр над F:

$$sl_2(F[x_1, x_2, ...]) \supseteq sl_2(F[x_{21}, x_3, ...]) \supseteq ... \supseteq sl_2(F[x_n, x_{n+1}, ...]) \supseteq ...,$$

и не является a-артиновой.

В работе [11] приведен пример показывающий, что из i-артиновости не следует inn-артиновость.

Пусть V векторное пространство над полем F и W – подпространство V с базисом $e_1, e_2, ..., e_n, ...$, где $\dim V/W = \infty$.

Обозначим через W_n подпространство, порожденное векторами $e_n, e_{n+1}, ...$ Получим $W = W_1$.

Пусть $L = L(V)^{(-)}$ алгебра Ли, полученная из полной алгебры линейных отображений V с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Известно, что L — простая алгебра Ли.

Обозначим через I_n множество линейных отображений $f : V \to V$ таких, что $f(V) \subseteq W_n$, $f(W) = 0$.

Можно проверить, что подпространства $I_n, n = 1, 2, ...$ — являются внутренними идеалами.

Цепочка внутренних идеалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ простой алгебры Ли L является строго убывающей, бесконечной.

Следовательно, алгебра Ли L является i-артиновой, но не является inn-артиновой.

Представляют интерес примеры бесконечномерных a-артиновых алгебр Ли.

Известно, что многие результаты переносятся с групп на алгебры Ли.

Для групп существуют даже абелевы бесконечные группы удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп. Такие группы называются квазициклическими.

Примером такой группы может служить мультипликативная группа комплексных корней уравнений $x^{p^n} = 1, n = 1, 2, ...$ для простого числа p.

Все подгруппы квазициклических групп конечны. О. Ю.Шмидт сформулировал проблему о существовании бесконечных неабелевых групп все, подгруппы которых конечны.

Эта проблема была решена А. Ю. Ольшанским [12].

Для алгебр Ли ситуация отличается. Все абелевы a-артиновы алгебры Ли — конечны.

В работе [13] показано, что все специальные алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры — конечномерны.

Условие максимальности на абелевы подалгебры означает отсутствия бесконечных абелевых подалгебр. Условие максимальности на абелевы подалгебры эквивалентно условию минимальности на абелевы подалгебры.

Из [13] следует, что все специальные a-артиновы алгебры Ли — конечномерны.

Алгебра Ли L называется первичной, если из равенства нулю взаимного коммутанта $[U,V] = 0$ любых двух идеалов U и V следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

Идеал P алгебры Ли L называется первичным, если фактор-алгебра L/P — первична.

Алгебра Ли L называется полупервичной, если если она не содержит ненулевых абелевых идеалов.

Естественно поставить следующий вопрос.

Вопрос 1. Существуют ли бесконечномерные a-артиновы алгебры Ли?

Ответ на этот вопрос неизвестен автору. Пример из [12] построен с помощью геометрических методов в теории групп. Его перенесение в на алгебры Ли пока не удается выполнить.

Основным результатом работы является сведение вопроса 1 к следующему вопросу.

Вопрос 2. Существуют ли первичные бесконечномерные a-артиновы алгебры Ли?

Теорема 1. *Вопросы 1 и 2 для алгебр Ли — эквивалентны.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть L — полупервичная алгебра Ли над полем F такая, что любая абелева подалгебра в L — конечномерна. Тогда*

1) L не содержит бесконечных множеств попарно не пересекающихся идеалов;

2) L удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных идеалов;

3) каждый максимальный аннуляторный идеал в L является первичным;

4) множество максимальных аннуляторных идеалов в L — конечно и их пересечение равно нулю.

Доказательство теоремы. Из вопроса 2 вопрос 1 следует непосредственно из формулировок.

Докажем следование в дургую сторону.

Пусть L — бесконечномерная a-артинова алгебра Ли. Обозначим через R ее первичный радикал.

В работе [14] показано, что первичный радикал a-артиновой алгебры Ли разрешим.

Существование i-артиновой алгебры Ли, первичный радикал которой не является разрешимым представляет проблему А.В. Михалева, ответ на которую до сих пор неизвестен.

В работе [14] дается решение ослабленной проблемы А.В. Михалева для inn-артиновых и a-артиновых алгебр Ли.

Легко проверить, что подалгебра и гомоморфный образ a-артиновой алгебры Ли являются a-артиновыми.

Из a-артиновости R следует a-артиновость абелевой алгебры $R/[R, R]$. Следовательно алгебра $R/[R, R]$ — конечномерна.

Рассмотрим члены производного ряда алгебры R:

$$R' = [R, R], R^{(k+1)} = [R^{(k)}, R^{(k)}], k = 1, 2, \ldots .$$

Рассуждая аналогично покажем конечномерность факторов $R^{(k)}/R^{(k=1)}$ производного ряда алгебры R.

Из разрешимости R следует, что $R^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n.

Мы доказали конечномерность первичного радикала R.

Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{L} = L/R$.

Алгебра Ли $\bar{L}$ является бесонечномерной, полупервичной, a-артиновой.

Согласно лемме 1, в алгебре Ли $\bar{L}$ находится конечное число первичных идеалов $P_1, \ldots, P_n$, пересечение которых равно нулю.

Тогда алгебра Ли $\bar{L}$ является подпрямым произведение алгебр $\bar{L}/P_i, i = 1, \ldots, n$.

Если все алгебры $\bar{L}/P_i, i = 1, \ldots, n$ — конечномерны, то сама алгебра $\bar{L}$ — конечномерна.

Следовательно, существует i такое, что $1 \leqslant i \leqslant n$ и алгебра Ли $\bar{L}/P_i$ является бесконечномерной, первичной, a-артиновой.

Доказанная эквивалентность вопросов 1 и 2 показывает, что для ответа на вопрос 1 можно строить бесконечномерную, первичную, a-артинову алгебру Ли.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
2. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
3. Бахтурин Ю. А. Артиновы специальные алгебры Ли // Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 24—26.
4. Пихтильков С. А. Артиновые специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2001. С. 189—194.
5. Пихтильков С. А., Поляков В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 1. С. 163—169.
6. Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 4. С. 821—829.

7. Jacobson N. Structure theory of quadratic Jordan algebras. Lecture Notes. Tata Institute of Fundamental research. Bombay, 1970.

8. Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 1977. Vol. 232. P. 61—81.

9. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. An artinian theory for Lie algebras // Journal of Algebra. 2008. Vol. 319. P. 938—951.

10. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. Inner ideal structure of nearly artinian Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137. P. 1—9.

11. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А. О некоторых свойствах внутренних идеалов алгебры Ли // Вестник ОГУ. 2013 (сдано в печать).

12. Ольшанский А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1980. Т. 44, № 2. С. 309—321.

13. Бейдар К. И., Зайцев М. В., Пихтильков С. А. Алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 2002. № 5. С. 27—32.

14. Мещерина Е. В., Пихтилькова О. А., Пихтильков С. А. О проблеме А. В. Михалева для алгебр Ли // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 83 — 88.

Оренбургский государственный университет
Поступило 18.09.2013